Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2023.

Заключительный этап. Условия и решения задач.

Содержание

6 класс

Задача 6.1. Два обжоры едят конфеты. Сначала первый ест 1 конфету, потом второй ест 2 конфеты, потом первый ест 3, потом второй ест 4, ..., первый ест N конфет. Оказалось, что первый обжора съел суммарно на 100 конфет больше, чем второй. Найдите N.

Ответ: 199.

Решение. Обозначим через A количество конфет, съеденных первым обжорой, а через B — вторым. Посмотрим, чему равна разность $A - B$ после каждого шага (номер шага i равен количеству конфет, съеденных на этом шаге одним из обжор):

i	1	2	3	4	...	$2k-1$	$2k$	...	198	199
$A-B$	$+1$	-1	$+2$	-2	...	$+k$	$-k$	...	-99	$+100$

Ясно, что, во-первых, разность $+100$ появится после шага, на котором первый обжора съест 199 конфет, а во-вторых, разности не повторяются, то есть если ряд продолжить, число $+100$ больше не встретится. Следовательно, единственный возможный ответ — это $N = 199$. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

5 б. Задача в целом решена верно, но есть ошибка при подсчёте ответа.

3 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

Задача 6.2. В школьной столовой есть несколько столов, за каждым из которых может сидеть не более 6 человек. На первой перемене в столовую пришли 50 школьников и расселись за столами так, что осталось ровно 3 свободных стола, после чего они ушли на урок. На второй перемене в столовую пришли 8 школьников и расселись за столами так, что осталось ровно 4 свободных стола. Сколько столов в столовой? (Стол называется свободным, если за ним никто не сидит.)

Ответ: 12.

Решение. С одной стороны, 50 школьников не могли занять менее 9 столов (за 8 столами помещаются только 48 школьников). Значит, из первого условия следует, что столов не менее 12. С другой стороны, 8 школьников не могли занять более 8 столов, так что из второго условия извлекаем, что столов не более 12. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения следующие критерии *суммируются:*

+4 б. Доказано, что столов не менее 12.

+3 б. Доказано, что столов не более 12.

В отсутствие предыдущих продвижений применяется следующий критерий:

1 б. Приведён только верный ответ (и, возможно, пример рассадки за столы).

Задача 6.3. На кастинг для кинофильма пригласили 10 пар близнецов. Известно, что в каждой паре близнецов один всегда говорит правду, а другой всегда лжёт. Все 20 человек расселись за круглым столом. У каждого спросили: «Правда ли, что ваш близнец сидит рядом с вами?» Десять человек ответили «Да». Сколько ответов «Да» могли дать оставшиеся десять человек? (У каждого человека есть только один близнец среди присутствующих.)

Ответ: 0.

Решение. Каждая пара близнецов сидит либо рядом, либо нет. В обоих случаях один из близнецов на вопрос ответил бы «Да», а второй — «Нет». Следовательно, в любом случае мы услышим 10 ответов «Да» и 10 ответов «Нет». □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

0 б. Приведён только верный ответ.

3 б. Замечено, что если близнецы сидят рядом, то их ответы различаются.

3 б. Замечено, что если близнецы не сидят рядом, то их ответы различаются.

Задача 6.4. Паша загадал несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Ваня задал несколько вопросов, а Паша на них честно ответил:

— Сколько загаданных тобою чисел делятся на 6? — Одно.

— Сколько загаданных тобою чисел делятся на 5? — Два.

— Сколько загаданных тобою чисел делятся на 4? — Три.

— Сколько загаданных тобою чисел делятся на 3? — Четыре.

— Сколько загаданных тобою чисел делятся на 2? — Пять.

Какое наименьшее количество чисел мог загадать Паша?

Ответ: 8.

Решение. Рассмотрим группу из четырёх чисел, делящихся на 3, и из пяти чисел, делящихся на 2. Любое число, общее для этих двух групп, должно делиться на 6. Следовательно, такое число ровно одно. Значит, есть ещё 3 числа из первой группы, не входящих во вторую, и ещё 4 числа из второй группы, не входящих в первую. Всего это уже не менее 8 чисел.

С другой стороны, можно привести пример 8 чисел, которые мог бы загадать Паша:

$$2, 3, 4, 8, 9, 10, 12, 15. \qquad \square$$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+0 б. Приведён верный ответ.

+3 б. Приведён пример 8 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

+4 б. Доказано, что не могло быть загадано менее 8 чисел.

Задача 6.5. У Пети есть 2023 камня, массы любых двух из которых различаются не более чем в 2 раза. Петя называет кучу камней *странной,* если в ней найдутся два камня, масса одного из которых больше массы другого более чем на 10%. Докажите, что Петя может разложить все камни по кучам так, чтобы в каждой куче было ровно 7 камней, причём странных куч оказалось не больше 7.

Решение. Разложим камни в ряд по возрастанию масс слева направо и разобъём их на последовательные семёрки. Эти семёрки сделаем кучами. Докажем, что среди них будет не более 7 странных.

Назовём *показателем* каждой семёрки массу правого камня в ней. Заметим, что у странной семёрки (т. е. образующей странную кучу) показатель более чем на 10% больше, чем у семёрки слева от неё. (Если самая левая семёрка образует странную кучу, то слева от неё поместим виртуальную семёрку без камней, показателем которой сделаем массу самого лёгкого камня ряда. Тогда утверждение будет корректным для всех странных семёрок.)

Предположим, что в ряду оказалось хотя бы 8 странных семёрок. Это означает, что, если идти по ряду слева направо, показатель будет не менее 8 раз увеличиваться более чем на 10% (а в остальных случаях не убывать). Оценим наименьшее возможное значение показателя по сравнению с его изначальной величиной. Каждую операцию увеличения на 10% обозначим стрелкой «$\mapsto$»; так как нам нужно оценить наименьший возможный результат, будем округлять числа до сотых в меньшую сторону:

$$1{,}00 \overset{1}{\mapsto} 1{,}10 \overset{2}{\mapsto} 1{,}21 \overset{3}{\mapsto} 1{,}33 \overset{4}{\mapsto} 1{,}46 \overset{5}{\mapsto} 1{,}60 \overset{6}{\mapsto} 1{,}76 \overset{7}{\mapsto} 1{,}93 \overset{8}{\mapsto} 2{,}12.$$

Так как все показатели — это массы каких-то камней в ряду (в том числе показатель виртуальной семёрки, которую мы могли добавить), то они не могут увеличиться более чем в два раза. Противоречие. Значит, в ряду получилось не более 7 странных семёрок. $\square$

Другое решение. Разложим камни в ряд по возрастанию масс слева направо. Также поставим неподалеку корзину. Рассмотрим семь левых камней в ряду. Если правый из них не более чем на 10% тяжелее левого, то из них можно собрать кучу, которая не будет странной — сделаем это (и уберём эти камни из ряда). В ином случае возьмём *шесть* левых камней ряда и выкинем их в корзину. Будем последовательно совершать такие операции, пока в ряду не останется менее 7 камней.

Если в корзине окажется не более $6 \cdot 7 = 42$ камней, то их можно будет оттуда достать и объединить с оставшимися камнями из ряда. Всего у нас тогда получится не более $42 + 6 = 48$ камней, не распределённых по семёркам; но так как общее число камней делится на 7, то и общее количество не распределённых камней должно делиться на 7, и на самом деле их будет не более 42. Значит, их можно разбить на не более чем шесть куч — возможно, странных.

