Курчатов-2023. Математика.

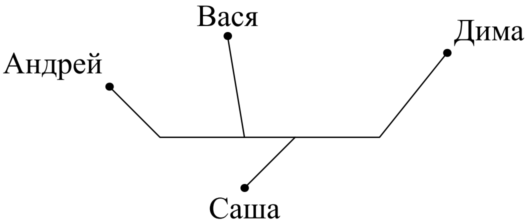
Первый тур. Условия, варианты и решения задач

зима

Содержание

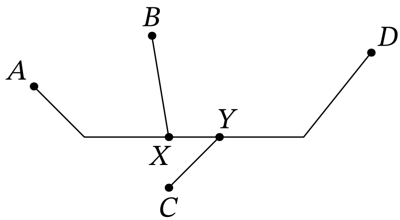
6-7 классы

Задача 6.1.1. На рисунке изображена схема дорог между домами четырёх друзей: Андрея, Васи, Саши и Димы. Известно, что кратчайший путь между домами Андрея и Димы составляет 17 км, кратчайший путь между домами Андрея и Саши — 15 км, кратчайший путь между домами Васи и Димы — 11 км. Сколько километров составляет длина кратчайшего пути между домами Васи и Саши?



Ответ: 9.

Решение. Пусть дом Андрея — точка A, дом Васи — точка B, дом Саши — точка C, дом Димы — точка D. Кроме этого, отметим промежуточные точки X и Y, как показано на рисунке.



По условию задачи путь между домами Андрея и Димы составляет 17 км, поэтому

$$AX + XY + YD = 17.$$

Путь между домами Андрея и Саши — 15 км:

$$AX + XY + YC = 15.$$

Путь между домами Васи и Димы — 11 км:

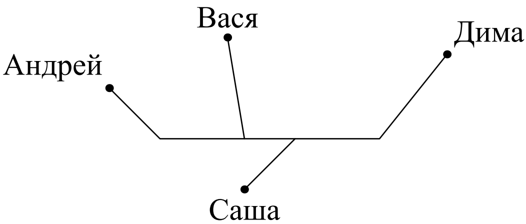
$$BX + XY + YD = 11.$$

Мы хотим посчитать длину пути между домами Васи и Саши, то есть $BX + XY + YC$. Эту величину нетрудно выразить:

$$\begin{aligned} BX + XY + YC &= (AX + XY + YC) + (BX + XY + YD) - (AX + XY + YD) = \\ &= 11 + 15 - 17 = 9. \end{aligned}$$

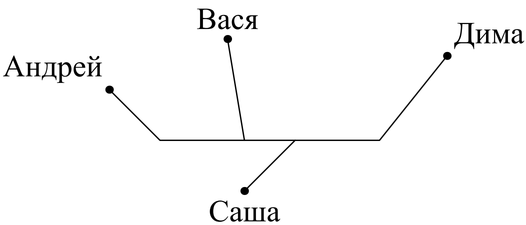
□

Вариант 6.1.2. На рисунке изображена схема дорог между домами четырёх друзей: Андрея, Васи, Саши и Димы. Известно, что кратчайший путь между домами Андрея и Димы составляет 17 км, кратчайший путь между домами Андрея и Саши — 16 км, кратчайший путь между домами Васи и Димы — 12 км. Сколько километров составляет длина кратчайшего пути между домами Васи и Саши?



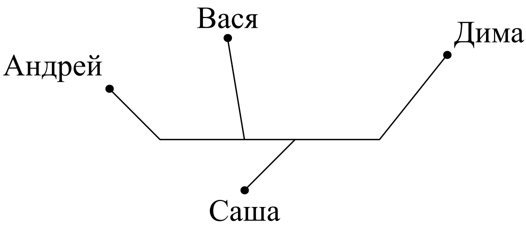
Ответ: 11.

Вариант 6.1.3. На рисунке изображена схема дорог между домами четырёх друзей: Андрея, Васи, Саши и Димы. Известно, что кратчайший путь между домами Андрея и Димы составляет 17 км, кратчайший путь между домами Андрея и Саши — 16 км, кратчайший путь между домами Васи и Димы — 13 км. Сколько километров составляет длина кратчайшего пути между домами Васи и Саши?



Ответ: 12.

Вариант 6.1.4. На рисунке изображена схема дорог между домами четырёх друзей: Андрея, Васи, Саши и Димы. Известно, что кратчайший путь между домами Андрея и Димы составляет 18 км, кратчайший путь между домами Андрея и Саши — 17 км, кратчайший путь между домами Васи и Димы — 14 км. Сколько километров составляет длина кратчайшего пути между домами Васи и Саши?



Ответ: 13.

Задача 6.2.1. Поезд ехал из пункта A в пункт B, проезжая по пути пункт C. Оказалось, что поезд потратил на дорогу из пункта C в пункт B столько минут, сколько километров он проехал из пункта A в пункт C. А расстояние в метрах, которое проехал поезд из пункта C в пункт B, в 2250 раз больше количества минут, потраченных им на дорогу из пункта A в пункт C.

Найдите скорость поезда, если известно, что она была постоянной на протяжении всего пути. Ответ выразите в км/ч.

Ответ: 90.

Решение. Пусть расстояние между пунктами A и C равняется x километров, а между пунктами B и C — y километров (или $1000y$ метров). По условию задачи между пунктами B и C поезд ехал x минут, а между пунктами A и C — $1000y\ /\ 2250 = \frac{4}{9}y$ минут.

Так как у поезда постоянная скорость, мы можем приравнять её на первом и на втором промежутках (она будет измеряться в километрах в минуту):

$$\frac{x}{\frac{4}{9}y} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{9x}{4y} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4} = \frac{y^2}{x^2}.$$

Так как $\frac{y}{x}$ — скорость поезда (то есть положительное число), то $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ километра в минуту. Это равно 90 километрам в час. □

Вариант 6.2.2. Поезд ехал из пункта A в пункт B, проезжая по пути пункт C. Оказалось, что поезд потратил на дорогу из пункта C в пункт B столько минут, сколько километров он проехал из пункта A в пункт C. А расстояние в метрах, которое проехал поезд из пункта C в пункт B, в 1960 раз больше количества минут, потраченных им на дорогу из пункта A в пункт C.

Найдите скорость поезда, если известно, что она была постоянной на протяжении всего пути. Ответ выразите в км/ч.

Ответ: 84.

Вариант 6.2.3. Поезд ехал из пункта A в пункт B, проезжая по пути пункт C. Оказалось, что поезд потратил на дорогу из пункта C в пункт B столько минут, сколько километров он проехал из пункта A в пункт C. А расстояние в метрах, которое проехал поезд из пункта C в пункт B, в 2560 раз больше количества минут, потраченных им на дорогу из пункта A в пункт C.

Найдите скорость поезда, если известно, что она была постоянной на протяжении всего пути. Ответ выразите в км/ч.

Ответ: 96.

Вариант 6.2.4. Поезд ехал из пункта A в пункт B, проезжая по пути пункт C. Оказалось, что поезд потратил на дорогу из пункта C в пункт B столько минут, сколько километров он проехал из пункта A в пункт C. А расстояние в метрах, которое проехал поезд из пункта C в пункт B, в 2890 раз больше количества минут, потраченных им на дорогу из пункта A в пункт C.

Найдите скорость поезда, если известно, что она была постоянной на протяжении всего пути. Ответ выразите в км/ч.

Ответ: 102.

Задача 6.3.1. На столе лежат несколько карточек. На каждой из них написано натуральное число. Известно, что:

- суммарно на всех карточках выписано ровно 35 цифр;
- ни одно число на карточках не делится на 3;
- цифра 4 встречается ровно на 12 карточках;
- цифра 5 встречается ровно на 19 карточках.

Найдите наименьшее возможное количество карточек на столе.

Ответ: 27.

Решение. Заметим, что если на карточке написаны цифры 4 и 5, то на этой карточке должна быть написана ещё хотя бы одна цифра (иначе получается либо число 45, либо число 54, а оба этих числа делятся на 3).

