Всесибирская открытая олимпиада котов 2022-2023 г.г. по математике
Заключительный этап
7 класс
Решения

7.1. Сто эльфов разного возраста встали в круг. Каждый из них, кто оказался старше обоих своих соседей, закрыл левый глаз. Каждый же, кто оказался младше обоих соседей, закрыл правый. В итоге оказалось, что все эльфы стоят с закрытым глазом. Приведите пример, как такое может быть возможно.

Решение. Пронумеруем места в кругу числами от 1 до 100, и пусть на чётных позициях стоят очень низкие эльфы, а на нечётных — очень высокие. Тогда ясно, что каждый окажется либо ниже обоих соседей, либо выше, и условие задачи будет выполнено.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов.

7.2. На некотором острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Как-то раз 99 жителей этого острова встали в круг, и каждый из них сказал: "Все десять человек, следующие за мной по часовой стрелке, являются лжецами". Сколько среди вставших в круг могло быть рыцарей?

Ответ. 9 рыцарей.

Решение. Заметим, что все люди не могут быть лжецами, так как тогда бы получилось, что каждый из них говорит правду. Значит, среди этих людей есть хотя бы один рыцарь. Пронумеруем всех людей так, чтобы рыцарь был 99-м по счёту. Тогда 10 человек с номерами от 1 до 10 — лжецы (это следует из заявления рыцаря). Кроме того, 10 человек с номерами 89-98 — тоже лжецы, поскольку произнесли неверное утверждение (среди десяти человек, стоящих после них, есть рыцарь). Значит, так как эти 10 человек стоят подряд вдоль нашей окружности после человека номер 88, то он сказал правду и, следовательно, также является рыцарем. Повторяя рассуждения для него, получим, что люди с номерами 78-87 являются лжецами, и так далее. В итоге получим, что рыцарями являются люди с номерами 99, 88, 77, …, 11, то есть всего их 9 человек.

Отметим для полноты рассуждения, что мы доказали, что если расстановка возможна, то она выглядит именно так. Несложно проверить, что противоречий нет, и так люди действительно могли встать.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ с примером расстановки — 2 балла.

Не рассмотрен случай, когда рыцарей нет — баллы не снимать.

Не проверено, что полученная расстановка подходит — баллы не снимать.

7.3. Профессор Фортран написал программу, которая принимает натуральное число, перемножает все его цифры и это произведение случайным образом либо вычитает из начального числа, либо прибавляет к нему. Так, из числа 239 программа может получить либо $239 - 2 \cdot 3 \cdot 9 = 239 - 54 = 185$, либо $239 + 54 = 293$. Результат после этого выводится на экран, а с полученным числом проделываются те же самые операции. Через некоторое время следующее число тоже появляется на экране, и так далее. Профессор Фортран запустил программу и ввёл число 141. Докажите, что это число никогда снова не будет выведено на экран.

Решение. Произведение цифр числа 141 равно 4, поэтому следующим на экране появится либо число 145, либо число 137.

В первом случае все последующие числа, будут делиться на 5, и число 141 не появится. Действительно, число кратно 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра равна 0 или 5. Значит, произведение его цифр делится на 5, и если прибавить его к самому числу, оно всё ещё будет кратно 5.

Во втором случае рассмотрим следующий шаг. Новым числом будет либо $137-21=116$, либо $137+21=158$. В любом случае это число чётно, и, повторяя рассуждения выше, его произведение цифр чётно, и все последующие числа тоже будут чётны. Значит, 141 никогда среди них не встретится.

7.4. Вере Александровне срочно понадобилось вырезать три двадцатиугольника (не обязательно одинаковых) из одного прямоугольного листа бумаги. Она может взять этот лист и разрезать его по прямой на две части. После этого взять одну из полученных частей и разрезать по прямой уже её. Затем взять какой-то из имеющихся кусков, разрезать его, и так далее. Какое наименьшее количество разрезов придётся сделать Вере Александровне, чтобы среди полученных частей оказались нужные ей три двадцатиугольника?

Ответ. 50 разрезов.

Решение. При каждом разрезании общее число кусков бумаги увеличивается на 1 (один кусок превращается в два новых), поэтому после n разрезов будет $(n+1)$ кусков бумаги. Подсчитаем, каким может быть общее число вершин во всех кусках вместе после n разрезов. При каждом разрезании общее число вершин увеличивается на 2 (если резали через две вершины), на 3 (если резали через вершину и сторону) или на 4 (если резали через стороны). Поскольку сначала было 4 вершины, то после n разрезов во всех кусках вместе будет не больше $4n+4$ вершин.

Предположим, что после n разрезов нашлись три двадцатиугольника. Поскольку при этом общее число полученных кусков будет $n+1$, то, кроме этих двадцатиугольников, будет ещё $n+1-3$ кусков. В каждом из этих кусков не меньше трёх вершин, поэтому общее число вершин не меньше $20\cdot 3+3(n-2)=3n+54$.

Значит, $4n+4 \geqslant 3n+54$, откуда $n \geqslant 50$.

Покажем теперь, как можно получить три двадцатиугольника, сделав 50 разрезов. Вот один из способов: разрежем исходный лист на три прямоугольников (2 разреза) и каждый прямоугольник за 16 разрезов превратим в двадцатиугольник, отрезая от углов треугольники ($3\times 16=48$ разрезов). Всего ровно 50 разрезов.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Пример на 50 разрезаний — 2 балла.

Доказательство минимальности 50 — 5 баллов. Эти баллы складываются из доказательства следующих утверждение:

- После n разрезов количество вершин не более $4n + 4$ — 2 балла;
- После n разрезов количество вершин не менее $3n + 54$ — 2 балла;
- Из двух предыдущих оценок $n \geqslant 50$ — 1 балл.

7.5. Дома у Антона Павловича живёт 198 котов. Все они имеют разный вес, а также разную скорость. Известно, что в любой группе из 100 котов самый толстый из них является одновременно и самым быстрым из них. Докажите, что можно так выбрать группу из 100 котов, что самый худой из них окажется одновременно и самым медленным из них.

Решение. Рассмотрим самого толстого кота. Каких бы 99 котов к нему ни добавить, он будет и самым быстрым среди них. Значит, он и толще, и быстрее каждого из остальных котов. Присвоим этому коту номер 1 и запрём его на балконе. Из тех котов, что остались, опять выберем самого толстого. Каких бы 99 котов к нему ни добавить, он будет и самым толстым и самым быстрым среди них. Значит, он и толще, и быстрее каждого из оставшихся котов. Присвоим этому коту номер 2 и также запрём его на балконе. Из оставшихся снова выберем самого толстого кота. И так будем действовать до тех пор, пока на балконе не будут заперты 99 котов. Все они и толще, и быстрее остальных, поэтому добавив к ним произвольного кота из оставшихся, получим искомую группу из 100 котов, в которой добавленный является и самым худым, и самым медленным одновременно.