Докажем, что в корзине окажется не более 42 камней. Для этого заметим, что каждый раз, когда мы выкидываем 6 камней в корзину, масса самого левого камня ряда увеличивается хотя бы на 10%, то есть умножается не менее чем на 1,1. Покажем, что через 8 таких умножений масса увеличится более чем в два раза. Каждую операцию обозначим стрелкой «$\mapsto$»; так как нам нужно оценить наименьший возможный результат, будем округлять числа до сотых в меньшую сторону:

$$1{,}00 \overset{1}{\mapsto} 1{,}10 \overset{2}{\mapsto} 1{,}21 \overset{3}{\mapsto} 1{,}33 \overset{4}{\mapsto} 1{,}46 \overset{5}{\mapsto} 1{,}60 \overset{6}{\mapsto} 1{,}76 \overset{7}{\mapsto} 1{,}93 \overset{8}{\mapsto} 2{,}12.$$

Так как масса левого камня ряда не может увеличится в два раза по сравнению с первоначальной, то 8 таких операций нам сделать не удастся. Следовательно, в корзине окажется не более 42 камней, и странных куч получится не более 6. $\square$

Замечание. Можно привести пример набора масс камней, при распределении которых не может получиться менее 6 странных куч. Пусть у нас будет по 6 камней масс 1,00, 1,105, 1,22, 1,35, 1,49, 1,64 и 1,81, а остальные камни будут массы 2,00. Все эти массы отличаются друг от друга более чем на 10%, поэтому все семёрки, кроме целиком составленных из камней массы 2,00, будут странными. Отсюда ясно, что странных семёрок будет не менее шести.

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

6 б. В верном (в остальном) решении без обоснования используется, что $1{,}1^8 > 2$.

1 б. Используется разбиение камней на семёрки, как в решении выше, но дальнейших продвижений нет.

7 класс

Задача 7.1. Пока Малыш был в школе, Карлсон нашёл N пирожных и начал их есть. За первый час он съел 35 штук. Затем он понял, что если будет продолжать есть пирожные с той же скоростью, то сможет их все доесть только через час после возвращения Малыша. Тогда он начал есть на 15 пирожных в час больше и успел всё съесть за полчаса до прихода Малыша. Найдите N.

Ответ: 210.

Решение. Если бы Карлсон не поменял скорость, то он бы съел оставшиеся пирожные за $(N-35)\ /\ 35$ часов. Но он увеличил скорость на 15 пирожных в час и потратил на их поедание $(N-35)/50$ часов. При этом из условия задачи мы знаем, что разница между одним и другим количеством часов составляет полтора часа. Получается уравнение

$$\frac{N-35}{35}=\frac{N-35}{50}+1{,}5.$$

Умножив обе части уравнения на 350 и преобразовав, получим

$$\begin{aligned}(N-35)\cdot 10&=(N-35)\cdot 7+525,\\ 10N-350&=7N-245+525,\\ 3N&=630,\\ N&=210.\end{aligned}$$

□

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

7 б. Приведено верное решение, но найдено количество пирожных, которое Карлсон съел после того, как ускорился.

4 б. Получено верное уравнение, но при его решении допущены ошибки.

2 б. Приведён только верный ответ.

Задача 7.2. На кастинг для кинофильма пригласили 10 пар близнецов. Известно, что в каждой паре близнецов один всегда говорит правду, а другой всегда лжёт. Все 20 человек расселись за круглым столом. У каждого спросили: «Правда ли, что ваш близнец сидит рядом с вами?» Десять человек ответили «Да». Сколько ответов «Да» могли дать оставшиеся десять человек? (У каждого человека есть только один близнец среди присутствующих.)

Ответ: 0.

Решение. Каждая пара близнецов сидит либо рядом, либо нет. В обоих случаях один из близнецов на вопрос ответил бы «Да», а второй — «Нет». Следовательно, в любом случае мы услышим 10 ответов «Да» и 10 ответов «Нет». □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

3 б. Замечено, что если близнецы сидят рядом, то их ответы различаются.

3 б. Замечено, что если близнецы не сидят рядом, то их ответы различаются.

0 б. Приведён только верный ответ.

Задача 7.3. Натуральное число умножили на 3. Могла ли от этого его сумма цифр уменьшиться в 3 раза?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим, например, число 6669. Сумма его цифр равна 27, а сумма цифр числа $6669 \cdot 3 = 20\,007$ равна 9, поэтому сумма цифр при умножении на 3 действительно уменьшилась в 3 раза. □

Замечание. Пользуясь признаками делимости на 3 и 9, несложно убедиться, что подходящее число должно делиться на 9, причём его сумма цифр должна быть не меньше 27. Кроме 6669 существуют и другие подходящие числа: например, 36 675 или 33 333 336.

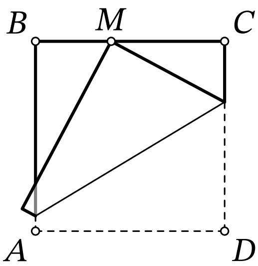
Критерии

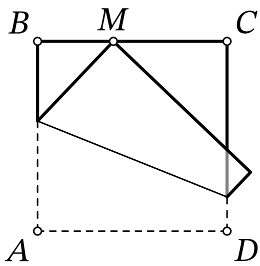
Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

6 б. Приведён пример подходящего числа без обоснования.

0 б. Не приведён пример подходящего числа.

Задача 7.4. У Лёши есть бумажный квадрат $ABCD$. Он отметил на стороне BC точку M. Сначала он перегнул квадрат так, что точка D совпала с точкой M (левый рисунок), и разогнул обратно. Затем он перегнул его так, что точка A совпала с точкой M (правый рисунок), и снова разогнул обратно. Пусть O — точка пересечения двух линий перегиба. Докажите, что $BO = OC$.





Решение. Заметим, что при первом перегибании отрезок DO совмещается с MO, а при втором — отрезок AO совмещается с MO. Следовательно, $AO = MO = DO$ (рис. 1).

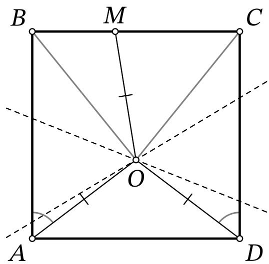


Рис. 1: к решению задачи 7.4

Получаем, что треугольник AOD равнобедренный. Теперь докажем, что треугольники AOB и DOC равны по первому признаку. Действительно,

- $AB = CD$, так как это две стороны квадрата;
- $AO = OD$ из-за того, что AOD равнобедренный;
- $\angle BAO = 90° - \angle OAD = 90° - \angle ODA = \angle CDO$.

Тогда $BO = OC$, что и требовалось доказать. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии (не суммируются):

2 б. Замечено, что $AO = OM$ или $DO = OM$.

5 б. Доказано, что $AO = OD$.

Задача 7.5. На десяти карточках написаны числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 (на каждой карточке по одному числу из перечисленных). Влад хочет произвольно разбить все эти карточки на две непустые группы. Затем он в каждой группе вычислит сумму чисел и из большей суммы вычтет меньшую. Сколько различных значений может принимать такая разность?

Ответ: 511.