Пусть ровно в x карточках используются одновременно и цифра 4, и цифра 5. Тогда суммарно в этих карточках используются хотя бы $3x$ цифр.

Ещё есть $12 - x$ карточек, на которых встречается цифра 4, но не встречается цифра 5. Суммарно в этих карточках используется хотя бы $12 - x$ цифр.

И есть $19 - x$ карточек, на которых встречается цифра 5, но не встречается цифра 4. Суммарно в этих карточках используется хотя бы $19 - x$ цифр.

Итого хотя бы $3x + 12 - x + 19 - x = 31 + x$ цифр используется на всех вышеупомянутых карточках; но всего цифр ровно 35. Получается неравенство $31 + x \leqslant 35$, то есть $x \leqslant 4$.

Заметим, что всего карточек хотя бы $x + 12 - x + 19 - x = 31 - x \geqslant 27$.

Осталось привести пример, в котором будет 27 карточек. Пусть

- на 8 карточках написана только цифра 4,
- на 15 карточках написана только цифра 5,
- на 4 карточках написано число 451. $\square$

Вариант 6.3.2. На столе лежат несколько карточек. На каждой из них написано натуральное число. Известно, что:

- суммарно на всех карточках выписано ровно 36 цифр;
- ни одно число на карточках не делится на 3;
- цифра 4 встречается ровно на 12 карточках;
- цифра 5 встречается ровно на 19 карточках.

Найдите наименьшее возможное количество карточек на столе.

Ответ: 26.

Вариант 6.3.3. На столе лежат несколько карточек. На каждой из них написано натуральное число. Известно, что:

- суммарно на всех карточках выписано ровно 36 цифр;
- ни одно число на карточках не делится на 3;
- цифра 4 встречается ровно на 13 карточках;
- цифра 5 встречается ровно на 19 карточках.

Найдите наименьшее возможное количество карточек на столе.

Ответ: 28.

Вариант 6.3.4. На столе лежат несколько карточек. На каждой из них написано натуральное число. Известно, что:

- суммарно на всех карточках выписано ровно 35 цифр;
- ни одно число на карточках не делится на 3;
- цифра 4 встречается ровно на 13 карточках;
- цифра 5 встречается ровно на 19 карточках.

Найдите наименьшее возможное количество карточек на столе.

Ответ: 29.

Задача 6.4.1. Вдоль аллеи растут 8 яблонь, на каждой из которых есть хотя бы одно яблоко. Будем называть два различных яблока *близкими,* если они находятся на одной яблоне или на двух соседних яблонях.

Оказалось, что для каждого яблока есть либо ровно 15, либо ровно 20 близких яблок. Сколько яблок может суммарно быть на всех яблонях? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 53, 58.

Решение. Пусть на первой яблоне растёт a_1 яблок, на второй — a_2 яблок, ..., на восьмой — a_8 яблок.

Рассмотрим любое яблоко на первой яблоне: к нему близки либо 15, либо 20 яблок, поэтому $a_1 + a_2$ равно либо 16, либо 21. Аналогично рассмотрим любое яблоко на второй яблоне: к нему близки либо 15, либо 20 яблок, поэтому $a_1 + a_2 + a_3$ равно либо 16, либо 21. Но нам известно, что $a_3 \geqslant 1$, поэтому $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, а $a_1 + a_2 = 16$. Аналогично можно получить, что $a_7 + a_8 = 16$, $a_6 + a_7 + a_8 = 21$.

Теперь осталось рассмотреть любое яблоко с четвёртой яблони. Если у него 15 близких, то $a_3 + a_4 + a_5 = 16$, а

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_6 + a_7 + a_8) = 16 + 16 + 21 = 53.$$

А если у него 20 близких, то $a_3 + a_4 + a_5 = 21$, а

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_6 + a_7 + a_8) = 16 + 21 + 21 = 58.$$

Первый случай возможен, например, если на яблонях находится 8, 8, 5, 3, 8, 5, 8, 8 яблок соответственно.

Второй случай возможен, например, если на яблонях находится 8, 8, 5, 8, 8, 5, 8, 8 яблок соответственно. □

Вариант 6.4.2. Вдоль аллеи растут 8 яблонь, на каждой из которых есть хотя бы одно яблоко. Будем называть два различных яблока *близкими,* если они находятся на одной яблоне или на двух соседних яблонях.

Оказалось, что для каждого яблока есть либо ровно 14, либо ровно 19 близких яблок. Сколько яблок может суммарно быть на всех яблонях? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 50, 55.

Вариант 6.4.3. Вдоль аллеи растут 8 яблонь, на каждой из которых есть хотя бы одно яблоко. Будем называть два различных яблока *близкими,* если они находятся на одной яблоне или на двух соседних яблонях.

Оказалось, что для каждого яблока есть либо ровно 17, либо ровно 22 близких яблока. Сколько яблок может суммарно быть на всех яблонях? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 59, 64.

Вариант 6.4.4. Вдоль аллеи растут 8 яблонь, на каждой из которых есть хотя бы одно яблоко. Будем называть два различных яблока *близкими,* если они находятся на одной яблоне или на двух соседних яблонях.

Оказалось, что для каждого яблока есть либо ровно 18, либо ровно 23 близких яблок. Сколько яблок может суммарно быть на всех яблонях? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 62, 67.

Задача 6.5.1. Вася записал в своей тетрадке числа $1, 2, 3, \ldots, 53$. Сколько существует способов выбрать 5 чисел из них так, чтобы при их записи использовались все цифры от 1 до 9 ровно по одному разу, а цифра 0 вообще не использовалась?

Ответ: 192.

Решение. При записи выбранных пяти чисел должны использоваться ровно 9 цифр. Это возможно только в случае, когда одно число однозначное, а четыре числа — двузначные.

Из чисел, выписанных Васей, исключим те, в которых есть цифра 0. В каждом двузначном числе из оставшихся есть хотя бы одна цифра от 1 до 4 (если число меньше 50, то в старшем разряде, иначе в младшем). Так как эти четыре цифры должны встретиться по одному разу, то в каждом из выбранных четырёх двузначных чисел одна цифра должна быть от 1 до 4, а другая — от 5 до 9. Выбранное однозначное число, соответственно, тоже должно быть от 5 до 9. Числа, не подходящие под эти условия, исключим.

Расположим оставшиеся числа в таблице так, чтобы столбец определял, какая цифра от 1 до 4 есть в числе (или её нет), а строка — какая цифра от 5 до 9:

5	15, 51	25, 52	35, 53	45
6	16	26	36	46
7	17	27	37	47
8	18	28	38	48
9	19	29	39	49

Нам нужно выбрать пять чисел из этой таблицы так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке было по одному выбранному числу — в этом и только в этом случае каждая цифра встретится по одному разу.

Из первой строки число можно выбрать 8 способами. Из второй строки — уже 4 способами, так как один столбец окажется занят, из третьей — 3 и т. д. Всего получается $8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 192$. □

Вариант 6.5.2. Вася записал в своей тетрадке числа $1, 2, 3, \ldots, 54$. Сколько существует способов выбрать 5 чисел из них так, чтобы при их записи использовались все цифры от 1 до 9 ровно по одному разу, а цифра 0 вообще не использовалась?

Ответ: 216.

Задача 6.6.1. Петя и Вася играют в «Морской бой» по новым правилам. Петя расположил одноклеточный корабль на поле 1×124. Вася не знает, где он расположен.

За один ход Вася «производит выстрел» — указывает на одну из клеток поля.

- Если Вася указывает на корабль, то Петя говорит «попал».
- Если Вася указывает на клетку, соседнюю с кораблём, то Петя говорит «почти попал».
- Если Вася указывает на клетку, расположенную через одну клетку от корабля, то Петя говорит «рядом».
- Если Вася указывает на клетку, расположенную хотя бы через две клетки от корабля, то Петя говорит «далеко».

За какое наименьшее количество ходов Вася сможет гарантированно попасть в корабль?

Ответ: 26.

Решение. Для начала покажем, как можно подбить корабль за 26 ходов.

Пронумеруем все клетки слева направо от 1 до 124. Первые 24 выстрела сделаем по клеткам с номерами $3, 8, 13, 18, \ldots, 118$.

