LXXXVI Московская математическая олимпиада

12 марта 2023 года • 11 класс, 1 день

Задача 1. К графикам функций $y = \cos x$ и $y = a\,\mathrm{tg}\,x$ провели касательные в некоторой точке их пересечения. Докажите, что эти касательные перпендикулярны друг другу для любого $a \neq 0$.

Задача 2. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, отличный от прямоугольника, а точка P выбрана внутри него так, что описанные окружности треугольников PAB и PCD имеют общую хорду, перпендикулярную AD. Докажите, что радиусы данных окружностей равны.

Задача 3. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 5$ с целыми коэффициентами, имеющий n различных целых корней. Докажите, что многочлен $P(x) + 3$ имеет n различных действительных корней.

Задача 4. В турнире по теннису (где не бывает ничьих) участвовало более 4 спортсменов. Каждый игровой день каждый теннисист принимал участие ровно в одной игре. К завершению турнира каждый сыграл с каждым в точности один раз. Назовём игрока *упорным*, если он выиграл хотя бы один матч и после первой своей победы ни разу не проигрывал. Остальных игроков назовём *неупорными*. Верно ли, что игровых дней, когда была встреча между неупорными игроками, больше половины?

Задача 5. Середины всех высот некоторого тетраэдра лежат на его вписанной сфере. Верно ли, что тетраэдр правильный?

Задача 6. Назовём тройку чисел *триплетом*, если одно из них равно среднему арифметическому двух других. Последовательность (a_n) строится следующим образом: $a_1 = a_2 = 1$ и при $n > 2$ число a_n — такое минимальное натуральное число, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нет трёх, образующих триплет. Докажите, что $a_n \leqslant \dfrac{n^2+7}{8}$ для любого n.

XX устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 16 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXVI Московской математической олимпиады —
на сайте `mmo.mccme.ru`