Решение. Заметим, что данные нам числа — это степени двойки 2^0, 2^1, 2^2, $\ldots$, 2^9. Так как $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^8=2^9-1<2^9$, то последнее число, 512, больше суммы всех остальных. Это означает, что в любом разбиении на две непустые группы большая сумма будет у той, что содержит 512. Это группу будем считать первой, а другую — второй.

Сумма всех чисел равна $2^{10}-1=1023$. Если сумма чисел второй группы равна A, то первой равна $1023-A$, а их разность равна $1023-2A$. Ясно, что различным значениям A соответствуют различные разности. Таким образом, нам надо просто найти количество различных возможных сумм чисел второй группы.

Заметим, что вторую группу можно выбрать 2^9-1 способами (каждый элемент, кроме 512, либо включается, либо нет, то есть даёт 2 варианта в произведение; но в итоге вариант, отвечающий пустой группе, нужно отбросить). Докажем, что во всех этих способах получаются разные суммы.

Действительно, пусть мы нашли две различные возможные вторые группы, суммы которых совпадают:

$$2^{x_1}+2^{x_2}+\ldots+2^{x_m}=2^{y_1}+2^{y_2}+\ldots+2^{y_n}.$$

Упорядочим степени и в левой, и в правой части по убыванию. Сократив одинаковые степени двойки, получим равенство вида

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_r}=2^{b_1}+2^{b_2}+\ldots+2^{b_s},$$

все степени двойки в котором различны. (С каждой стороны должно остаться положительное число, иначе изначальные наборы степеней совпадали.) Без ограничения общности, пусть $a_1>b_1$. Тогда

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_r}\geqslant 2^{a_1}>2^{a_1}-1=2^{a_1-1}+2^{a_1-2}+\ldots+2+1\geqslant 2^{b_1}+2^{b_2}+\ldots+2^{b_s},$$

противоречие.

Следовательно, все $2^9-1=511$ способов дают вторые группы с разными суммами; тогда и соответствующие разности будут различными. $\square$

Замечание. Тождество $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$, использованное в решении, можно доказать, взяв правую часть и последовательно заменяя $2^k=2^{k-1}+2^{k-1}$:

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{n-1}+2^{n-1}-1=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-2}-1=\ldots=\\&=2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+2-1=2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1.\end{aligned}$$

Замечание. Утверждение о том, что разные способы выбрать группу не могут давать одинаковые суммы, можно также получить из того, что каждое натуральное число единственным образом представляется в виде суммы различных степеней двойки (т. е. что двоичная запись числа существует и единственна).

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+1 б. Приведён верный ответ.

+1 б. Доказано, что все разности Влада нечётны.

Утверждение о единственности двоичной записи (о том, что у каждого числа существует единственное представление в виде суммы степеней двойки) считается общеизвестным; за его использование без доказательства баллы не снимаются, за доказательство баллы не начисляются.

8 класс

Задача 8.1. Республика Тропико состоит из нескольких островов, между которыми нет ни одного моста. Новый президент Тропико решил каждую пару островов соединить одним мостом. За время своего правления он не успел построить лишь несколько мостов, выходящих из острова Дальний (все остальные мосты были построены). Известно, что всего было построено 49 мостов. Сколько построили мостов, выходящих из острова Дальний?

Ответ: 4.

Решение. Пусть всего островов $N+1$. Тогда всего мостов по плану президента должно быть $N \cdot (N+1) \,/\, 2$. Отсюда

$$49 < \frac{N \cdot (N+1)}{2}.$$

С другой стороны, если отбросить остров Дальний, все остальные острова соединяются $(N-1) \cdot N \,/\, 2$ мостами — и все эти мосты уже построены. Получаем

$$49 \geqslant \frac{(N-1) \cdot N}{2}.$$

Выпишем ряд чисел:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{N \cdot (N+1)}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Из $45 \leqslant 49 < 55$ получаем, что островов всего $N = 10$, то есть 45 мостов не имеют отношения к острову Дальний. Значит, оставшиеся 4 построенных моста выходят с острова Дальний. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения следующие критерии *суммируются:*

+3 б. Доказано, что островов не менее 11.

+3 б. Доказано, что островов не более 11.

В отсутствие предыдущих продвижений применяются следующие критерии:

1 б. Приведён только пример, в котором из острова Дальний выходит 4 моста.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 8.2. Натуральное число умножили на 3. Могла ли от этого его сумма цифр уменьшиться в 3 раза?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим, например, число 6669. Сумма его цифр равна 27, а сумма цифр числа $6669 \cdot 3 = 20\,007$ равна 9, поэтому сумма цифр при умножении на 3 действительно уменьшилась в 3 раза. □

Замечание. Пользуясь признаками делимости на 3 и 9, несложно убедиться, что подходящее число должно делиться на 9, причём его сумма цифр должна быть не меньше 27. Кроме 6669 существуют и другие подходящие числа: например, 36 675 или 33 333 336.

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

6 б. Приведён пример подходящего числа без обоснования.

0 б. Не приведён пример подходящего числа.

Задача 8.3. Найдите все тройки положительных чисел (a, b, c), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} a + b = b^2 + c^2 + 2bc, \\ b + c = c^2 + a^2 + 2ac, \\ c + a = a^2 + b^2 + 2ab. \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Решение. После выделения полных квадратов в правых частях и замены $a+b = z$, $b + c = x$, $c + a = y$ уравнения переписываются в следующем виде:

$$z = x^2, \qquad x = y^2, \qquad y = z^2. \tag{*}$$

Получаем $x = y^2 = z^4 = x^8$. Поскольку числа a, b, c положительны, то и число x положительно. Из равенства $x = x^8$ следует, что $x = 1$. (Действительно, при $0 < x < 1$ мы бы получили $x > x^8$, а при $x > 1$ — наоборот, $x < x^8$.) Из равенств (*) ясно, что все переменные x, y, z принимают значение 1.

Выразим исходные переменные через x, y, z:

$$a = \frac{y + z - x}{2}, \qquad b = \frac{z + x - y}{2}, \qquad c = \frac{x + y - z}{2}.$$

При $x = y = z = 1$ получаем тройку $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+1 б. В правых частях выделены полные квадраты.

+4 б. Доказано, что какое-то из чисел $a+b$, $b+c$, $c+a$ равно 1.

+1 б. Доказано, что все числа $a+b$, $b+c$, $c+a$ равны 1.

+1 б. Приведена только подходящая тройка.

Задача 8.4. На ста карточках написаны числа $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{99}$ (на каждой карточке по одному числу из перечисленных). Влад хочет произвольно разбить все эти карточки на две непустые группы. Затем он в каждой группе вычислит сумму чисел и из большей суммы вычтет меньшую. Сколько различных значений может принимать такая разность?

Ответ: $2^{99}-1$.

Решение. Заметим, что $1+2+2^2+\ldots+2^{98}=2^{99}-1<2^{99}$, то есть последнее из данных чисел больше суммы всех остальных. Это означает, что в любом разбиении на две непустые группы большая сумма будет у той, что содержит 2^{99}. Это группу будем считать первой, а другую — второй.

Обозначим сумму всех чисел через S. Если сумма чисел второй группы равна A, то первой равна $S-A$, а их разность равна $S-2A$. Ясно, что различным значениям A соответствуют различные разности. Таким образом, нам надо просто найти количество различных возможных сумм чисел второй группы.