Если корабль находится в одной из первых 120 клеток, то после одного из этих ходов Петя *не* скажет фразу «далеко». Тогда мы либо попадём в корабль, либо будем знать, в какой из двух клеток он находится. За следующие два хода мы сможем выстрелить в обе эти клетки.

Если корабль находится в одной из последних четырёх клеток, то первые 24 хода Петя всё время будет говорить фразу «далеко». Тогда выстрелим в клетку номер 124.

- Если Петя скажет «попал», то мы выиграли.
- Если Петя скажет «почти попал», то корабль находится в клетке номер 123.
- Если Петя скажет «рядом», то корабль находится в клетке номер 122.
- Если Петя скажет «далеко», то корабль находится в клетке номер 121.

Теперь можно будет «добить» корабль последним выстрелом.

Осталось доказать, что не существует алгоритма, как можно подбить корабль за 25 ходов. Предположим, что это не так и подобный алгоритм существует.

Будем называть клетку *проверенной*, если она находится на расстоянии не более 2 относительно любого сделанного хода. Таким образом, если бы в проверенной клетке находился корабль, то на соответствующем ходу мы бы услышали одну из трёх фразу: «попал», «почти попал» или «рядом».

Получается, что за один ход мы проверяем не более 5 клеток, а за первые 24 хода — не более 120 клеток. Если корабль будет спрятан в одной из четырёх клеток, оставшихся непроверенными после 24 ходов (то есть первые 24 хода мы будем слышать фразу «далеко»), то нам не хватит одного последнего хода, чтобы наверняка «добить» корабль. □

Вариант 6.6.2. Петя и Вася играют в «Морской бой» по новым правилам. Петя расположил одноклеточный корабль на поле 1×129. Вася не знает, где он расположен.

За один ход Вася «производит выстрел» — указывает на одну из клеток поля.

- Если Вася указывает на корабль, то Петя говорит «попал».
- Если Вася указывает на клетку, соседнюю с кораблём, то Петя говорит «почти попал».
- Если Вася указывает на клетку, расположенную через одну клетку от корабля, то Петя говорит «рядом».
- Если Вася указывает на клетку, расположенную хотя бы через две клетки от корабля, то Петя говорит «далеко».

За какое наименьшее количество ходов Вася сможет гарантированно попасть в корабль?

Ответ: 27.

Вариант 6.6.3. Петя и Вася играют в «Морской бой» по новым правилам. Петя расположил одноклеточный корабль на поле 1×134. Вася не знает, где он расположен.

За один ход Вася «производит выстрел» — указывает на одну из клеток поля.

- Если Вася указывает на корабль, то Петя говорит «попал».
- Если Вася указывает на клетку, соседнюю с кораблём, то Петя говорит «почти попал».
- Если Вася указывает на клетку, расположенную через одну клетку от корабля, то Петя говорит «рядом».
- Если Вася указывает на клетку, расположенную хотя бы через две клетки от корабля, то Петя говорит «далеко».

За какое наименьшее количество ходов Вася сможет гарантированно попасть в корабль?

Ответ: 28.

Вариант 6.6.4. Петя и Вася играют в «Морской бой» по новым правилам. Петя расположил одноклеточный корабль на поле 1×139. Вася не знает, где он расположен.

За один ход Вася «производит выстрел» — указывает на одну из клеток поля.

- Если Вася указывает на корабль, то Петя говорит «попал».
- Если Вася указывает на клетку, соседнюю с кораблём, то Петя говорит «почти попал».
- Если Вася указывает на клетку, расположенную через одну клетку от корабля, то Петя говорит «рядом».
- Если Вася указывает на клетку, расположенную хотя бы через две клетки от корабля, то Петя говорит «далеко».

За какое наименьшее количество ходов Вася сможет гарантированно попасть в корабль?

Ответ: 29.

8-9 классы

Задача 8.1.1. Артём написал на доске шестизначное натуральное число, первая цифра которого не равна 9. Аня заменила каждую цифру a в его числе на цифру $9 - a$ (цифру 0 она бы заменила на 9, 1 — на 8, ..., 9 — на 0). Оказалось, что получившееся число составляет $\frac{4}{3}$ от изначально записанного Артёмом. Какое число написал на доске Артём?

Ответ: 428571.

Решение. Обозначим число, записанное Артёмом, через x. Тогда число, записанное Аней, будет равно $999999 - x$. Получаем уравнение $\frac{4}{3}x = 999999 - x$. Умножим обе части на 3 и перенесём x влево. Получим $7x = 999999 \cdot 3$, откуда $x = \frac{3}{7} \cdot 999999 = 428571$. □

Вариант 8.1.2. Артём написал на доске шестизначное натуральное число, первая цифра которого не равна 9. Аня заменила каждую цифру a в его числе на цифру $9 - a$ (цифру 0 она бы заменила на 9, 1 — на 8, ..., 9 — на 0). Оказалось, что получившееся число составляет $\frac{2}{5}$ от изначально записанного Артёмом. Какое число написал на доске Артём?

Ответ: 714285.

Вариант 8.1.3. Артём написал на доске шестизначное натуральное число, первая цифра которого не равна 9. Аня заменила каждую цифру a в его числе на цифру $9 - a$ (цифру 0 она бы заменила на 9, 1 — на 8, ..., 9 — на 0). Оказалось, что получившееся число составляет $\frac{5}{2}$ от изначально записанного Артёмом. Какое число написал на доске Артём?

Ответ: 285714.

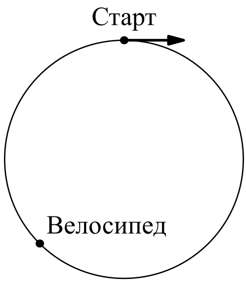
Вариант 8.1.4. Артём написал на доске шестизначное натуральное число, первая цифра которого не равна 9. Аня заменила каждую цифру a в его числе на цифру $9 - a$ (цифру 0 она бы заменила на 9, 1 — на 8, ..., 9 — на 0). Оказалось, что получившееся число составляет $\frac{3}{4}$ от изначально записанного Артёмом. Какое число написал на доске Артём?

Ответ: 571428.

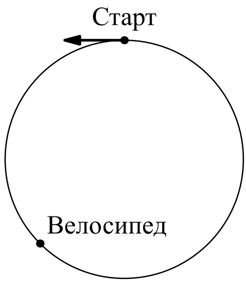
Задача 8.2.1. Андрей решил потренироваться перед соревнованиями по дуатлону (сначала бег, потом езда на велосипеде). На круговом стадионе он выбрал две точки: место старта и место для велосипеда. От старта до велосипеда он бежал, а затем на велосипеде доезжал круг до точки старта.

Он сделал 2 попытки, один раз преодолев дистанцию по часовой стрелке за 130 секунд, а второй раз — против часовой стрелки за 120 секунд. За сколько секунд Андрей просто пробежал бы круг, если известно, что скорости бега и езды на велосипеде постоянны, и едет он в 1,5 раза быстрее, чем бежит?

(Места старта и велосипеда в обеих попытках были одни и те же.)



1-я попытка



2-я попытка

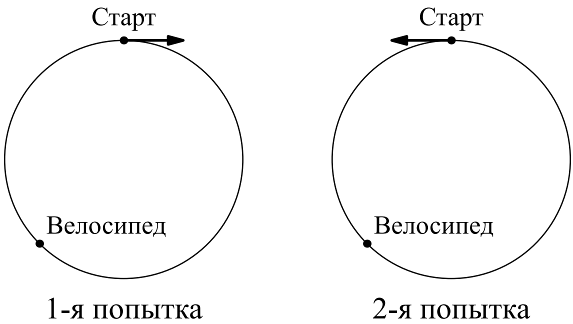
Ответ: 150.