Критерии. Идея рассмотрения самого толстого или самого быстрого кота — 1 балл.

Доказательство того, что самый толстый кот является и самым быстрым — ещё 1 балл.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2022-2023 г.г. по математике
Заключительный этап
8 класс
Решения

8.1. Пять автобусов стоят в ряд друг за другом в пробке, причём в любых двух из них едет разное ненулевое число пассажиров. Назовём двух различных людей *сострадальцами*, если они едут либо в одном и том же автобусе, либо в соседних. Оказалось, что у каждого пассажира есть либо ровно 20, либо ровно 30 сострадальцев. Приведите пример, как такое может быть возможно.

Решение. Например, пусть в автобусах едет 12, 9, 10, 2 и 19 человек соответственно. Пример не единственный. Его легко построить, если догадаться, что в среднем автобусе должно быть 10 человек. Действительно, и в первых двух автобусах, и в первых трёх должно быть 21 или 31 пассажиров. Значит, в первых двух 21 человек суммарно, а в первых трёх — 31.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов.

Только замечено, что в последовательных автобусах 21 или 31 человек — 1 балл.

Только замечено, что в среднем автобусе 10 человек — 3 балла.

8.2. На некотором острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Как-то раз 1001 житель этого острова встали в круг, и каждый из них сказал: "Все десять человек, следующие за мной по часовой стрелке, являются лжецами". Сколько среди вставших в круг могло быть рыцарей?

Ответ. 91 рыцарь.

Решение. Заметим, что все люди не могут быть лжецами, так как тогда бы получилось, что каждый из них говорит правду. Значит, среди этих людей есть хотя бы один рыцарь. Пронумеруем всех людей так, чтобы рыцарь был 1001-м по счёту. Тогда 10 человек с номерами от 1 до 10 — лжецы (это следует из заявления рыцаря). Кроме того, 10 человек с номерами 991-1000 — тоже лжецы, поскольку произнесли неверное утверждение (среди десяти человек, стоящих после них, есть рыцарь). Значит, так как эти 10 человек стоят подряд вдоль нашей окружности после человека номер 990, то он сказал правду и, следовательно, также является рыцарем. Повторяя рассуждения для него, получим, что люди с номерами 980-989 являются лжецами, и так далее. В итоге получим, что рыцарями являются люди с номерами 1001, 990, 979, $\ldots$, 11, то есть всего их $1001/11 = 91$ человек.

Отметим для полноты рассуждения, что мы доказали, что если расстановка возможна, то она выглядит именно так. Несложно проверить, что противоречий нет, и так люди действительно могли встать.

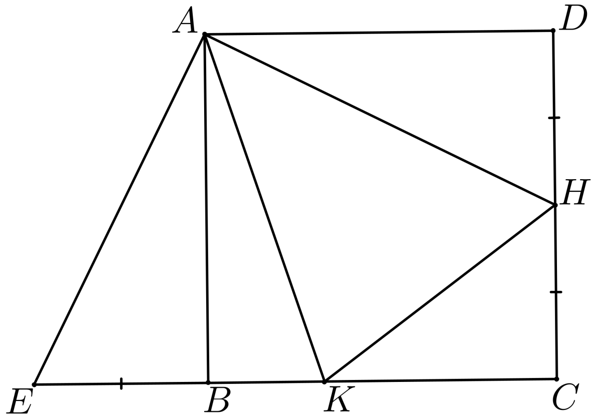
Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ с примером расстановки — 2 балла.

Не рассмотрен случай, когда рыцарей нет — баллы не снимать.

Не проверено, что полученная расстановка подходит — баллы не снимать.

8.3. В квадрате $ABCD$ точка H — середина стороны CD, а K — такая точка на стороне BC, что $KC = 2KB$. Докажите, что KA является биссектрисой угла BKH.



Решение. Примем сторону квадрата равной 6. Тогда $DH = HC = 3$, $BK = 2$, $KC = 4$. Отложим на продолжении BC за точку B точку E таким образом, что $BE = HC = 3$.

Заметим, что прямоугольные треугольники ABE и ADH равны по двум катетам, поэтому $AE = AH$. Кроме того, $KE = KB + BE = 5$, а из теоремы Пифагора для треугольника HKC имеем $HK^2 = HC^2 + KC^2 = 9 + 16 = 25$, откуда $HK = 5$. Но тогда треугольники AEK и AHK равны по трём сторонам, откуда следует $\angle AKE = \angle AKH$, что и требовалось доказать.

Критерии. Отмечена точка E — 1 балл.

Доказано, что $KE = KH$ — ещё 2 балла.

8.4. Назовём число *замечательным*, если его можно разложить в сумму 2023 слагаемых (не обязательно различных), каждое из которых является натуральным составным числом. Найдите наибольшее целое число, не являющееся замечательным.

Ответ. $4 \times 2023 + 3 = 8095$.

Решение. Заменим 2023 на n и будем решать задачу в общем случае для суммы из $n \geqslant 2$ составных слагаемых. Докажем, что ответ равен $4n + 3$, откуда, в частности, получим ответ на исходную задачу.

Утверждение 1. Число $4n + 3$ не является замечательным.

Доказательство утверждения 1. Заметим, что $4n + 3$ является нечётным, поэтому в разложении его в сумму должно присутствовать хотя бы одно нечётное слагаемое. Минимальное нечётное составное число равно 9, а чётное — 4. Поэтому сумма из n слагаемых равна хотя бы

$$9 + 4(n-1) = 4n + 5 > 4n + 3,$$

откуда и следует, что $4n + 3$ не может быть разложено в сумму n составных слагаемых, то есть не является замечательным. □

Утверждение 2. Любое натуральное число большее $4n + 3$ является замечательным.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим число $a > 4n + 3$. Если оно чётно, то его можно записать в виде

$$a = (4n-4) + b = b + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{n-1},$$

где $b \geqslant 8$ — некоторое чётное число, являющееся составным. Если же a нечётно, то

$$a = 4n + 1 + c = 9 + (4n - 8) + c = 9 + c + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{n-2},$$

где $c \geqslant 4$ — некоторое чётное число, являющееся составным. $\square$

Итого, число $4n + 3$ не замечательное, а все бóльшие являются замечательными. Отсюда и получаем ответ на вопрос задачи.