Заметим, что вторую группу можно выбрать $2^{99}-1$ способами (каждый элемент, кроме 2^{99}, либо включается, либо нет, то есть даёт 2 варианта в произведение; но в итоге вариант, отвечающий пустой группе, нужно отбросить). Докажем, что во всех этих способах получаются разные суммы.

Действительно, пусть мы нашли две различные возможные вторые группы, суммы которых совпадают:

$$2^{x_1}+2^{x_2}+\ldots+2^{x_m}=2^{y_1}+2^{y_2}+\ldots+2^{y_n}.$$

Упорядочим степени и в левой, и в правой части по убыванию. Сократив одинаковые степени двойки, получим равенство вида

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_r}=2^{b_1}+2^{b_2}+\ldots+2^{b_s},$$

все степени двойки в котором различны. (С каждой стороны должно остаться положительное число, иначе изначальные наборы степеней совпадали.) Без ограничения общности, пусть $a_1>b_1$. Тогда

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_r}\geqslant 2^{a_1}>2^{a_1}-1=2^{a_1-1}+2^{a_1-2}+\ldots+2+1\geqslant 2^{b_1}+2^{b_2}+\ldots+2^{b_s},$$

противоречие.

Следовательно, все $2^{99}-1$ способов дают вторые группы с разными суммами; тогда и соответствующие разности будут различными. $\square$

Замечание. Утверждение о том, что разные способы выбрать группу не могут давать одинаковые суммы, можно также получить из того, что каждое натуральное число единственным образом представляется в виде суммы различных степеней двойки (т. е. что двоичная запись числа существует и единственна).

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+1 б. Приведён верный ответ.

+1 б. Доказано, что все разности Влада нечётны.

Утверждение о единственности двоичной записи (о том, что у каждого числа существует единственное представление в виде суммы степеней двойки) считается общеизвестным; за его использование без доказательства баллы не снимаются, за доказательство баллы не начисляются.

Задача 8.5. На катетах AB и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle PMQ = 90^\circ$, где точка M — середина гипотенузы BC. Найдите длину отрезка PQ, если известно, что $BP = 5$ и $CQ = 12$.

Ответ: 13.

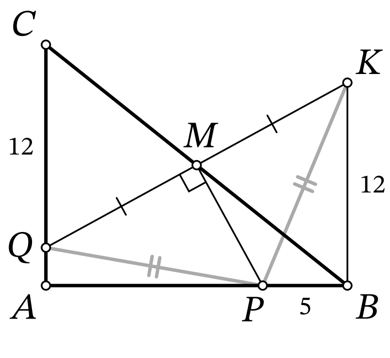


Рис. 2: к решению задачи 8.5

Решение. Рассмотрим на луче QM точку K такую, что $KM = MQ$ (рис. 2). Так как диагонали четырёхугольника $CQBK$ пересекаются в своих серединах, это параллелограмм; отсюда получаем, что $BK = CQ = 12$ и $BK \parallel AC$. Это означает, что треугольник PBK является прямоугольным, поэтому по теореме Пифагора имеем

$$PK = \sqrt{BP^2 + BK^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

С другой стороны, в треугольнике QPK отрезок PM является медианой и высотой, поэтому он является равнобедренным, и $PQ = PK = 13$. $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

1 б. Рассмотрена точка K из решения (или аналогичная ей точка, симметричная P относительно M), но дальнейших продвижений нет.

0 б. Приведён только ответ.

9 класс

Задача 9.1. Республика Тропико состоит из нескольких островов, между которыми нет ни одного моста. Новый президент Тропико решил каждую пару островов соединить одним мостом. За время своего правления он не успел построить лишь несколько мостов, выходящих из острова Дальний (все остальные мосты были построены). Известно, что всего было построено 49 мостов. Сколько построили мостов, выходящих из острова Дальний?

Ответ: 4.

Решение. Пусть всего островов $N+1$. Тогда всего мостов по плану президента должно быть $N \cdot (N+1) \,/\, 2$. Отсюда

$$49 < \frac{N \cdot (N+1)}{2}.$$

С другой стороны, если отбросить остров Дальний, все остальные острова соединяются $(N-1) \cdot N \,/\, 2$ мостами — и все эти мосты уже построены. Получаем

$$49 \geqslant \frac{(N-1) \cdot N}{2}.$$

Выпишем ряд чисел:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{N \cdot (N+1)}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Из $45 \leqslant 49 < 55$ получаем, что островов всего $N = 10$, то есть 45 мостов не имеют отношения к острову Дальний. Значит, оставшиеся 4 построенных моста выходят с острова Дальний. $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения следующие критерии *суммируются:*

+3 б. Доказано, что островов не менее 11.

+3 б. Доказано, что островов не более 11.

В отсутствие предыдущих продвижений применяются следующие критерии:

1 б. Приведён только пример, в котором из острова Дальний выходит 4 моста.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 9.2. Найдите все тройки действительных чисел (a, b, c), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} a+b = b^2+c^2+2bc, \\ b+c = c^2+a^2+2ac, \\ c+a = a^2+b^2+2ab. \end{cases}$$

Ответ: $(0,0,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Решение. После выделения полных квадратов в правых частях и замены $a+b = z$, $b+c = x$, $c+a = y$ уравнения переписываются в следующем виде:

$$z = x^2, \qquad x = y^2, \qquad y = z^2. \tag{*}$$

Получаем $x = y^2 = z^4 = x^8$. Отсюда, во-первых, $x \geqslant 0$, а во вторых, $x = 0$ или $x = 1$. (Действительно, при $0 < x < 1$ мы бы получили $x > x^8$, а при $x > 1$ — наоборот, $x < x^8$.) Аналогичные выводы можно сделать про переменные y и z. Более того, из равенств (*) ясно, что либо все переменные x, y, z одновременно принимают значение 0, либо одновременно 1.

Выразим исходные переменные через x, y, z:

$$a = \frac{y+z-x}{2}, \qquad b = \frac{z+x-y}{2}, \qquad c = \frac{x+y-z}{2}.$$

Получаем при $x = y = z = 0$ тройку $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, а при $x = y = z = 1$ тройку $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+1 б. В правых частях выделены полные квадраты.

+4 б. Доказано, что какое-то из чисел $a+b, b+c, c+a$ равно 0 или 1.

+1 б. Доказано, что числа $a+b, b+c, c+a$ либо все равны 0, либо все равны 1.

+1 б. В ответе приведены только подходящие тройки.

Задача 9.3. Пусть a, b, c и d — наименьшие различные натуральные делители натурального числа n. Оказалось, что $a^2+b^2+c^2+d^2+100 = n$. Какие значения может принимать n?

Ответ: 230.

Решение. Будем считать $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Очевидно, что $a = 1$.

Во-первых, заметим, что n не может быть нечётным числом, так как в этом случае все его делители были бы тоже нечётными, и сумма в левой части равенства оказалась бы чётной. Следовательно, n чётно, откуда $b = 2$.

Среди чисел c и d ровно одно должно быть нечётным, так как иначе чётность равенства снова нарушится. С другой стороны, можно понять, что n не делится на 4. Действительно, в левой части равенства два нечётных квадрата, которые всегда дают остатки 1 от деления на 4, и чётные слагаемые, все кратные 4; значит, n должно давать остаток 2 от деления на 4.