Решение. Заметим, что за две попытки суммарно он преодолел 2 круга: один целиком пешком и один целиком на велосипеде. Пусть на преодоление полного круга на велосипеде Андрей тратит t секунд. Тогда на преодоление полного круга пешком он тратит $1{,}5t$ секунд. Таким образом, $t + 1{,}5t = 120 + 130$, откуда $t = 100$ секунд. Значит, $1{,}5t = 150$ секунд. □

Вариант 8.2.2. Андрей решил потренироваться перед соревнованиями по дуатлону (сначала бег, потом езда на велосипеде). На круговом стадионе он выбрал две точки: место старта и место для велосипеда. От старта до велосипеда он бежал, а затем на велосипеде доезжал круг до точки старта.

Он сделал 2 попытки, один раз преодолев дистанцию по часовой стрелке за 170 секунд, а второй раз — против часовой стрелки за 130 секунд. За сколько секунд Андрей просто пробежал бы круг, если известно, что скорости бега и езды на велосипеде постоянны, и едет он в 1,5 раза быстрее, чем бежит?

(Места старта и велосипеда в обеих попытках были одни и те же.)

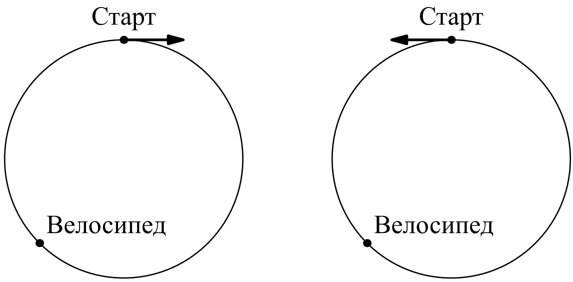


Ответ: 180.

Вариант 8.2.3. Андрей решил потренироваться перед соревнованиями по дуатлону (сначала бег, потом езда на велосипеде). На круговом стадионе он выбрал две точки: место старта и место для велосипеда. От старта до велосипеда он бежал, а затем на велосипеде доезжал круг до точки старта.

Он сделал 2 попытки, один раз преодолев дистанцию по часовой стрелке за 180 секунд, а второй раз — против часовой стрелки за 170 секунд. За сколько секунд Андрей просто пробежал бы круг, если известно, что скорости бега и езды на велосипеде постоянны, и едет он в 1,5 раза быстрее, чем бежит?

(Места старта и велосипеда в обеих попытках были одни и те же.)



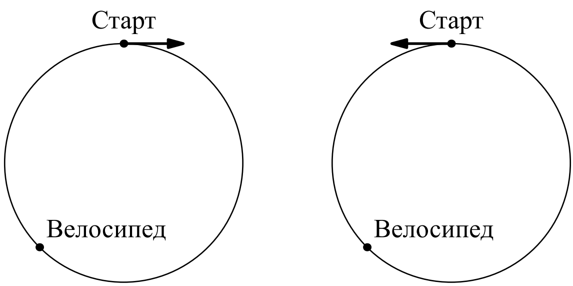
1-я попытка 2-я попытка

Ответ: 210.

Вариант 8.2.4. Андрей решил потренироваться перед соревнованиями по дуатлону (сначала бег, потом езда на велосипеде). На круговом стадионе он выбрал две точки: место старта и место для велосипеда. От старта до велосипеда он бежал, а затем на велосипеде доезжал круг до точки старта.

Он сделал 2 попытки, один раз преодолев дистанцию по часовой стрелке за 210 секунд, а второй раз — против часовой стрелки за 190 секунд. За сколько секунд Андрей просто пробежал бы круг, если известно, что скорости бега и езды на велосипеде постоянны, и едет он в 1,5 раза быстрее, чем бежит?

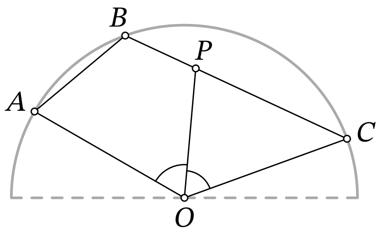
(Места старта и велосипеда в обеих попытках были одни и те же.)



1-я попытка 2-я попытка

Ответ: 240.

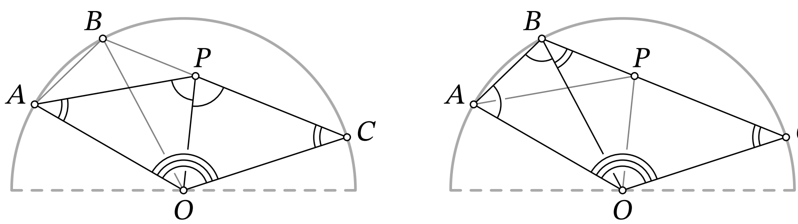
Задача 8.3.1. На полуокружности с центром в точке O отметили точки A, B и C, причём точка B лежит на дуге AC. Биссектриса угла AOC пересекает отрезок BC в точке P. Сколько градусов составляет угол ABO, если $\angle APB = 32°$?



Ответ: 74.

Решение. Обозначим $\alpha = \angle CPO$, $\beta = \angle PCO$, $\gamma = \angle AOC$. Заметим, что треугольники APO и CPO равны ($\angle AOP = \angle COP$, $AO = CO$ как радиусы, PO общая). Тогда $\angle APO = \alpha$ и $\angle PAO = \beta$ (рис. 1a). Из суммы углов четырёхугольника $APCO$ имеем

$$2\alpha + 2\beta + \gamma = 360°.$$



(a) (b)

Рис. 1: к решению задачи 8.3.1

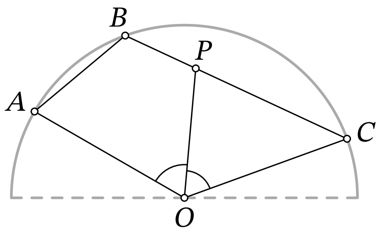
С другой стороны, треугольники ABO и BCO равнобедренные (рис. 1b); если обозначить искомый $\angle ABO = \alpha'$, то получаем $\angle BAO = \alpha'$ и $\angle CBO = \beta$. Из суммы углов четырёхугольника $ABCO$ имеем

$$2\alpha' + 2\beta + \gamma = 360°,$$

откуда $\alpha = \alpha'$.

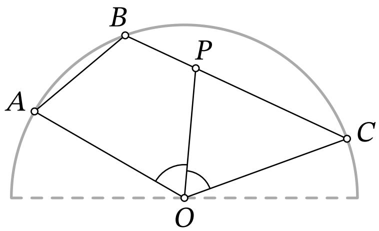
Осталось найти α. Для этого заметим, что $\angle APC = 2\alpha$ дополняет $\angle APB = 32°$ до развёрнутого; получаем $\alpha = \frac{1}{2}(180° - 32°) = 74°$. □

Вариант 8.3.2. На полуокружности с центром в точке O отметили точки A, B и C, причём точка B лежит на дуге AC. Биссектриса угла AOC пересекает отрезок BC в точке P. Сколько градусов составляет угол ABO, если $\angle APB = 34°$?



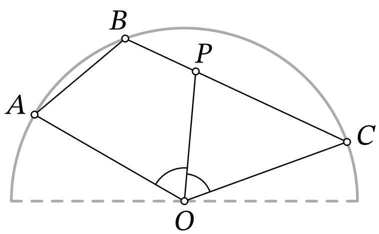
Ответ: 73.

Вариант 8.3.3. На полуокружности с центром в точке O отметили точки A, B и C, причём точка B лежит на дуге AC. Биссектриса угла AOC пересекает отрезок BC в точке P. Сколько градусов составляет угол ABO, если $\angle APB = 28°$?



Ответ: 76.

Вариант 8.3.4. На полуокружности с центром в точке O отметили точки A, B и C, причём точка B лежит на дуге AC. Биссектриса угла AOC пересекает отрезок BC в точке P. Сколько градусов составляет угол ABO, если $\angle APB = 38°$?



Ответ: 71.

Задача 8.4.1. Денис загадал натуральное число n. Известно, что если к числу n прибавить 6, то получится число, дающее при делении на 101 такой же остаток, как и число n^2. Чему может быть равен остаток от деления n на 101? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 3, 99.