Критерии. Доказательство утверждения 1 или эквивалентного ему — 3 балла.

Доказательство утверждения 2 или эквивалентного ему — по 2 балла за чётный и нечётный случаи.

8.5. После удачного ограбления поезда 102 разбойника поделили добытые рубины, сапфиры и изумруды таким образом, что каждому суммарно досталось ровно 100 драгоценных камней. Докажите, что верно хотя бы одно из следующих двух утверждений:

- Найдутся два разбойника, у которых поровну и рубинов, и сапфиров, и изумрудов;
- Найдутся два разбойника, у которых разное количество и рубинов, и сапфиров, и изумрудов.

Решение. Предположим противное, тогда у любых двоих совпадает количество камней ровно одного вида (ровно два количества совпасть не могут, так как тогда совпадет и третье из-за того, что их суммы равны одному числу 100).

Выделим одного разбойника A, пусть ему досталось r рубинов, s сапфиров и z изумрудов. Так как у каждого из остальных должно совпасть с A ровно одно из количеств, остальные разбойники разбиваются на три группы: в первой у всех r рубинов, во второй у всех s сапфиров, в третьей у всех z изумрудов (некоторые группы могут быть пустыми). В какой-то группе найдутся хотя бы два человека, пусть, например, это B и C из первой группы.

Предположим, что есть хотя бы один разбойник D, входящий в другую группу, для определенности вторую. Тогда у B и D различаются и количества рубинов (у B их r, у D — другое количество, так как он во второй группе), и количества сапфиров (у D их s, у B — другое количество, так как он в первой группе). Значит, у них поровну изумрудов. Заменяя в этом рассуждении B на C, получаем, что у C и D тоже поровну изумрудов. Значит, у B и C поровну изумрудов, но у них также поровну рубинов (по r штук). Противоречие.

Значит, такого человека не нашлось, и все разбойники находятся в первой группе. Но тогда у них у всех одинаковое количество рубинов — k штук. Но сапфиров у каждого из них может быть $0 \leqslant s \leqslant 100$, а разбойников 102, поэтому одно из 101 возможных значений s будет принято хотя бы дважды, откуда у этих двух разбойников будет поровну и рубинов, и сапфиров. Противоречие.

Критерии. Замечено, что в предположении противного у любых двух людей совпадает ровно 1 группа — 1 балл.

Решения заданий Заключительного этапа
Всесибирской открытой олимпиады школьников
по математике 2022-23 гг.

9 класс. Решения.

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

9.1. Конечное множество различных действительных чисел X назовём *хорошим*, если каждое число из X можно представить в виде суммы двух других различных чисел из X. Какое минимальное количество чисел может содержать хорошее множество X?

Ответ. 6.

Решение. Из условия следует, что X содержит не меньше трёх чисел, значит, в нём есть ненулевые числа. Умножая при необходимости все числа на минус один, можем считать, что X содержит положительные числа, выберем из них наибольшее число M. По условию, оно равно сумме двух других различных чисел из X, каждое из которых меньше него. Из максимальности M следует, что оба этих числа положительны. Значит, X содержит не меньше трёх различных положительных чисел. Рассмотрим минимальное из положительных число $\boldsymbol{m}$, оно равно сумме двух других различных чисел из X, одно из которых должно быть отрицательным в силу минимальности $\boldsymbol{m}$. Теперь выберем минимальное отрицательное число N из X, оно также равно сумме двух других различных чисел из X, каждое из которых больше него. Из минимальности N следует, что оба этих числа отрицательны. Следовательно, X содержит не меньше трёх различных отрицательных чисел. Значит, хорошее множество X должно содержать не менее шести чисел.

Примером хорошего множества из шести элементов является множество X={-3, -2, -1, 1, 2, 3}.

Критерии оценивания. (●) Приведён пример хорошего множества из шести чисел: 2 балла. (●) Доказано, что X содержит не меньше 3 положительных или отрицательных чисел: 3 балла. (●) Доказано, что X обязательно содержит числа разных знаков: 2 балла.

9.2. Два простых числа называются *последовательными*, если не существует простого числа, которое больше одного из них, и меньшего другого. Докажите, что сумму любых двух последовательных простых нечётных чисел всегда можно представить в виде произведения трёх натуральных сомножителей, каждый из которых больше единицы.

Доказательство. Сумма S двух последовательных нечётных простых чисел $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ является чётным числом, поэтому в качестве первого сомножителя можно взять двойку. Если число $S/2$, большее единицы, не является простым, то, разложив его на два неединичных множителя, получим требуемое в условии представление S в виде произведения трёх натуральных сомножителей, каждый из которых больше единицы. Если же число *S/2* является простым, то $p<S/2<q$, поэтому оно будет простым числом, лежащим между последовательными p и q, что противоречит условию задачи.

Критерии оценивания. (●) Замечено, что $p+q$ представляется в виде произведения двух неединичных множителей: 1 балл. (●) Нет явного замечания $p<S/2<q$: минус 1 балл.

9.3. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены на плоскости так, что их единственной общей точкой является вершина C. Пусть точки F, G и H являются серединами отрезков BC, CD и AE соответственно. Докажите, что треугольник FGH тоже является равносторонним. Длины сторон треугольников ABC и CDE различны.

Доказательство. Продлим отрезок CF за вершину F ещё на столько же, получим точку M. Диагонали четырёхугольника ACEM делятся точкой пересечения H пополам, поэтому он – параллелограмм. Отрезки FG, GH и FH являются средними линиями в треугольниках BCD, MCD и BCM, поэтому их равенство равносильно равенству отрезков BD, MD и BM. Последнее будет следовать из равенства треугольников BCD, DEM и BAM. Докажем его, установив равенства углов и прилегающих сторон к вершинам C, E и A.

Действительно, AB=CB, как стороны равностороннего треугольника ABC. По той же причине AB=AC, а AC=ME, как противоположные стороны параллелограмма ACEM. Аналогично, AM=CE, как вторая пара противоположных сторон параллелограмма ACEM, и CE=CD=DE, как стороны равностороннего треугольника CDE. Равенства прилегающих сторон доказаны. Угол BAM равен сумме угла CAM и 60°, а угол MED равен сумме угла CEM и 60°. Углы CAM и CEM равны, как противоположные в параллелограмме ACEM, значит углы BAM и MED равны. Обозначим величину угла CAM за x, тогда угол BCD равен $360°-(180°-x)-60°-60°=60°+x$, что равняется углу BAM. Доказательство равенства треугольников BCD, DEM и BAM завершено. Из него, как замечено выше, следует равенство отрезков BD, MD, BM и утверждение задачи.