Получаем, что одно из чисел c и d — это следующий нечётный делитель (после 1) числа n, то есть некоторое нечётное простое p; а другое — это следующий чётный делитель (после 2), причём не равный 4, то есть это $2p$. Имеем:

$$1^2 + 2^2 + p^2 + (2p)^2 + 100 = n \quad \Rightarrow \quad 105 + 5p^2 = n.$$

С одной стороны, так как n делится на p, то и 105 делится на p, а из разложения $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ получаем $p \in \{3, 5, 7\}$. С другой, левая часть делится на 5, то есть и n делится на 5, что даёт $p \leqslant 5$ (это наименьший нечётный простой делитель n).

Случай $p = 3$ не подойдёт, так как $2p = 6 > 5$ уже не будет четвёртым по величине делителем. Осталось подставить $p = 5$. Имеем $105 + 5 \cdot 5^2 = 230$, что, как нетрудно проверить, подходит. $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+1 б. Доказано, что n чётно.

+3 б. Доказано, что n не может делиться на 4.

+3 б. Верно рассмотрен случай, когда данные четыре делителя равны 1, 2, p, $2p$ (для некоторого нечётного простого p).

Если этот случай не рассмотрен или рассмотрен неверно, вместо него применяется следующий критерий:

+1 б. Приведён верный ответ.

Задача 9.4. Точка M — середина стороны CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Оказалось, что $\angle BAM = \angle MAD$, $\angle ABC = \angle BCM + \angle MDA$. Найдите угол CBD.

Ответ: 90°.

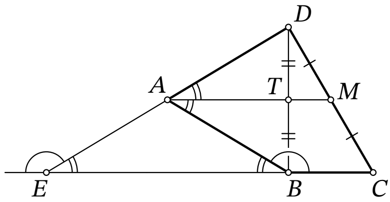


Рис. 3: к решению задачи 9.4

Решение. Продлим лучи CB и DA до пересечения в точке E (так как $\angle BCM + \angle MDA < 180°$, то эти лучи пересекутся). Тогда внешний угол при вершине E треугольника CDE равен $\angle BCM + \angle MDA = \angle ABC$, откуда следует, что треугольник BAE равнобедренный (рис. 3).

Так как луч AM делит внешний угол A этого треугольника пополам, то он параллелен его основанию BE (т. к. $\angle BAM = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}(\angle BEA + \angle ABE) = \angle ABE$).

Проведём отрезок BD и обозначим его пересечение с AM через T. По теореме Фалеса имеем $1 : 1 = DM : MC = DT : TB$, то есть T — середина отрезка BD. Следовательно, в треугольнике DAB медиана является биссектрисой, а значит и высотой. Имеем $AT \perp BD$, откуда из параллельности получаем $BC \perp BD$. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения применяется следующий критерий:

0 б. Приведён только ответ.

Задача 9.5. В компании 50 детей, некоторые из них дружат (дружба взаимна). Известно, что любую группу из 10 детей можно разбить на 5 пар так, чтобы в каждой паре дети дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей в этой компании.

Ответ: 1025.

Решение. Заметим, что каждый ребёнок не дружит максимум с 8 другими детьми. Действительно, если бы какой-то ребёнок не дружил бы хотя бы с 9 детьми, то можно было бы взять группу из него и 9 детей, с которыми он не дружит. Понятно, что эту группу нельзя разбить на 5 пар друзей. Таким образом, у каждого ребёнка не менее 41 друга, поэтому общее количество пар друзей не менее $41 \cdot 50 \,/\, 2 = 1025$.

Приведём пример, когда пар друзей ровно 1025, т. е. у каждого ребёнка ровно 41 друг. Для этого поставим всех детей по кругу и скажем, что каждый ребёнок дружит со всеми, кроме 4 детей слева и 4 детей справа от него (т. е. не дружит только с людьми, располагающимися на расстоянии не больше 4 от него). Докажем, что такой пример удовлетворяет условию задачи. Действительно, пусть мы выбрали 10 каких-то детей. Пронумеруем их числами от 1 до 10 по часовой стрелке, начиная с какого-то из них. Заметим, что ребёнок с номером 1 дружит с ребёнком с номером 6, так как в исходном круге ребёнок с номером 6 располагается на расстоянии больше 4 от ребёнка под номером 1. Таким образом, пара 1–6 является друзьями. Аналогично, пары 2–7, 3–8, 4–9 и 5–10 также являются друзьями. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+3 б. Доказано, что пар друзей не менее 1025.

+4 б. Приведён обоснованный пример с 1025 парами друзей.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

10 класс

Задача 10.1. Найдите все пары рациональных чисел a и b таких, что число $a + b\sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^2 + bx + a = 0$.

Ответ: $(0; 0), (-1; 0), (-1/7; 2/7)$.

Решение. Подставим число $a + b\sqrt{2}$ вместо x в уравнение. Получим

$$a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 + ab + b^2\sqrt{2} + a = 0.$$

Так как числа a и b рациональны, то и $a^2 + 2b^2 + ab + a$ рационально. С другой стороны, число $\sqrt{2}(2ab + b^2)$ может быть рационально, только если $2ab + b^2 = 0$. Значит, либо $b = 0$, либо $b = -2a$.

В первом случае получаем уравнение $a^2 + a = 0$, откуда либо $a = 0$, либо $a = -1$. В этом случае решениями являются пары $(0; 0)$ и $(-1; 0)$.

Во втором случае получаем уравнение $a^2 + 8a^2 - 2a^2 + a = 0$, откуда $a = 0$ или $a = -\frac{1}{7}$. В этом случае получаем решения $(0; 0)$ и $(-\frac{1}{7}; \frac{2}{7})$.

Объединяя все случаи, получаем решения $(0; 0), (-1; 0), (-1/7; 2/7)$. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения применяются следующие критерии:

- 5 б. Задача в целом решена верно, но «потеряна» 1 подходящая пара.
- 2 б. Приведено не более 2 подходящих пар, и дальнейших продвижений нет.

Задача 10.2. Натуральное число умножили на 3. Могла ли от этого его сумма цифр уменьшиться в 3 раза?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим, например, число 6669. Заметим, что сумма его цифр равна 27, а сумма цифр числа $6669 \cdot 3 = 20007$ равна 9, поэтому сумма цифр при умножении на 3 действительно уменьшилась в 3 раза. □

Замечание. Пользуясь признаками делимости на 3 и 9, несложно убедиться, что подходящее число должно делиться на 9, причём его сумма цифр должна быть не меньше 27. Кроме 6669 существуют и другие подходящие числа: например, 36675 или 33333336.

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

6 б. Приведён пример подходящего числа без обоснования.

0 б. Не приведён пример подходящего числа.

Задача 10.3. Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AB = BC = 13$, $CD = 7$, $AD = 17$, $\angle D = 90°$. Из вершины B на сторону AD опустили высоту BH. Найдите длину отрезка HD.

Ответ: 12.