Решение. Обозначим через x остаток от деления n на 101. По условию числа n^2 и $n + 6$ дают одинаковые остатки при делении на 101, то есть их разность делится на 101. Это означает, что $x^2 - x - 6$ должно делиться на 101. Заметим, что $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Так как 101 — простое число, то одна из скобок должна делиться на него целиком, то есть либо $x - 3$ делится на 101, либо $x + 2$ делится на 101. В первом случае x даёт остаток 3 при делении на 101, а во втором — 99. □

Вариант 8.4.2. Денис загадал натуральное число n. Известно, что если к числу n прибавить 6, то получится число, дающее при делении на 103 такой же остаток, как и число n^2. Чему может быть равен остаток от деления n на 103? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 3, 101.

Вариант 8.4.3. Денис загадал натуральное число n. Известно, что если к числу n прибавить 6, то получится число, дающее при делении на 107 такой же остаток, как и число n^2. Чему может быть равен остаток от деления n на 107? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 3, 105.

Вариант 8.4.4. Денис загадал натуральное число n. Известно, что если к числу n прибавить 6, то получится число, дающее при делении на 109 такой же остаток, как и число n^2. Чему может быть равен остаток от деления n на 109? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 3, 107.

Задача 8.5.1. За круглым столом 17 одноклассников с разными именами выбирали старосту класса. Каждый написал список с несколькими именами, кто, по его мнению, подходит на эту роль. Известно, что если взять любых двух сидящих рядом ребят, то каждый из остальных ребят написал имя хотя бы одного из этих двоих. Какое наименьшее количество имён может быть суммарно во всех списках? (Каждое имя учитывается столько раз, сколько раз оно написано.)

Ответ: 136.

Решение. Заметим, что каждый человек должен указать хотя бы 8 других. Действительно, рассмотрим произвольного человека A. Все люди, кроме A, разбиваются на 8 пар стоящих рядом людей. Для каждой такой пары A должен написать хотя бы одного человека из пары. Значит, A должен написать хотя бы 8 людей. Так как в качестве A может быть любой из ребят, получаем, что всего написано не менее $17 \cdot 8 = 136$ имён.

Теперь приведём пример, когда может быть написано ровно 136 имён. Пусть каждый из людей напишет имена 2-го, 4-го, 6-го, …, 16-го от себя по часовой стрелке. Тогда каждый человек для любой пары соседей среди других людей напишет имя хотя бы одного человека из пары. Поэтому для любой пары каждый из оставшихся людей напишет хотя бы одного человека из этой пары, т. е. пример подходит. □

Вариант 8.5.2. За круглым столом 19 одноклассников с разными именами выбирали старосту класса. Каждый написал список с несколькими именами, кто, по его мнению, подходит на эту роль. Известно, что если взять любых двух сидящих рядом ребят, то каждый из остальных ребят написал имя хотя бы одного из этих двоих. Какое наименьшее количество имён может быть суммарно во всех списках? (Каждое имя учитывается столько раз, сколько раз оно написано.)

Ответ: 171.

Вариант 8.5.3. За круглым столом 15 одноклассников с разными именами выбирали старосту класса. Каждый написал список с несколькими именами, кто, по его мнению, подходит на эту роль. Известно, что если взять любых двух сидящих рядом ребят, то каждый из остальных ребят написал имя хотя бы одного из этих двоих. Какое наименьшее количество имён может быть суммарно во всех списках? (Каждое имя учитывается столько раз, сколько раз оно написано.)

Ответ: 105.

Вариант 8.5.4. За круглым столом 13 одноклассников с разными именами выбирали старосту класса. Каждый написал список с несколькими именами, кто, по его мнению, подходит на эту роль. Известно, что если взять любых двух сидящих рядом ребят, то каждый из остальных ребят написал имя хотя бы одного из этих двоих. Какое наименьшее количество имён может быть суммарно во всех списках? (Каждое имя учитывается столько раз, сколько раз оно написано.)

Ответ: 78.

Задача 8.6.1. Дана таблица, состоящая из 3 строк и 170 столбцов. В каждой её клетке написано действительное число, причём в верхней строке все числа различны. Для любых двух чисел, стоящих в одном столбце в соседних клетках, выполнено следующее условие: одно число является либо четвёртой степенью другого, либо седьмой.

Какое наименьшее количество различных чисел может быть в нижней строке?

Ответ: 14.

Решение. Посмотрим, какие различные верхние числа могут соответствовать какому-то конкретному нижнему числу x.

Пусть $x < 0$, тогда варианты следующие:

1. $x \mapsto x^4 \mapsto x^{16}$;
2. $x \mapsto x^7 \mapsto x^{49}$;
3. $x \mapsto x^4 \mapsto x$ (или $x \mapsto x^7 \mapsto x$, $x \mapsto \sqrt[7]{x} \mapsto x$);

4. $x \mapsto x^4 \mapsto -x$;
5. $x \mapsto x^4 \mapsto x^{28}$ (или $x \mapsto x^7 \mapsto x^{28}$);
6. $x \mapsto \sqrt[7]{x} \mapsto \sqrt[49]{x}$;
7. $x \mapsto \sqrt[7]{x} \mapsto \sqrt[7]{x^4}$ (или $x \mapsto x^4 \mapsto \sqrt[7]{x^4}$);

Пусть $x > 0$, тогда варианты следующие:

1. $x \mapsto x^4 \mapsto x^{16}$;
2. $x \mapsto x^7 \mapsto x^{49}$;
3. $x \mapsto x^4 \mapsto x$ (или $x \mapsto x^7 \mapsto x$, $x \mapsto \sqrt[4]{x} \mapsto x$, $x \mapsto -\sqrt[4]{x} \mapsto x$, $x \mapsto \sqrt[7]{x} \mapsto x$);
4. $x \mapsto x^4 \mapsto -x$;
5. $x \mapsto x^4 \mapsto x^{28}$ (или $x \mapsto x^7 \mapsto x^{28}$);
6. $x \mapsto \sqrt[7]{x} \mapsto \sqrt[49]{x}$;
7. $x \mapsto \sqrt[7]{x} \mapsto \sqrt[7]{x^4}$ (или $x \mapsto x^4 \mapsto \sqrt[7]{x^4}$);
8. $x \mapsto \sqrt[4]{x} \mapsto \sqrt[16]{x}$;
9. $x \mapsto \sqrt[4]{x} \mapsto -\sqrt[16]{x}$;
10. $x \mapsto \sqrt[4]{x} \mapsto \sqrt[4]{x^7}$ (или $x \mapsto x^7 \mapsto \sqrt[4]{x^7}$);
11. $x \mapsto -\sqrt[4]{x} \mapsto -\sqrt[4]{x^7}$ (или $x \mapsto x^7 \mapsto -\sqrt[4]{x^7}$);
12. $x \mapsto \sqrt[4]{x} \mapsto \sqrt[28]{x}$ (или $x \mapsto \sqrt[7]{x} \mapsto \sqrt[28]{x}$);
13. $x \mapsto -\sqrt[4]{x} \mapsto -\sqrt[28]{x}$ (или $x \mapsto \sqrt[7]{x} \mapsto -\sqrt[28]{x}$);

(Чтобы понять, что это все варианты, заметим, что каждый переход должен иметь один из пяти видов $t \mapsto t^7$, $t \mapsto t^4$, $t \mapsto \sqrt[4]{t}$, $t \mapsto -\sqrt[4]{t}$, $t \mapsto \sqrt[7]{t}$. Значит, для двух переходов подряд есть 25 вариантов; но из отрицательного числа извлечь корень чётной степени нельзя, поэтому для положительного x остаётся 23 варианта, все из которых указаны выше. Для отрицательного, как нетрудно понять из аналогичных соображений, вариантов будет 11.)

Значит, N различным числам из нижней строки могут соответствовать не более $13N$ чисел из верхней. Следовательно, $13N \geqslant 170$, откуда $N > 13$, то есть $N \geqslant 14$.