Критерии оценивания. В условии предполагалось, что порядки следования вершин треугольников ABC и CDE одинаковы – одновременно по или против часовой стрелки, это естественным образом следует из порядка следования соответствующих букв в условии. За не рассмотрение случая, когда вершины следуют в разных порядках и утверждение задачи неверно, снятия баллов не производилось. (●) Тем, кто рассмотрел только этот последний случай и утверждал, что задача некорректна, ставился 1 балл (или 2 балла). (●) Кроме того, возможные взаимные расположения треугольников делятся на такие, когда оба треугольника лежат в одной полуплоскости относительно прямой AE, и такие, когда это не так. Тогда возможны решения задачи, работающие в одном случае и не работающие в другом. Если в работе эти случаи отдельно не рассматривались, снимались два балла. (●) сделаны частные продвижения, например, доказано равенство двух из трёх отрезков – сторон треугольника FGH: 3 балла.

9.4. В какое максимальное число цветов можно окрасить все клетки квадрата 4 на 4 так, чтобы любой квадрат размера 2 на 2 клетки обязательно содержал хотя бы две клетки одинакового цвета?

Ответ. В 11 цветов.

Решение. Докажем, что максимальное число цветов в условиях задачи не больше 11. Рассмотрим в квадрате 4 на 4 пять квадратов размера 2 на 2 клетки: четыре угловых и центральный. Угловые квадраты 2 на 2 не пересекаются, а центральный имеет по одной общей клетке с каждым из угловых. По условию, каждый угловой квадрат 2 на 2 содержит клетки не более трёх различных цветов, всего не больше 12. Но если среди этих четырёх троек цветов в угловых квадратах нет повторяющихся, то центральный квадрат 2 на 2 должен содержать клетки четырёх различных цветов - по одной из каждой тройки, что противоречит условию. Следовательно, общее число различных цветов, в которые окрашены клетки квадрата 4 на 4 не превосходит 12-1=11. Если же хотя бы в одном из угловых квадратов 2 на два использовано не больше двух различных цветов, то всего различных цветов сразу не больше 11.

Пример раскраски квадрата 4 на 4 в 11 цветов, удовлетворяющей условию задачи выглядит так: нижняя горизонталь квадрата красится в различные цвета 1,2,3 и 4, вторая горизонталь – вся в цвет 5, третья горизонталь в различные цвета 6,7,8 и 9, а четвёртая горизонталь – в цвета 10,7,11.9.

Критерии оценивания. (●) Доказательство максимальности 11 цветов: 4 балла, (●) Если в доказательстве максимальности 11 цветов вообще не рассмотрен случай, когда в одном из угловых квадратов не более двух различных цветов: минус 1 балл. (●) Пример правильной окраски в 11 цветов: 3 балла.

9.5. В компании из $n > 1$ человек некоторые её члены знакомы друг с другом, а некоторые – нет. При этом, если X знаком с Y, то и Y знаком с X, сам человек не считается своим знакомым или незнакомым. Найти все n, при которых в компании всегда найдутся два человека А и Б, обладающих в этой компании одинаковым количеством знакомых, и таких, что найдётся либо человек В знакомый одновременно с А и Б, либо человек Г, не знакомый одновременно с А и Б.

Ответ. Все ***n***, не равные 2 и 4.

Доказательство. 1. Примеры. При ***n***=2 в любом случае оба участника имеют одинаковое число знакомых 0 или 1, но отсутствуют кандидаты на роль общего знакомого или незнакомого. При ***n***=4 единственным примером, когда нельзя найти В или Г, является компания, где первый знаком со вторым, второй с третьим, а третий – с четвёртым, и других знакомств нет.

2. Приведём хорошо известное доказательство того, что в любой компании найдутся хотя бы два человека, имеющих в ней одинаковое число знакомых. Количество знакомых у члена компании из n человек может равняться любому натуральному числу от 0 до $n-1$. При этом в компании не могут

одновременно быть люди, число знакомых у одного из которых равно 0, а у другого $n-1$, потому что первый из них не знает в компании никого, включая второго, а второй знает всех, включая первого. Такая ситуация противоречит условию, что, если X знаком с Y, то и Y знаком с X. Следовательно, количество знакомых для любого из n членов компании является числом либо из интервала от 0 до $n-2$, либо из интервала от 1 до $n-1$. В обоих интервалах всего по $n-1$ числу, поэтому из принципа Дирихле следует, что, как минимум, у каких-то двух членов компании числа знакомых совпадают.

3. До этого момента шёл стандартный текст, далее начинается специфика именно этой задачи. Если предположить, что у людей А и Б, имеющих одинаковое количество знакомых, нет общих знакомых и незнакомых в этой компании, то вся компания состоит из А, Б, знакомых А и знакомых Б, которых поровну. Следовательно, любые два человека А и Б, имеющие одинаковое количество знакомых, и не имеющие общих знакомых и незнакомых в этой компании, имеют ровно по ***n***/2-1 знакомых в случае, когда они не знакомы между собой, или ровно по ***n***/2 знакомых в случае, когда они знакомы. Поэтому, если в компании есть пары людей с другими равными количествами знакомых, то у них есть либо общие знакомые, либо общие незнакомые и задача решена. В частности, отсюда следует, что при всех нечётных ***n*,** больших одного, требуемые в условии А и Б найдутся.

4. Далее считаем, что ***n*** больше двух, и в этой компании у любой пары людей с одинаковым числом знакомых нет общих знакомых и незнакомых. Тогда в компании не может быть людей с 0 или $n-1$ знакомыми, так как они и были бы соответственно общими знакомыми или незнакомыми. Совпадать с А или Б эти люди не могут, так как при ***n*** больше двух у них не меньше одного и не больше ***n***/2 <***n-1*** знакомых. Следовательно, количество знакомых для любого из n членов этой компании является числом из интервала от 1 до $n-2$, где всего $n-2$ числа, причём повторяться могут только два значения, $\frac{n}{2}-1$ и ***n***/2.

Случай 1. В компании найдутся как минимум три члена А, Б и В, каждый из которых знает ровно $\frac{n}{2}-1$ из остальных членов компании, причём В является знакомым либо А, либо Б. Можно считать, что он знает А, тогда он не может знать ни одного знакомого Б, иначе тот был бы общим знакомым Б и В. Следовательно. все его знакомые – это А и знакомые А, отличные от самого В. В таком случае Б является общим незнакомым для А и В и требуемая в условии пара найдена.