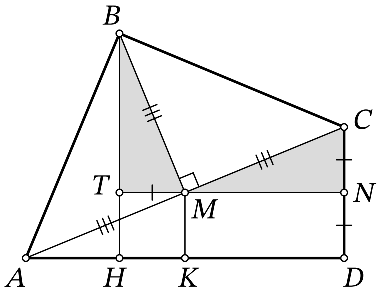


Рис. 4: к решению задачи 10.3

Решение. Вычислим длину отрезка AC как гипотенузы в прямоугольном треугольнике ADC:

$$AC^2 = 7^2 + 17^2 = 338.$$

Можно заметить, что $AC = 13\sqrt{2}$. Это означает, что ABC — прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами, равными 13.

Обозначим середины отрезков AC, AD и CD через M, K и N соответственно (рис. 4). Прямая MN содержит среднюю линию треугольника ACD, то есть параллельна AD и перпендикулярна BH; пересечение MN с BH обозначим через T.

Прямоугольные треугольники BMT и MCN равны ($BM = MC$ как медиана в прямоугольном треугольнике ABC, углы BMT и CMN дополняют друг друга до $90°$). Отсюда следует $\frac{7}{2} = CN = MT$. Кроме того, $MK \parallel CD \perp AD$, так что $HK = MT$. Получаем $HD = HK + DK = CN + DK = \frac{7}{2} + \frac{17}{2} = 12$. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения применяются следующие критерии:

5 б. Задача в целом решена верно, но приведён лишний ответ.

2 б. Замечено, что ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 10.4. В компании 50 детей, некоторые из них дружат (дружба взаимна). Известно, что любую группу из 10 детей можно разбить на 5 пар так, чтобы в каждой паре дети дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей в этой компании.

Ответ: 1025.

Решение. Заметим, что каждый ребёнок не дружит максимум с 8 другими детьми. Действительно, если бы какой-то ребёнок не дружил бы хотя бы с 9 детьми, то можно было бы взять группу из него и 9 детей, с которыми он не дружит. Понятно, что эту группу нельзя разбить на 5 пар друзей. Таким образом, у каждого ребёнка не менее 41 друга, поэтому общее количество пар друзей не менее $41 \cdot 50 / 2 = 1025$.

Приведём пример, когда пар друзей ровно 1025, т. е. у каждого ребёнка ровно 41 друг. Для этого поставим всех детей по кругу и скажем, что каждый ребёнок дружит со всеми, кроме 4 детей слева и 4 детей справа от него (т. е. не дружит только с людьми, располагающимися на расстоянии не больше 4 от него). Докажем, что такой пример удовлетворяет условию задачи. Действительно, пусть мы выбрали 10 каких-то детей. Пронумеруем их числами от 1 до 10 по часовой стрелке, начиная с какого-то из них. Заметим, что ребёнок с номером 1 дружит с ребёнком с номером 6, так как в исходном круге ребёнок с номером 6 располагается на расстоянии больше 4 от ребёнка под номером 1. Таким образом, пара 1–6 является друзьями. Аналогично, пары 2–7, 3–8, 4–9 и 5–10 также являются друзьями. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+3 б. Доказано, что пар друзей не менее 1025.

+4 б. Приведён обоснованный пример с 1025 парами друзей.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

Задача 10.5. Сумма нескольких (не обязательно различных) действительных чисел из отрезка $[0, 1]$ не превышает S. Найдите наибольшее действительное значение S, при котором эти числа гарантированно можно разделить на две группы, сумма чисел в одной из которых не больше 8, а сумма чисел в другой не больше 4.

Ответ: 11,2.

Решение. Из условия очевидно следует, что $S \leqslant 8+4=12$. Сначала докажем, что при любом $S > 11{,}2$ можно подобрать такой набор чисел, чтобы их нельзя было разделить на две группы указанным образом. Пусть x — такое число, что $S = 11{,}2+14x$. Так как $11{,}2 < S \leqslant 12$, то $0 < x < 0{,}1$. Возьмём 14 одинаковых чисел, каждое из которых равно $0{,}8+x$, все они принадлежат отрезку $[0,1]$. Тогда в группу с суммой не больше 4 можно взять не более 4 таких чисел, а в группу с суммой не больше 8 можно взять не более 9 таких чисел. Таким образом, хотя бы одно число останется не взятым.

Теперь докажем, что при $S \leqslant 11{,}2$ всегда можно будет разбить числа требуемым образом. Для этого будем «складывать» числа во вторую группу по одному (следя за тем, чтобы сумма там не превосходила 4). Предположим, что мы положили туда несколько чисел так, что их сумма хотя бы 3,2. Тогда оставшаяся сумма не больше 8, а значит, все оставшиеся числа можно отнести к первой группе.

Предположим теперь, что сумма «сложенных» во вторую группу чисел меньше 3,2, причём ни одно из оставшихся чисел туда «положить» нельзя. Это значит, что все оставшиеся числа больше 0,8. При этом их, очевидно, не меньше 4, так как все они не больше 1 и их сумма больше 8. Но тогда можно взять такие 4 числа в качестве второй группы (убрав из второй группы все ранее сложенные туда числа). Их сумма больше 3,2, но не больше 4 (т. к. каждое из них больше 0,8, но меньше 1). Тогда все остальные числа можно взять в качестве первой группы. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+3 б. Доказано, что при $S > 11{,}2$ существует набор чисел, которые невозможно разделить на две группы указанным образом.

+4 б. Доказано, что при $S \leqslant 11{,}2$ любой набор чисел всегда возможно разделить на две группы указанным образом.

11 класс

Задача 11.1. На доске написаны 100 различных натуральных чисел. Петя записал в тетрадку красным цветом все их попарные суммы, а синим цветом — все их попарные произведения. Может ли оказаться так, что для каждого красного числа найдётся делящееся на него синее? (Допускается, что одно и то же синее число может делиться на разные красные числа.)

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим числа $200! \cdot 1, 200! \cdot 2, 200! \cdot 3, \ldots, 200! \cdot 100$. Сумма любой пары таких чисел имеет вид $200! \cdot t$, где $3 \leqslant t \leqslant 199$, в то время как их произведение имеет вид $(200!)^2 \cdot s$, где s — какое-то натуральное число. Так как $200!$ делится на все возможные значения t, то в выбранной паре произведение чисел делится на их же сумму. □

Другое решение. Рассмотрим произвольный набор из 100 различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел вычислим их сумму, и все такие суммы перемножим. Результат обозначим через P. Тогда если умножить каждое из исходных чисел на P, то полученный набор будет подходящим. Действительно, рассмотрим произвольные два числа Pa и Pb из полученного набора, где a и b — соответствующие числа исходного набора. Сумма этих чисел равна $P(a+b)$, а произведение равно P^2ab. Так как P делится на $a+b$ (как и на все другие попарные суммы чисел исходного набора), мы получаем, что произведение любых двух чисел делится на их сумму. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения применяются следующие критерии:

- 6 б. Представлен верный пример, но во в целом верном обосновании присутствуют неточности.
- 5 б. Представлен верный пример, но в его обосновании присутствуют существенные ошибки.
- 4 б. Приведён верный пример без обоснования.
- 2 б. В решении присутствует идея умножения набора чисел на один и тот же множитель при неверном примере или его отсутствии.
- 0 б. Приведено только утверждение о том, что искомый набор чисел существует.

Задача 11.2. На прямой выбрано несколько отрезков так, что все их концы различны. Докажите, что на этой прямой можно отметить несколько точек так, чтобы на каждом отрезке было отмечено нечётное количество отмеченных точек.