Приведём пример с 14 различными числами в нижней строке. Пусть первые 13 чисел в нижней строке равны 2^{784} (здесь $784 = 49 \cdot 16$); в верхней строке расставим различные соответствующие числа в соответствии с приведённым списком. Все они будут иметь вид $\pm 2^k$ для целых $k > 0$. Следующие 13 чисел в нижней строке аналогично сделаем равными 3^{784}, потом 5^{784} и так далее, перебрав таким образом первые 14 простых оснований (последнее из них займёт один оставшийся столбец). $\square$

Вариант 8.6.2. Дана таблица, состоящая из 3 строк и 190 столбцов. В каждой её клетке написано действительное число, причём в верхней строке все числа различны. Для любых двух чисел, стоящих в одном столбце в соседних клетках, выполнено следующее условие: одно число является либо четвёртой степенью другого, либо седьмой.

Какое наименьшее количество различных чисел может быть в нижней строке?

Ответ: 15.

Вариант 8.6.3. Дана таблица, состоящая из 3 строк и 150 столбцов. В каждой её клетке написано действительное число, причём в верхней строке все числа различны. Для любых двух чисел, стоящих в одном столбце в соседних клетках, выполнено следующее условие: одно число является либо четвёртой степенью другого, либо седьмой.

Какое наименьшее количество различных чисел может быть в нижней строке?

Ответ: 12.

Вариант 8.6.4. Дана таблица, состоящая из 3 строк и 140 столбцов. В каждой её клетке написано действительное число, причём в верхней строке все числа различны. Для любых двух чисел, стоящих в одном столбце в соседних клетках, выполнено следующее условие: одно число является либо четвёртой степенью другого, либо седьмой.

Какое наименьшее количество различных чисел может быть в нижней строке?

Ответ: 11.

10-11 классы

Задача 10.1.1. Сколько существует шестизначных чисел, у которых любые две соседние цифры отличаются на 2 или на 8?

Ответ: 288.

Решение. Заметим, что для любой цифры следующую за ней можно выбрать двумя способами:

- Если текущая цифра от 2 до 7, то следующая цифра отличаться на 8 не может, но может отличаться на 2 в обе стороны.
- Если текущая цифра 0 или 1, то следующая цифра может быть либо на 2, либо на 8 больше текущей.
- Если текущая цифра 8 или 9, то следующая цифра может быть либо на 2, либо на 8 меньше текущей.

Первую цифру числа можно выбрать одним из 9 способов (так как число не может начинаться с 0), а каждую следующую цифру можно выбрать одним из двух способов. Отсюда всего количество способов равно $9 \cdot 2^5 = 288$. □

Вариант 10.1.2. Сколько существует пятизначных чисел, у которых любые две соседние цифры отличаются на 2 или на 8?

Ответ: 144.

Вариант 10.1.3. Сколько существует семизначных чисел, у которых любые две соседние цифры отличаются на 2 или на 8?

Ответ: 576.

Вариант 10.1.4. Сколько существует восьмизначных чисел, у которых любые две соседние цифры отличаются на 2 или на 8?

Ответ: 1152.

Задача 10.2.1. На столе лежат N камней различных масс. Известно, что тринадцать самых тяжёлых из них весят 78% от общей массы камней, а два самых лёгких — 7%. Чему может быть равно N? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 18, 19.

Решение. Покрасим два самых лёгких камня в красный цвет, тринадцать самых тяжёлых — в зелёный цвет, а все остальные n камней — в синий цвет. Из условия следует, что 2 красных камня составляют 7% от общей массы, 13 зелёных — 78%, а n синих — 15%. Разберём несколько случаев.

- Пусть $n \leqslant 2$, тогда какой-то из синих камней весит хотя бы 7,5% от общей массы. Поскольку все 13 зелёных камней тяжелее любого синего, суммарно они должны весить более $13 \cdot 7{,}5 > 78\%$ от общей массы. Противоречие.
- Пусть $n = 3$. Такой случай возможен, например, если красные камни весят 3,4% и 3,6% от общей массы, синие весят 4,9%, 5%, 5,1% от общей массы, а зелёные весят 5,4%, 5,5%, … , 6,6% от общей массы.
- Пусть $n = 4$. Такой случай возможен, например, если красные камни весят 3,4% и 3,6% от общей массы, синие весят 3,73%, 3,74%, 3,76%, 3,77% от общей массы, а зелёные весят 5,4%, 5,5%, … , 6,6% от общей массы.
- Пусть $n \geqslant 5$, тогда какой-то из синих камней весит не более 3% от общей массы. Поскольку оба красных камня легче любого синего, суммарно они должны весить менее $2 \cdot 3 < 7\%$ от общей массы. Противоречие. □

Вариант 10.2.2. На столе лежат N камней различных масс. Известно, что четырнадцать самых тяжёлых из них весят 77% от общей массы камней, а два самых лёгких — 7%. Чему может быть равно N? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 19, 20.

Вариант 10.2.3. На столе лежат N камней различных масс. Известно, что одиннадцать самых тяжёлых из них весят 77% от общей массы камней, а два самых лёгких — 7%. Чему может быть равно N? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 16, 17.

Вариант 10.2.4. На столе лежат N камней различных масс. Известно, что девятнадцать самых тяжёлых из них весят 76% от общей массы камней, а четыре самых лёгких — 10%. Чему может быть равно N? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 27, 28.

Задача 10.3.1. В квадрате 106×106 во всех клетках сидело по одной лягушке. За один ход лягушка может прыгнуть из клетки в соседнюю с ней по стороне.

Каждая лягушка сделала ровно 2 хода (возможно, оказавшись в итоге на своей изначальной клетке). Какое наименьшее количество занятых клеток могло остаться?

Ответ: 1296.

Решение. Заметим, что если покрасить доску в шахматную раскраску, то цвет клетки, на которой окажется лягушка, совпадёт с цветом её начальной клетки. Это означает, что задачу нужно решить отдельно для белых и чёрных клеток. Но так как размер доски чётный, то чёрные поля переходят в белые при повороте доски на 90°, поэтому для чёрных и белых полей ситуация одинаковая.

Отметим некоторые белые клетки крестиками, как показано на рис. 2 (отмеченные клетки находятся в 36 строках; в каждой строке, где есть отмеченные клетки, их 18). Заметим, что никакие две лягушки из отмеченных клеток не могли оказаться в одной и той же клетке после двух прыжков. Таким образом, лягушки со всех этих клеток в итоге оказались на разных клетках, то есть занятых белых клеток не менее $36 \cdot 18 = 648$.

С другой стороны, несложно убедиться, что из любой белой клетки можно за два хода допрыгать до одной из отмеченных, то есть все лягушки с белых клеток могли собраться на отмеченных клетках.

Таким образом, минимальное число белых клеток, которые могут оказаться занятыми, равно 648. Для чёрных клеток аналогично, поэтому итоговый ответ — $648 \cdot 2 = 1296$. □

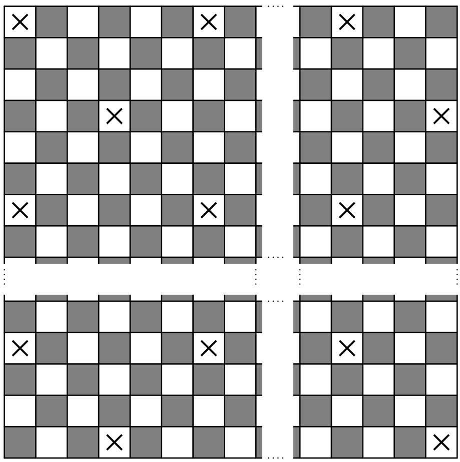


Рис. 2: к решению задачи 10.3.1

Вариант 10.3.2. В квадрате 112×112 во всех клетках сидело по одной лягушке. За один ход лягушка может прыгнуть из клетки в соседнюю с ней по стороне.

Каждая лягушка сделала ровно 2 хода (возможно, оказавшись в итоге на своей изначальной клетке). Какое наименьшее количество занятых клеток могло остаться?

Ответ: 1444.

Вариант 10.3.3. В квадрате 124×124 во всех клетках сидело по одной лягушке. За один ход лягушка может прыгнуть из клетки в соседнюю с ней по стороне.

Каждая лягушка сделала ровно 2 хода (возможно, оказавшись в итоге на своей изначальной клетке). Какое наименьшее количество занятых клеток могло остаться?