Случай 2. В компании найдутся как минимум три члена А, Б и В, каждый из которых знает ровно ***n***/2 из остальных членов компании. Но при этом А, Б и В должны знать друг друга, поэтому В будет общим знакомым А и Б.

Случай 3. В компании найдутся ровно два знакомых между собой А и Б, каждый из которых знает в точности ***n***/2 других членов компании, и ровно два других, незнакомых между собой В и Г, каждый из которых знает в точности $\frac{n}{2}-1$ из остальных членов компании. При ***n***=4 это как раз и даёт единственный контрпример, далее $n>4$. Все знакомые А должны иметь разное количества знакомых, иначе А был бы общим знакомым для двух из них, аналогично и для знакомых Б, поэтому можно считать, что А знает В, а Б знает Г. Назовём А-участниками членов компании, знакомых с А и отличных от В, и Б-участниками членов компании, знакомых с Б и отличных от Г. Участники В и Г не могут иметь общих знакомых, поэтому В знает столько же Б-участников компании, сколько Г знает А-участников, и В знает столько же А-участников компании, сколько Г знает Б-участников. Важно отметить, что каждый член компании, кроме А,Б,В и Г знает ровно двух из А,Б,В и Г. Рассмотрим новую компанию, образованную всеми членами первоначальной компании, отличными от А,Б,В и Г, среди них снова найдётся хотя бы пара членов Д и Е с одинаковым количеством знакомых в новой компании. При переходе к новой компании мы удалили у каждого по два знакомства, значит, и в прежней компании у Д и Е было одинаковое количество знакомых, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, при чётных $n>4$ рассматриваемый случай невозможен, что завершает доказательство.

Критерии оценивания. Ввиду того, что условие задачи на олимпиаде сначала было дано вообще в некорректном виде, а затем - без привязки к n, тем, кто просто привёл в решении пример для $n=4$, жюри вынуждено было ставить 7 баллов. За пример при $n=2$ решено было ставить 2 балла, виду его не слишком большой содержательности. Далее приводятся критерии проверки решений той задачи, которая предполагалась.

(●) Воспроизведено стандартное доказательство существование пары членов компании с одинаковым числом знакомых: 2 балла. (●) Доказано, что любые два человека, имеющих одинаковое количество знакомых, и не имеющих общих знакомых и незнакомых в этой компании, имеют ровно по $\frac{n}{2}-1$ или $\frac{n}{2}$ знакомых: 1 балл. (●) Доказано, что количество знакомых для любого члена этой компании является числом из интервала от 1 до $n-2$: 1 балл. (●) Рассмотрение случая с тремя равными членами А, Б и В: 1 балл. (●) Рассуждение с двумя парами равных людей А,Б и В,Г: 2 балла. (●) Баллы за различные продвижения суммируются, но если в решении пропущен случай цепи из четырех вершин (контрпример), ставится не более 4 баллов

10 класс. Решения.

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

10.1. Найдите все пары натуральных чисел $x \ge 2, y \ge 2$ такие, что остаток от деления числа 3***x*** на ***y*** равен 1, остаток от деления числа 3***y*** на ***x*** равен 1 и остаток от деления числа ***xy*** на 3 тоже равен 1.

Ответ. Четыре решения $x = 2, y = 5$, $x = 5, y = 2$.

Решение. Числа x и y не могут быть равны, иначе остаток от деления числа $3x$ на y был бы равен 0. Значит, в силу симметрии можно считать $x < y$, поэтому $3x - 1 < 3y$ и $3x - 1$ делится на y, откуда $3x - 1 = y$ или $3x - 1 = 2y$.

В первом случае $3y - 1 = 9x - 4$ делится на x, значит и 4 делится на x, следовательно $x = 2, y = 5$ или $x = 4, y = 11$. В первом случаях остаток от деления числа xy на 3 равен 1, поэтому он удовлетворяют условию задачи. Во втором случае остаток от деления числа xy на 3 равен 2, поэтому он не удовлетворяют условию задачи.

Во втором случае $2(3y - 1) = 6y - 2 = 9x - 5$ делится на x, значит и 5 делится на x, следовательно $x = 5, y = 7$. Но в этом случае остаток от деления числа xy на 3 равен 2 и пара $x = 5, y = 7$ не удовлетворяет условию.

Критерии оценивания. (●) Подбором найдены верные решения: 1 балл за $x = 2, y = 5$, и один балл за $x = 5, y = 2$: итого 2 балла. (●) Замечено, что $3x - 1 = y$ или $3x - 1 = 2y$: 2 балла. (●) Верно разобран первый из этих случаев: 3 балла. Верно разобран второй из этих случаев: 2 балла.

10.2. Вася и Петя играют в «Бери или дели». В этой игре сначала есть одна большая куча камней. Каждым ходом очередной игрок либо делит одну из уже имеющихся к моменту его хода куч любым способом на две меньших, либо забирает одну из уже имеющихся куч. Выигрывает игрок, после хода которого камней на поле вообще не останется. Игроки делают ходы по очереди, первым ход делает Вася, но этим и только этим ходом он не имеет права забрать всю кучу сразу. Кто из них победит в этой игре? Замечание: куча может содержать всего один камень.

Ответ. Всегда победит Вася.

Решение. Пусть к моменту, когда игра закончится, обоими игроками было сделано ***x*** ходов типа взятия кучки и ***y*** ходов типа деления кучки на две. Каждый ход первого типа уменьшает число имеющихся на поле кучек на один, а каждый ход второго типа увеличивает это число на один. В начале была одна кучка, а в конце – ноль, поэтому имеем соотношение ***1+y-x=0***, откуда ***x=y+1***. Общее количество сделанных при этом ходов равно ***x+y=2y+1*** – нечётно, следовательно, последний ход сделал первый игрок, то есть Вася, он и победил. Ответ не зависит от количества камней в начале.

Критерии оценивания. (●) На основании рассмотрения частных случаев заявлен правильный ответ: 1 балл. (●) Верный ответ доказан для какой-либо бесконечной серии значений количества камней в куче: 2 балла (не суммируется с предыдущим). (●) Присутствует идея рассмотрения суммы ***x+y***: 1 балл.

10.3. Докажите, что для любых действительных чисел x, y из интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$, произведение которых не больше 1, выполняется неравенство $Sin\ xy \geq Sin\ x \cdot Sin\ y$.