Решение. Пусть отрезков всего N. Пронумеруем их числами от 1 до N слева направо, по порядку их правых концов (так, например, у 1-го отрезка самый левый правый конец, а у N-го — самый правый правый конец).

Рассмотрим 1-й отрезок и отметим его правый конец. Затем перейдём ко 2-му отрезку: отметим его правый конец, если он не содержит ранее отмеченную точку, и не будем отмечать, если содержит ранее отмеченную точку.

Будем и дальше рассматривать отрезки по порядку. Когда мы переходим к k-му отрезку, на каждом из предыдущих отрезков уже отмечено нечётное количество точек. Если на k-м отрезке уже отмечено нечётное количество точек, то дополнительно на нём ничего не будем отмечать, а если чётное — отметим его правый конец. Заметим, что все отрезки с 1-го по $(k-1)$-й не содержат правый конец k-го отрезка, поэтому после нашего действия все отрезки с 1-го по k-й будут содержать нечётное количество отмеченных точек.

Рассмотрев последовательно все N отрезков, получим, что все отрезки с 1-го по N-й будут содержать нечётное количество точек.

Замечание. Также решение можно было оформить с помощью математической индукции по количеству отрезков. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+1 б. Приведена обоснованная нумерация отрезков.

+2 б. Приведен алгоритм проставления точек.

В случае использования метода математической индукции применяются следующие критерии:

6 б. Во в целом верном решении отсутствует база индукции.

4 б. Во в целом верном решении неверно доказан переход индукции.

Комментарий:

2 б. Приведено доказательство для частного случая расположения отрезков.

Задача 11.3. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с действительными коэффициентами имеют степень 10. Известно, что для любого действительного x верно

$$P(x) \cdot Q(x) \geqslant |P(x)|.$$

Какое наибольшее количество различных корней может быть у многочлена $P(x) \cdot Q(x)$?

Ответ: 5.

Решение. Заметим, что следствием из данного неравенства является

$$|P(x)| \cdot |Q(x)| \geqslant |P(x)|,$$

что при всех x, таких что $P(x) \neq 0$, означает $|Q(x)| \geqslant 1$. В частности, у многочлена $Q(x)$ нет корней, отличных от корней многочлена $P(x)$. Следовательно, множество корней многочлена $P(x) \cdot Q(x)$ совпадает с множеством корней многочлена $P(x)$.

Из неравенства $|Q(x)| \geqslant 1$, справедливого при всех x за исключением конечного множества, и из непрерывности функции $Q(x)$ следует, что либо для всех действительных x верно $Q(x) \geqslant 1$, либо для всех действительных x верно $Q(x) \leqslant -1$.

Чтобы это строго доказать, предположим, что $Q(x)$ принимает значения и из $[1; +\infty)$, и из $(-\infty; -1]$. Тогда, так как непрерывная функция принимает все промежуточные значения, $Q(x)$ должен принимать и бесконечное количество разных значений в промежутке $(-1; 1)$. Но такие значения он может принимать только в таких точках x, что $P(x) = 0$; а корней у многочлена $P(x)$ конечное количество. Аналогично доказывается, что $Q(x)$ не может принимать никакие значения из $(-1; 1)$.

Будем считать, что $Q(x) \geqslant 1$ (случай $Q(x) \leqslant -1$ можно свести к рассматриваемому, умножив оба многочлена на -1). Тогда $P(x) \cdot Q(x) \geqslant |P(x)| \geqslant 0$, откуда получаем $P(x) \geqslant 0$ при всех действительных x. Это означает, что у $P(x)$ не может быть корней кратности 1, ведь иначе в окрестности любого из таких корней многочлен принимал бы значения разных знаков. Значит, каждый корень многочлена $P(x)$ имеет кратность не менее 2; а так как сумма кратностей корней не превосходит степень многочлена, корней у $P(x)$ не более 5.

В качестве примера подойдёт любой многочлен $P(x)$ с 5 корнями кратности 2, принимающий неотрицательные значения, и любой многочлен $Q(x)$, принимающий значения из $[1; +\infty)$, например,

$$P(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2(x-4)^2(x-5)^2, \quad Q(x) = x^{10} + 1. \qquad \square$$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+1 б. Доказано, что $|Q(x)| \geqslant 1$ из перехода к произведению модулей многочленов в неравенстве или полного верного раскрытия модулей в неравенстве.

+1 б. Доказано, что множество корней $Q(x)$ содержится в множестве корней $P(x)$.

+2 б. Из непрерывности функции $Q(x)$ доказано, что либо для всех действительных x верно $Q(x) \geqslant 1$, либо для всех действительных x верно $Q(x) \leqslant -1$.

+2 б. Доказано, что у $P(x)$ нет корней кратности 1.

+1 б. Приведён верный пример пары многочленов (в том числе без обоснования).

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

Задача 11.4. Дан параллелограмм $ABCD$ такой, что $\angle A = 60°$. Пусть P и Q — середины сторон BC и CD соответственно. Оказалось, что точки A, P, Q, D лежат на одной окружности. Найдите $\angle ADB$.

Ответ: 75°.

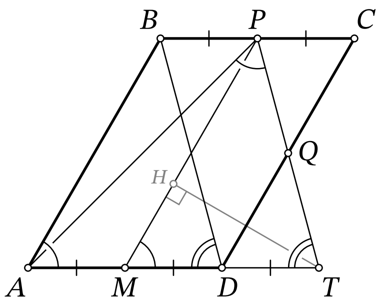


Рис. 5: к решению задачи 11.4

Решение. Пусть M — середина стороны AD. Продлим луч PQ до точки T такой, что $PQ = QT$ (рис. 5). Так как диагонали четырёхугольника $PCTD$ пересекаются в своих серединах, это параллелограмм; отсюда получаем, что точка T лежит на прямой AD и $DT = CP = DM = AM$. Отметим, что $DBPT$ — параллелограмм (DT равен и параллелен PB), поэтому искомый $\angle ADB = \angle ATP$.

С другой стороны, из вписанности $APQD$ имеем $\angle APQ = 180° - \angle ADQ = 60°$. Кроме того, PM — средняя линия $ABCD$, и параллельна сторонам AB и CD, откуда получаем $\angle PMT = 60°$.

Значит, треугольники ATP и PTM подобны по двум углам. Тогда $AT : PT = PT : MT$, то есть $PT^2 = AT \cdot MT$. Введём масштаб длин на чертеже так, чтобы отрезок AM имел длину 1; тогда $AT = 3$ и $MT = 2$, а $PT = \sqrt{6}$.

Мы знаем один из углов треугольника MPT и две его стороны; теперь можно воспользоваться любым из известных методов, чтобы вычислить остальные его элементы (включая искомый угол ATP). Например, опустим высоту TH на прямую MP. Так как $TP > TM$, отрезки TP и TM окажутся по разные стороны от прямой TH. В прямоугольном треугольнике MTH гипотенуза равна 2, а угол напротив катета TH равен 60°, то есть сам катет равен $\sqrt{3}$. Теперь ясно, что прямоугольный треугольник THP равнобедренный, так как отношение гипотенузы к катету в нём равно $\sqrt{2}$. Получаем $\angle ATP = 30° + 45° = 75°$.