Ответ: 1764.

Вариант 10.3.4. В квадрате 130×130 во всех клетках сидело по одной лягушке. За один ход лягушка может прыгнуть из клетки в соседнюю с ней по стороне.

Каждая лягушка сделала ровно 2 хода (возможно, оказавшись в итоге на своей изначальной клетке). Какое наименьшее количество занятых клеток могло остаться?

Ответ: 1936.

Задача 10.4.1. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_7$ таковы, что:

- $a_1 = 5$;
- $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_7$;

- числа $a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию для каждого $k = 1,\ 2,\ 3$;
- числа $a_{2m}, a_{2m+1}, a_{2m+2}$ образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию для каждого $m = 1,\ 2$.

Чему может быть равно a_7? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 5, 221.

Решение. Обозначим $a_2 = n$, тогда $a_3 = 2n - 5$. Поскольку числа a_2, a_3, a_4 образуют геометрическую прогрессию, $a_3^2 = a_2 a_4$, т. е. a_3^2 делится на a_2. Следовательно, $(2n-5)^2 = 4n^2 - 20n + 25$ делится на n, т. е. 25 делится на n. Поскольку $n = a_2 \geqslant a_1 = 5$, получаем два случая.

- $n = a_2 = 5$. По первым двум числам вся последовательность однозначно восстанавливается: 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, и $a_7 = 5$.
- $n = a_2 = 25$. По первым двум числам вся последовательность однозначно восстанавливается: 5, 25, 45, 81, 117, 169, 221, и $a_7 = 221$. □

Вариант 10.4.2. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_7$ таковы, что:

- $a_1 = 7$;
- $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_7$;
- числа $a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию для каждого $k = 1,\ 2,\ 3$;
- числа $a_{2m}, a_{2m+1}, a_{2m+2}$ образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию для каждого $m = 1,\ 2$.

Чему может быть равно a_7? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 7, 475.

Вариант 10.4.3. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_7$ таковы, что:

- $a_1 = 11$;
- $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_7$;
- числа $a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию для каждого $k = 1,\ 2,\ 3$;
- числа $a_{2m}, a_{2m+1}, a_{2m+2}$ образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию для каждого $m = 1,\ 2$.

Чему может быть равно a_7? Укажите все возможные варианты.

Ответ: $11, 1271$.

Задача 10.5.1. Окружности ω_1 и ω_2, радиусы которых равны 61 и 25, пересекаются в точках A и B. Окружность ω касается ω_1 и ω_2 внешним образом. Прямая AB пересекает ω в точках P и Q. Оказалось, что точки P и Q делят ω на две дуги, длины которых различаются в 2 раза. Найдите расстояние между центрами ω_1 и ω_2.

Ответ: 72.

Решение. Обозначим центры окружностей ω_1, ω_2 и ω через O_1, O_2 и O, а их радиусы — через R_1, R_2 и R соответственно.

Введём прямоугольную систему координат с началом в пересечении прямых O_1O_2 и AB, а ось x сонаправим с лучом O_1O_2 (рис. 3). Обозначим координаты $O_1(-d_1, 0)$, $O_2(d_2, 0)$, $A(0, h)$, $B(0, -h)$. Нам нужно найти $d_1 + d_2$.

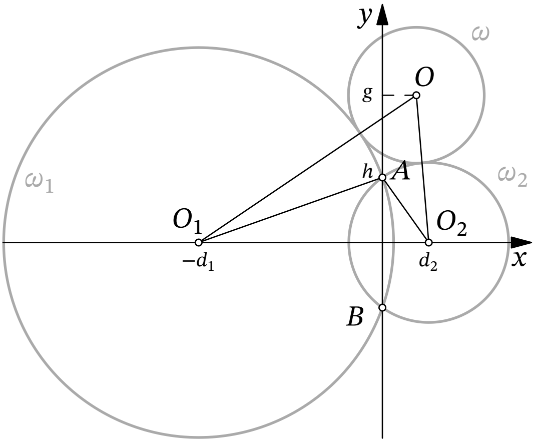


Рис. 3: к решению задачи 10.5.1

Заметим, что абсцисса точки O равна $\pm\frac{1}{2}R$. Действительно, из условия следует, что прямая AB отсекает от окружности ω дугу в $120°$ (рис. 4). Это означает, что угол при вершине равнобедренного треугольника POQ равен $120°$, то есть его высота в два раза меньше боковой стороны.

Обозначим ординату точки O через g. Рассмотрим сначала случай, когда точка O имеет координаты $(+\frac{1}{2}R, g)$.

Выразим квадраты расстояний O_1A, O_2A, O_1O, O_2O через координаты соответствующих

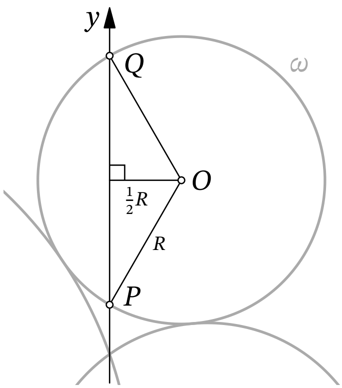


Рис. 4: к решению задачи 10.5.1

точек:

$$R_1^2 = d_1^2 + h^2;$$
$$R_2^2 = d_2^2 + h^2;$$
$$(R_1 + R)^2 = (d_1 + \tfrac{1}{2}R)^2 + g^2;$$
$$(R_2 + R)^2 = (d_2 - \tfrac{1}{2}R)^2 + g^2.$$

Взяв первое и четвёртое равенство со знаком минус, а второе и третье — со знаком плюс и сложив, получим после сокращений

$$2R(R_1 - R_2) = R(d_1 + d_2).$$

Отсюда извлекаем $d_1 + d_2 = 2(R_1 - R_2) = 2(61 - 25) = 72$.

Осталось разобрать второй случай, $O(-\frac{1}{2}R, g)$. Проделав аналогичные операции, получим вывод

$$2R(R_1 - R_2) = -R(d_1 + d_2).$$

Мы видим, что части равенства имеют разные знаки, то есть этот случай невозможен. □

Другое решение. Во-первых, отметим, что окружность ω образует с прямой AB угол $60°$ (равный половине градусной меры дуги, которую эта прямая отсекает от окружности).

Проведём прямые ℓ_1 и ℓ_2, касающиеся ω_1 и ω_2 (рис. 5). Докажем, что они, как и окружность ω, образуют угол $60°$ с прямой AB.

Применим инверсию с центром B и произвольным радиусом. Окружности ω_1 и ω_2 перейдут при этом в прямые ω_1' и ω_2', прямая AB — в прямую $A'B$ (то есть в себя); все они будут пересекаться в точке A'. Окружность ω и прямые ℓ_1 и ℓ_2 перейдут в окружности ω', ℓ_1' и ℓ_2', вписанные в угол, образованный прямыми ω_1' и ω_2' (рис. 6). При этом окружность ω'

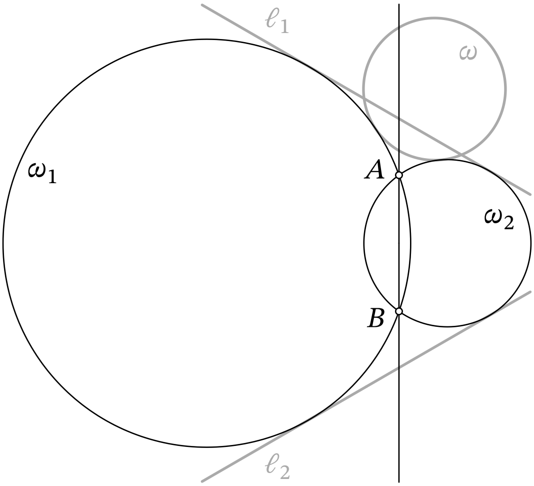


Рис. 5: к решению задачи 10.5.1

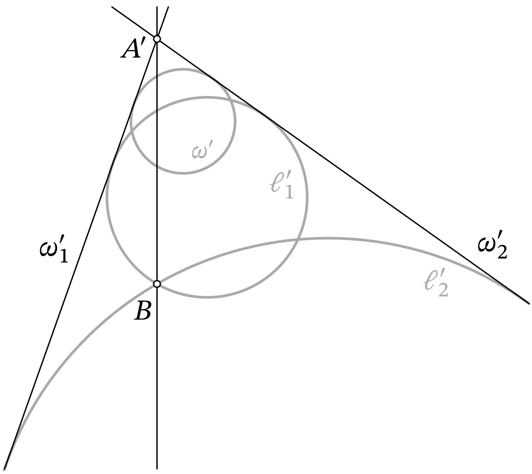


Рис. 6: к решению задачи 10.5.1

будет образовывать угол 60° с прямой $A'B$, так как углы между окружностями и прямыми сохраняются при инверсии.