Доказательство. Ввиду того, что по условию $xy \leq 1$, одно из этих чисел не больше 1, будем считать $x \leq 1$. Функция $y = Sin\ x$ на интервале $[0, \frac{\pi}{2}]$ возрастает и выпукла вверх, поэтому любая точка её графика расположена выше отрезка, соединяющего точки с координатами $(0,0)$ и $(y, Sin\ y)$. В таком случае, точка $(xy, x \cdot Sin\ y)$ лежит ниже точки $(xy, Sin\ xy)$, следовательно, $x \cdot Sin\ y \leq Sin\ xy$. Кроме того, на интервале $[0, \frac{\pi}{2}]$ выполнено неравенство $Sin\ x \leq x$, поэтому $Sin\ x \cdot Sin\ y \leq x \cdot Sin\ y \leq Sin\ xy$, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. (●) Есть упоминание выпуклости функции $y = Sin\ x$ на интервале $[0, \frac{\pi}{2}]$: 1 балл. (●) Есть идея рассмотрения отрезка соединяющего точки с координатами $(0,0)$ и $(y, Sin\ y)$ и замечено, что этот отрезок ниже графика: 1 балл. (●) Есть идея рассмотрения точки $(xy, x \cdot Sin\ y)$: 1 балл (●) Есть упоминание неравенства $Sin\ x \leq x$: 1 балл.

10.4. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка P такая, что углы PAC и PBC равны. Пусть M – середина стороны AB, а точки K и L – основания перпендикуляров, опущенных из P на стороны AC и BC соответственно. Докажите, что длины отрезков MK и ML равны.

Доказательство. Обозначим за T и S середины отрезков AP и BP соответственно, и докажем равенство треугольников MTK и MSL с соответственными сторонами MK и ML.Действительно, отрезки MT и MS являются средними линиями в треугольнике ABP, параллельными сторонам BP и AP соответственно, поэтому их длины равны половинам длин BP и AP. Отрезки KT и SL являются медианами, проведёнными к гипотенузе в прямоугольных треугольниках APK и BSL соответственно, поэтому их длины равны половинам длин AP и BP. Таким образом. в треугольниках MTK и MSL равны пары смежных сторон MT, KT и SL,SM.

Докажем равенство углов MTK и MSL. Они состоят из углов MTP и KTP, MSP и PSL соответственно. Углы MTP и MSP равны, как противоположные углы параллелограмма MTPS. Углы KTP и PSL, как углы между гипотенузами и медианами к ним в подобных прямоугольных треугольниках

APK и BPL, равны удвоенным углам PAK=PAC и PBL=PBC, равным по условию. Следовательно, равны углы MTK и MSL, а с ними и треугольники MTK и MSL. Значит, равны их соответствующие стороны MK и ML, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. (●) Есть идея рассмотрения середин отрезков AP и BP: 1 балл. (●) Высказана идея равенства треугольников MTK и MSL: 1 балл. (●) Доказаны равенства длин соответствующих сторон этих треугольников: 2 балла. (●) Доказано равенство углов MTK и MSL: 3 балла. (●) За найденные вписанные четырехугольники (2шт) и продвижение по задаче далее (это даёт равенство углов, через него можно выйти на равенство/подобие треугольников) давался 1 балл.

10.5. Какое максимальное количество подмножеств из 4 элементов можно выбрать во множестве из 8 элементов так, чтобы пересечение любых трёх из выбранных подмножеств содержало не более одного элемента?

Ответ. Восемь.

Решение. Приведём два различных примера выбора восьми 4-х элементных подмножеств во множестве X из восьми элементов, удовлетворяющих условию задачи. Оба примера строятся, как геометрические объекты.

Пример 1. Будем считать элементы X вершинами единичного куба, шесть из выбранных множеств будут гранями этого куба, а оставшиеся два – вершинами двух вписанных в этот куб правильных тетраэдров с ребром $\sqrt{2}$. Никакие две вершины этих тетраэдров не лежат на одном ребре куба.

Если среди любых трёх из выбранных подмножеств содержатся оба тетраэдра, либо две параллельных грани, пересечение пусто. Если это две смежных грани и тетраэдр, то пересечение граней даст ребро, которое пересекается с тетраэдром ровно по одной вершине. Если это три попарно смежных грани, то их пересечение содержит единственную вершину - вершину трёхгранного угла, образуемого этими гранями.

Пример 2. Будем считать элементы X вершинами правильного восьмиугольника. Занумеруем его вершины по часовой стрелке от 1 до 8, отметим четырёхугольник M с вершинами под номерами 1,2,3,5. Выбранными подмножествами будем считать M и ещё семь четырёхугольников, получаемых из M поворотами на углы $\frac{2\pi k}{8}, k = 1,2,...,6,7$.

Если бы пересечение каких-то трёх из них содержало не меньше двух вершин, то есть некоторую сторону или диагональ восьмиугольника, отличную от главных, то, повернув все эти три четырёхугольника обратно до совмещения с M, получим три различных отрезка одинаковой длины, соединяющие вершины M. Последнее невозможно, потому, что длины сторон и диагоналей M, измеренных в сторонах, равны 1,1,2,2,3,4, среди них не более двух равных. Если речь идёт о главной диагонали длины 4, то очевидно, что она содержится только в двух из восьми рассматриваемых четырёхугольниках.

Докажем, что, если в 8-ми элементном множестве X произвольно выбраны девять 4-х элементных подмножеств, то пересечение некоторых трёх из них содержит больше одного элемента. Сумма мощностей выбранных подмножеств равна 36, поэтому один из элементов X, обозначим его за $\boldsymbol{x}$, содержится не менее, чем в $k \geq 5$ из них. Удалим из этих k подмножеств $\boldsymbol{x}$ и рассмотрим $k \geq 5$ полученных 3-х элементных подмножеств в 7-элементном множестве Y, равном X без $\boldsymbol{x}$. Сумма мощностей полученных множеств больше, либо равна 15. поэтому один из элементов Y, обозначим его за $\boldsymbol{y}$, содержится не менее, чем в трёх из k полученных 3-ёх элементных множеств. Следовательно, пара элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ содержится не менее, чем в трёх из девяти выбранных 4-х элементных подмножеств из X.

Критерии оценивания. (●) Пример для восьми подмножеств: 3 балла. (●) Доказательство оценки: 4 балла. (●) Отсутствие обоснования примера: минус 1 балл.

11 класс. Решения.

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

11.1. В треугольнике ABC биссектрисы углов BAC и BCA пересекают стороны BC и AB в точках K и P соответственно. Известно, что длина стороны AC равна сумме длин отрезков AP и CK. Найдите величину угла ABC.

Ответ. 60°.