Замечание. Также задачу можно было решить, не отмечая точку M, а использовав равенство произведений отрезков секущих $TD \cdot TA = TQ \cdot TP$. Из этого равенства легко вывести, что $BD : AD = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Затем в треугольнике ABD (который равен треугольнику MPT из прошлого решения) можно либо воспользоваться теоремой синусов, либо опустить высоту из точки D и понять, что она отсекает равнобедренный прямоугольный треугольник. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+1 б. Верно найден $\angle APT$.

+2 б. Доказано, что треугольники APT и PMT подобны.

+2 б. Верно получено уравнение: $PT^2 = AT \cdot MT$, либо доказано, что $BD = \sqrt{6} \cdot AM$ или $BD : AD = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

+2 б. Получен верный обоснованный ответ.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

Задача 11.5. У Пети есть n карточек с n последовательными натуральными числами (на каждой карточке написано ровно одно число). Он выложил эти карточки в ряд в некотором порядке.

У каждых двух чисел на соседних карточках Петя нашёл наибольший общий делитель. При каком наибольшем n все эти наибольшие общие делители могут оказаться различными числами?

Ответ: 5.

Решение. Покажем, как построить ряд с пятью числами. Для этого возьмём числа от 36 до 40:

$$39,\ 36,\ 40,\ 38,\ 37.$$

В этой цепочке НОД первых двух чисел равен 3, второго и третьего — 4, третьего и четвёртого — 2, четвёртого и пятого — 1.

Докажем, что более длинной цепочки мы получить не сможем. Обозначим наименьшее из этих чисел через x, тогда остальные будут равны $x+1$, $x+2$, $\ldots$, $x+n-1$. Заметим, что НОД двух чисел не превосходит их разности, а разности чисел принимают значения от 1 до $n-1$. Между соседними числами в цепочке как раз $n-1$ попарная разность. Так как они все должны оказаться различными, то у нас должны встретиться все разности от 1 до $n-1$ по одному разу. При этом НОДы в соответствующих парах должны совпадать с разностями, а это значит, что в каждой паре оба числа должны делиться на разность между ними. В частности, это означает, что чётные разности могут быть только между чётными числами.

Докажем, что все чётные числа в этой цепочке должны стоять подряд. Разберём случаи чётного и нечётного n.

1. Пусть n чётно, т. е. $n = 2k$. Тогда среди всех возможных разностей (т. е. чисел от 1 до $2k - 1$) есть $k - 1$ чётное число. А среди наших $2k$ чисел есть ровно k чётных. Ясно, что k чётных чисел образуют не более $k - 1$ соседних пар, причём ровно $k - 1$ соседних пар может быть только в том случае, когда все чётные числа стоят подряд.

2. Пусть n нечётно, т. е. $n = 2k + 1$. Тогда среди разностей есть k чётных чисел. А среди самих чисел чётных либо k, либо $k + 1$. Ясно, что чётных чисел в этом случае должно быть $k+1$, причём они должны идти подряд, чтобы между ними было ровно k соседних пар.

Теперь заметим, что нечётные разности могут быть только между чётным и нечётным числом. Но в нашей цепочке есть только два возможных для этого места: до и после блока из всех чётных чисел. Значит, нечётных разностей не больше 2. Если $n > 5$, то $n - 1 \geqslant 5$, и нечётных разностей должно встретиться хотя бы 3, противоречие. Значит, $n \leqslant 5$. $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+1 б. Показано, что наибольший общий делитель двух чисел не превосходит их разности.

+1 б. Показано, что наибольший общий делитель в парах чисел должен совпадать с разностями чисел.

+2 б. Доказано, что не может идти два подряд нечетных числа.

+2 б. Доказано, что все четные числа в последовательности сгруппированы.

+1 б. Приведён верный пример.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

Задача 11.6. Таблица 101×101 покрашена в несколько цветов (каждая клетка — ровно в один цвет) так, что в любом квадрате 2×2 присутствуют клетки не более чем трёх различных цветов. Какое наибольшее количество цветов могло быть использовано?

Ответ: 5201.

Решение. Приведём пример, в котором использован 5201 цвет. Для этого рассмотрим все возможные вертикальные полоски. В первой из них покрасим все клетки в различные цвета. Во второй — в один и тот же новый цвет. В третьей — снова все клетки в новые различные цвета, потом снова в один новый цвет и так далее. При этом клеток в полосках с нечётным номером всего $51 \cdot 101 = 5151$, а полосок с чётным номером ровно 50, поэтому различных цветов ровно 5201. Также понятно, что в любом квадрате 2×2 встретятся две клетки из вертикальной полоски с чётным номером. Значит, они будут одинакового цвета, т. е. цветов в каждом квадрате 2×2 будет не больше 3 (на самом деле, ровно 3).

Теперь докажем, что больше 5201 цвета использовано быть не может. Сначала заметим, что в квадрате 101×101 клеток всего $101^2 = 10201$. Кроме того, существует ровно $100^2 = 10\,000$ квадратов 2×2, которые накладывают условие на цвета. Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть k_i — количество клеток некоторого цвета i. Тогда существует не более $2(k_i - 1)$ квадратов 2×2, в которых клеток этого цвета хотя бы 2.

Доказательство. Заметим, что каждая клетка этого цвета входит ровно в 4 квадрата 2×2 (какие-то из которых, возможно, выходят за границы доски). Посмотрим на самый нижний горизонтальный ряд клеток этого цвета. Выберем из них самую левую. Понятно, что квадрат, в котором эта клетка является правой верхней, не может больше содержать клеток этого цвета. Аналогично для самой правой клетки нижнего ряда (которая, вообще говоря, может совпадать с самой левой клеткой этого ряда) квадрат, в котором она является левой верхней, не может больше содержать клеток этого цвета. Такие же рассуждения можно провести с самым верхним горизонтальным рядом (который, опять же, может совпадать с самым нижним). Таким образом, есть хотя бы 4 квадрата 2×2, в которых присутствует только одна клетка цвета i.

Рассмотрим теперь все квадраты 2×2, содержащие клетки цвета i: квадраты с хотя бы 2 клетками этого цвета, а также хотя бы 4 квадрата с 1 клеткой этого цвета (некоторые из квадратов, возможно, выходят за границы таблицы). Суммарно в них $4k_i$ клеток цвета i (ведь каждая из этих клеток содержится ровно в 4 квадратах). Следовательно, квадратов, содержащих хотя бы 2 клетки этого цвета, не более $\frac{4k_i - 4}{2} = 2(k_i - 1)$. Лемма доказана.

Теперь сделаем оценку на количество цветов. Пусть их количество равно C. Так как в итоге для каждого квадрата 2×2 должен найтись цвет, клеток которого в нём хотя бы 2, то

$$\sum_{i=1}^{C} 2(k_i - 1) \geqslant 100^2.$$

С другой стороны,
$$\sum_{k=i}^{C} k_i = 101^2.$$
Отсюда имеем
$$\sum_{i=1}^{C} 2(k_i - 1) = 2 \cdot 101^2 - 2C \geqslant 100^2,$$
откуда
$$C \leqslant 101^2 - \frac{100^2}{2} = 5201. \qquad \square$$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+5 б. Доказано, что цветов не более 5201.

+2 б. Приведён верный пример на 5201 цветов.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

Комментарий:

1 б. В решении приведен верный пример раскраски без расчета численного ответа.