Так как окружности ω', ℓ'_1 и ℓ'_2 переходят друг в друга при гомотетиях с центром A', то они все образуют одинаковые углы 60° с прямой $A'B$. Значит, и до инверсии прямые ℓ_1 и ℓ_2 образовывали с AB такой же угол.

Теперь нетрудно закончить решение. Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 образуют с AB углы 60°, то и между собой они образуют такой же угол. Это означает, что окружности ω_1 и ω_2 вписаны в угол величины 60°. Обозначим центры окружностей соответственно за O_1 и O_2 и спроецируем O_2 на радиус окружности ω_1, проведённый к точке касания с ℓ_1, получив точку T (рис. 7). Тогда треугольник O_1O_2T прямоугольный, а его катет напротив угла в 30°, отрезок O_1T, равен разности радиусов окружностей. Значит, $O_1O_2 = 2(61 - 25) = 72$. □

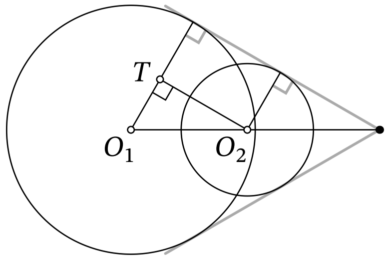


Рис. 7: к решению задачи 10.5.1

Вариант 10.5.2. Окружности ω_1 и ω_2, радиусы которых равны 62 и 25, пересекаются в точках A и B. Окружность ω касается ω_1 и ω_2 внешним образом. Прямая AB пересекает ω в точках P и Q. Оказалось, что точки P и Q делят ω на две дуги, длины которых различаются в 2 раза. Найдите расстояние между центрами ω_1 и ω_2.

Ответ: 74.

Вариант 10.5.3. Окружности ω_1 и ω_2, радиусы которых равны 63 и 25, пересекаются в точках A и B. Окружность ω касается ω_1 и ω_2 внешним образом. Прямая AB пересекает ω в точках P и Q. Оказалось, что точки P и Q делят ω на две дуги, длины которых различаются в 2 раза. Найдите расстояние между центрами ω_1 и ω_2.

Ответ: 76.

Вариант 10.5.4. Окружности ω_1 и ω_2, радиусы которых равны 64 и 25, пересекаются в точках A и B. Окружность ω касается ω_1 и ω_2 внешним образом. Прямая AB пересекает ω в точках P и Q. Оказалось, что точки P и Q делят ω на две дуги, длины которых различаются в 2 раза. Найдите расстояние между центрами ω_1 и ω_2.

Ответ: 78.

Задача 10.6.1. Действительные числа x, y, z лежат на отрезке $[0;1]$. Известно, что

$$\begin{cases} \sqrt{x - xy} + \sqrt{y - xy} = \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{y - yz} + \sqrt{z - yz} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sqrt{z - zx} + \sqrt{x - zx} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $(1-2x)^6(1-2y)^2(1-2z)^2$.

Ответ: $\frac{1}{128}$.

Решение. Заметим, что подкоренные выражения раскладываются на множители:

$$\sqrt{x-xy}+\sqrt{y-xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-y}+\sqrt{y}\cdot\sqrt{1-x}\,.$$

Поскольку $x, y, z \in [0;1]$, то существуют $\alpha, \beta, \gamma \in [0; \frac{\pi}{2}]$ такие, что $x = \sin^2(\alpha)$, $y = \sin^2(\beta)$, $z = \sin^2(\gamma)$. Преобразуем:

$$\sqrt{x-xy}+\sqrt{y-xy}=\sqrt{\sin^2(\alpha)}\cdot\sqrt{1-\sin^2(\beta)}+\sqrt{\sin^2(\beta)}\cdot\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}=$$
$$=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)=\sin(\alpha+\beta).$$

Аналогично преобразовывая левые части других равенств, получаем систему

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2},\\ \sin(\beta+\gamma)=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin(\gamma+\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

Поскольку $\alpha, \beta, \gamma \in [0; \frac{\pi}{2}]$, то $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha \in [0;\pi]$. Получаем следующие решения

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{6} \text{ или } \dfrac{5\pi}{6},\\ \beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4} \text{ или } \dfrac{3\pi}{4},\\ \gamma+\alpha=\dfrac{\pi}{3} \text{ или } \dfrac{2\pi}{3}.\end{cases}$$

Можно понять, что реализуются только два варианта:

- $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}, \beta+\gamma=\frac{\pi}{4}, \gamma+\alpha=\frac{\pi}{3}$. Тогда $\alpha=\frac{\pi}{8}, \beta=\frac{\pi}{24}, \gamma=\frac{5\pi}{24}$ и

$$(1-2x)^6(1-2y)^2(1-2z)^2=\left(1-2\sin^2(\alpha)\right)^6\left(1-2\sin^2(\beta)\right)^2\left(1-2\sin^2(\gamma)\right)=$$
$$=(\cos(2\alpha))^6(\cos(2\beta))^2(\cos(2\gamma))^2=\left(\frac{1+\cos(4\alpha)}{2}\right)^3\cdot\frac{1+\cos(4\beta)}{2}\cdot\frac{1+\cos(4\gamma)}{2}=$$
$$=\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\cdot\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{1}{128}.$$

- $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{6}$, $\beta+\gamma=\frac{3\pi}{4}$, $\gamma+\alpha=\frac{2\pi}{3}$. Тогда $\alpha=\frac{3\pi}{8}$, $\beta=\frac{11\pi}{24}$, $\gamma=\frac{7\pi}{24}$ и аналогично

$$(1-2x)^6(1-2y)^2(1-2z)^2=\left(\frac{1+\cos(4\alpha)}{2}\right)^3\cdot\frac{1+\cos(4\beta)}{2}\cdot\frac{1+\cos(4\gamma)}{2}=$$
$$=\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\cdot\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{1}{128}.$$

Другие варианты невозможны. Действительно, если $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$, то $\alpha,\beta\leqslant\frac{\pi}{6}$, откуда $\beta+\gamma\leqslant\leqslant\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$, то есть $\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$. Тогда $\gamma\leqslant\frac{\pi}{4}$, откуда $\alpha+\gamma\leqslant\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$, то есть $\alpha+\gamma=\frac{\pi}{3}$. Случай $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{6}$ разбирается аналогично после замены α, β, γ на $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\beta$, $\frac{\pi}{2}-\gamma$ соответственно. □

Вариант 10.6.2. Действительные числа x, y, z лежат на отрезке $[0;1]$. Известно, что

$$\begin{cases}\sqrt{x-xy}+\sqrt{y-xy}=\dfrac{1}{2},\\ \sqrt{y-yz}+\sqrt{z-yz}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sqrt{z-zx}+\sqrt{x-zx}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

Найдите значение выражения $(1-2x)^4(1-2y)^2(1-2z)^2$.

Ответ: $\frac{1}{64}$.

Вариант 10.6.3. Действительные числа x, y, z лежат на отрезке $[0;1]$. Известно, что

$$\begin{cases}\sqrt{x-xy}+\sqrt{y-xy}=\dfrac{1}{2},\\ \sqrt{y-yz}+\sqrt{z-yz}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sqrt{z-zx}+\sqrt{x-zx}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

Найдите значение выражения $(1-2x)^8(1-2y)^2(1-2z)^2$.

Ответ: $\frac{1}{256}$.