Решение 1. Обозначим величины углов треугольника ABC соответствующими им буквами A, B и C, а точку пересечения биссектрис за I. Отразим точки P и K относительно биссектрис AK и CP соответственно, их образами будут точки P' и K' на стороне AC такие, что AP'= AP, CK'=CK. Ввиду равенства AP'+CK'=AP+CK=AC точки P' и K' совпадают, обозначим эту точку за M. Величины углов AMI=API=APC=180°-A-C/2,CMI=CKI=CKA=180°-C-A/2. Их сумма равна 360°-3(A+C)/2=360°-270°+3B/2=90°+3B/2=180°, откуда B=60°. Значит, величина угла ABC равна 60.

Решение 2. Обозначим длины сторон AB, BC, AC треугольника за c,a,b соответственно и найдём длины всех используемых в задаче отрезков, используя свойство биссектрисы. Тогда $AP=\frac{bc}{a+b}, CK=\frac{ab}{b+c}$, откуда $AP+CK=\frac{bc}{a+b}+\frac{ab}{b+c}=\frac{b^2c+bc^2+a^2b+ab^2}{ab+ac+bc+b^2}=AC=b$. Сократим обе части на b, умножим на знаменатель, приведём подобные, получим: $b^2=a^2+c^2-ac$. По теореме косинусов $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot CosB$, откуда $CosB=\frac{1}{2}$ и $B=\angle ABC=60$ °.

Критерии оценивания. В первом решении (●) Присутствует идея отражения точек P и K относительно биссектрис AK и CP: 1 балл, (●) Показано, что образы при таком отражении дадут общую точку на стороне AC: ещё 1 балл. Во втором решении (●) Найдены AP и CK: 3 балла. (●) Получено равенство $b^2=a^2+c^2-ac$: ещё 2 балла. (●) Отсюда получен $CosB=\frac{1}{2}$: 2 балла.

(●)Рассмотрен частный случай при определенном расположении радиусов: 2 балла.

11.2. Тройка действительных чисел A,B,C такова, что $SinA+SinB+SinC=0$ и $CosA+CosB+CosC=0$. Найти значение выражения $Cos(A-B)+Cos(B-C)+Cos(C-A)$.

Ответ. $-\frac{3}{2}$.

Решение. Возведём два первых выражения в квадрат, получим $(SinA+SinB+SinC)^2=Sin^2A+Sin^2B+Sin^2C+2(SinA\cdot SinB+SinB\cdot SinC+SinA\cdot SinC)=0$

и $(CosA+CosB+CosC)^2=Cos^2A+Cos^2B+Cos^2C+$
$+2(CosA\cdot CosB+CosB\cdot CosC+CosA\cdot CosC)=0$. Складывая полученные выражения, имеем
$3+2(SinA\cdot SinB+SinB\cdot SinC+SinA\cdot SinC+CosA\cdot CosB+CosB\cdot CosC+CosA\cdot CosC)=0$.
Учитывая равенства
$SinA\cdot SinB+CosA\cdot CosB=Cos(A-B), SinA\cdot SinC+CosA\cdot CosC=Cos(C-A),$ и
$SinB\cdot SinC+CosB\cdot CosC=Cos(B-C),$ получим
$3+2(Cos(A-B)+Cos(B-C)+Cos(C-A))=0$, откуда
$Coc(A-B)+Cos(B-C)+Cos(C-A)=-\dfrac{3}{2}$.

Критерии оценивания. (●) Возведение равенств из условия в квадрат: 2 балла. (●) Сложение полученных выражений: 1 балл. (●) Использовани е формул косинуса разности: 3 балла.

11.3. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} x^5=y^3+2z, \\ y^5=z^3+2x, \\ z^5=x^3+2y. \end{cases}$$

Ответ. Три решения: $(0,0,0),\pm(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Решение. 1. Найдём легко угадываемые решения системы, когда значения всех переменных равны между собой, то есть когда $x=y=z$. Тогда $x^5-x^3-2x=0$, откуда $x=0$ или $x=\pm\sqrt{2}$. Это и приводит к трём указанным в ответе решениям $(0,0,0),\pm(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$. Докажем, что других решений нет.

2. В любом решении все переменные одного знака, они либо неотрицательны, либо не положительны. Это следует их того, что нечётная степень числа имеет тот же знак, что и само число. Действительно, среди переменных две имеют одинаковый знак, тогда правая часть уравнения, содержащего эти переменные, имеет тот же знак, значит и левая часть, а с ней и третья переменная имеют тот же знак. Кроме того, если одна из переменных равна 0, то левая часть соответствующего уравнения равна 0, значит сумма двух чисел одного знака в правой части тоже равна 0, поэтому каждое из этих чисел равно 0. Следовательно, дальше можно считать, что все переменные не равны 0. При умножении решения системы на –1 снова получаем решение, следовательно, дальше можно считать, что $x,y,z>0$.

3. Рассмотрим поведение функции $f(x)=x^5-x^3-2x$ при $x\ge 0$. Используя разложение $f(x)=x^5-x^3-2x=x(x^2+1)(x^2-2)$, мы видим, что значение функции равно 0 при $x=0$ и $x=\sqrt{2}$, положительно при $x>\sqrt{2}$ и отрицательно при $0<x<\sqrt{2}$. Отсюда следует, что все переменные не могут быть одновременно больше или одновременно меньше $\sqrt{2}$. В противном случае, сложив все три уравнения, получим $f(x)+f(y)+f(z)=0$. В левой части стоит сумма трёх чисел одного знака, поэтому они все должны равняться 0, откуда следует, что при этом $x=y=z=\sqrt{2}$. Итак, остались два случая, $x>\sqrt{2}\ge y,z$ и $x,y\ge\sqrt{2}>z$.

4. Если $x > \sqrt{2} \geq y, z$, тогда $x^5 - y^3 - 2z \geq x^5 - x^3 - 2x > 0$ - это не решение. Если $x, y \geq \sqrt{2} > z$, то $z^5 - x^3 - 2y < z^5 - z^3 - 2z < 0$ - это тоже не решение. Таким образом доказано, что других решений, кроме уже найденных, нет.
Критерии оценивания. (●) Путём подбора найдены все три решения: 1 балл. (●) Доказано, что значения всех переменных решения имеют один знак: 2 балла. (●) Исключены случаи, когда все переменные одновременно больше или одновременно меньше $\sqrt{2}$: 2 балла.

11.4. В возрастающей арифметической прогрессии из ***n*** натуральных чисел каждый член, кроме последнего, делится на свой номер в прогрессии, а последний - нет. Докажите, что ***n*** является степенью некоторого простого числа.
Доказательство. Обозначим члены арифметической прогрессии за $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, а её разность - за d. Предположим противное, что n не является степенью простого числа, тогда n делится хотя бы на два различных простых числа. В таком случае, n можно представить в виде произведения двух взаимно простых чисел p и q, меньших n, где $p > 1$ - максимальная степень первого из этих простых чисел, делящая n, а $q = \dfrac{n}{p}$ - делится на второе из этих простых чисел и тоже больше 1. По условию, $a_p = a_1 + d(p-1) = a_1 - d + dp$ делится на p, следовательно, $a_1 - d$ делится на p. Аналогично, $a_q = a_1 + d(q-1) = a_1 - d + dq$ делится на q, следовательно, $a_1 - d$ делится на q. Из взаимной простоты p и q следует, что $a_1 - d$ делится на произведение $pq = n$, значит и $a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 - d + dn$ делится на n, что противоречит условию.
Критерии оценивания. (●) Замечено и доказано, что, если n не является степенью простого числа, то его можно представить в виде произведения двух взаимно простых чисел: 2 балла. Если это замечено, но не доказано: 1 балл. (●) Есть замечание о том, что $a_1 - d$ делится на p и q: 1 балл. (●) Доказано, со ссылкой на взаимную простоту p и q, что $a_1 - d$ делится на произведение $pq = n$: 3 балла. Если явной ссылки на взаимную простоту нет: 1 балл. (●) Доказано, что отсюда следует, что a_n делится на n: 1 балл.

11.5. На одной стороне каждой из 100 карточек написали одно из натуральных чисел от 1 до 100 включительно (каждое число записано ровно на одной карточке), после чего перевернули их обратными сторонами вверх и разложили в произвольном порядке на столе. За один вопрос Вася может указать на две любые карточки, после чего получает от ведущего ответ, являются ли записанные на них числа соседними (отличающимися на 1). За какое минимальное число вопросов Вася может гарантированно назвать хотя бы одну пару карточек, на которых написаны соседние числа?
Ответ. За 98 вопросов.

Решение. Пусть Вася выберет какую-то карточку А и задаст 98 вопросов, в каждом из которых он спросит про А и одну из 99 карточек, отличных от А. Общее количество чисел, не соседних с числом, написанным на А не превосходит 98, если на А написано 1 или 100, и 97, если на А написаны числа от 2 до 99. Тогда либо в одном из 98 ответов будет дан положительный ответ, и Вася нашёл нужную пару соседних чисел, либо все эти карточки содержат числа, не соседние с числом на А. Следовательно, оставшаяся карточка содержит число, соседнее с числом на А. Таким образом, Васе достаточно 98 вопросов.

Докажем, что, если Вася задаст всего 97 любых вопросов, он может не найти ни одной пары карточек с соседними числами. Предположим противное, что задав некоторые 97 вопросов он смог точно указать на пару карточек с соседними числами. Переведём задачу на язык теории графов. Карточки будем считать вершинами графа Г, а заданные Васей вопросы – рёбрами Г (синими рёбрами), соединяющими соответствующие пары карточек. К этим рёбрам нужно добавить ещё одно, соответствующее той паре карточек, на которых написана пара соседних, по версии Васи, чисел. Теперь нужно доказать, что вершины Г могут быть занумерованы в таком порядке, что ни одно ребро не соединяет две вершины с соседними номерами. То есть, нужно дорисовать в графе путь из 99 рёбер, проходящий последовательно по всем 100 вершинам, и не содержащих ни одного из 98 «Васиного» синего ребра. Это будет означать, что Васина догадка не верна. Назовём такой путь *красным* и будем строить его методом математической индукции по числу вершин графа Г.

Предположим, что в любом графе с числом вершин $n \le 99$, в котором проведено не больше $n-2$ синих рёбер, существует красный путь Р по всем вершинам, не содержащий синих рёбер. Построим красный путь в Г.

1) Пусть в Г есть «крайняя» вершина $\boldsymbol{v}$, из которой выходит ровно одно ребро $\boldsymbol{e}$. В графе Г´, полученном из Г удалением вершины $\boldsymbol{v}$ и ребра $\boldsymbol{e}$ число вершин равно 99, а рёбер – не больше 97, выполнено предположение индукции, поэтому в Г´ можно построить красный путь длины 98 с началом в вершине $\boldsymbol{a}$ и концом в вершине $\boldsymbol{b}$. Тогда ребро $\boldsymbol{e}$ не соединяет вершину $\boldsymbol{v}$ с одной из $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$, проведя красное ребро из $\boldsymbol{v}$ в эту вершину, получим красный путь длины 99 в Г.

2) Пусть в Г нет вершин, из которых выходит ровно одно ребро. В таком случае все синие рёбра инцидентны в сумме 196 вершинам степени не меньше 2 каждая, следовательно, среди них не больше 98 различных. Следовательно, в Г не меньше двух вершин $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ из которых не выходит ни одного синего ребра. Удалим из Г вершины $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ и два ребра, выходящие из некоторой четвёртой вершины $\boldsymbol{s}$ (но не саму вершину). Полученный граф Г´ снова удовлетворяет предположению индукции и в нём можно построить красный путь длины 97 с началом в вершине $\boldsymbol{a}$ и концом в вершине $\boldsymbol{b}$. Если он не проходит через $\boldsymbol{s}$, или проходит, но не проходит через удалённые рёбра, соединим $\boldsymbol{a}$ с $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{b}$ с $\boldsymbol{v}$ и получим красный путь в Г длины 99.

В оставшихся случаях, обозначим за $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ вторые концы удалённых рёбер.

Если красный путь в Г′ проходит через ***x,s,y***, заменим этот фрагмент на ***x***, ***u, s, v*** ***,y***. Если он проходит только через одно удалённое ребро, скажем, через ***x***, ***s***, заменим его на ***x,u,v s***. В обоих случаях получится красный путь в Г.
База индукции - случаи графов с 3 и 4 вершинами - очевидна.
Критерии оценивания. (●) Приведён алгоритм отыскания пары карточек с соседними числами: 2 балла. Отсутствие обоснования – минус 1 балл. (●)
(●) При верно изложенном алгоритме неверный ответ 99 вопросов: 1 балл (●) Верно сформулировано доказываемое по индукции утверждение о том, что при любых 98 отмеченных рёбрах можно построить цепь из 99 рёбер, не содержащую отмеченных: 1 балл. (●) Доказательство того, что количество вопросов не меньше 98: 5 баллов. Если при в целом верном индукционном доказательстве не рассмотрены существенные случаи – минус до 3 баллов.