ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

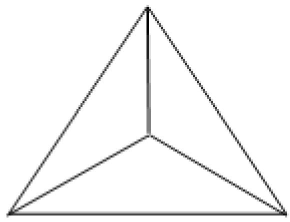
2 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. На поляне растут 4 дерева. От каждого дерева отходят ровно три прямые тропинки к трём другим деревьям. Нарисуйте, как могут быть расположены деревья и тропинки.
Ответ. Например, так:



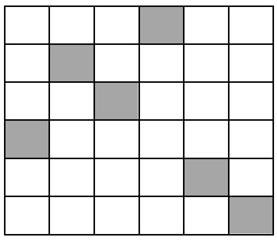
Комментарий. *Верный рисунок – 20 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл.*

2. 14 бельчат распределили между собой 14 кедров, и 4 дня собирали с них орехи. Каждый день с одного кедра собирал орехи только один бельчонок. В первый день некоторые бельчата перепутали свои кедры. Во второй день перепутавших было на 3 больше, в третий – на 4 больше второго дня, в четвертый день – на 5 больше третьего. Сколько бельчат собирали орехи со своего кедра во второй день?
Ответ. 9.
Решение. Если в первый день больше двух бельчат перепутали кедры, то во второй день перепутали 6 или больше, в третий 10 или больше, в последний день должны перепутать 15 или больше, но их всего 14. Поэтому в первый день не больше двух бельчат перепутали кедры. Но не может быть ровно одного перепутавшего, он должен перепутать с кем-то. Значит, в первый день два бельчонка перепутали кедры. Тогда во второй день ошиблись 5

бельчат, в третий 9, в четвёртый 14. Во второй день собирали орехи со своего кедра $14 - 5 = 9$ бельчат.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение верное, но недостаточно обосновано – 18 баллов. Есть недочёты, которые нетрудно исправить – 15 баллов. В решении значительные недочёты – 10 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Только верный ответ – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Продвижение отсутствует – 0 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. Четырёх девочек зовут Маша, Саша, Даша и Оля. У каждой есть по собаке и по кошке. Собаки все разных пород: дог, овчарка, пудель и такса. А кошки все разного цвета: рыжая, серая, черная и белая. Известно, что у Даши и Оли не рыжая кошка. Серая кошка или у Маши, или у Саши. Чёрная кошка или у Маши, или Оли. У Саши кошка не рыжая. У девочки с белой кошкой такса. Дог не у Маши. Пудель у Саши. У кого из девочек овчарка?
Ответ. У Маши.
Решение. Рыжая кошка у Маши. Значит, серая кошка у Саши, а чёрная кошка у Оли. Тогда у Даши белая кошка, и у неё такса. У Саши пудель, у Маши не дог, значит, овчарка.
Комментарий. *Полностью верно расписано, у кого какая кошка и собака – 20 баллов. Есть указания на ход решения, и получен верный ответ, но решение подробно не изложено – 18 баллов. Верно расписано, у кого какая собака, но без обоснования – 15 баллов. Решение в целом верное, однако содержит ошибки – 15 баллов. При верном ходе решения допущены существенные ошибки – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. Только верный ответ – 5 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.*

4. Расставьте в незакрашенных клетках числа $1, 2, 3, 4, 5$ (по одному числу в клетку) так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке встречались по разу все числа.



Ответ. Например, так:

4	2	3		5	1
3		1	2	4	5
5	1		3	2	4
	3	5	4	1	2
1	4	2	5		3
2	5	4	1	3	

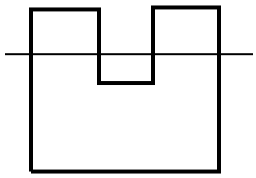
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. Только неверный ответ – 0 баллов.*

5. Ваня первый раз тренировался во вторник. Потом через день, в четверг. Потом через два дня, в воскресенье. И дальше промежутки между тренировками каждый раз были на день больше. В какой день недели у Вани будет девятнадцатая тренировка?
Ответ. Во вторник.

Решение. Если между тренировками проходит $7 + a$ дней, это то же самое, как будто прошло a дней, потому что через 7 дней дни недели повторяются. Перед девятнадцатой тренировкой должно пройти $18 = 7 \cdot 2 + 4$ дня. Девятнадцатая тренировка будет в тот же день недели, что и пятая, то есть во вторник.
Вт*Четв**Вос***Четв****Вт*****Пон******Пон*******Вт********Четв*********Вос.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ход решения, но допущена ошибка, или не закончено – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. Только верный ответ без обоснований – 10 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.*

Вариант 2

1. Нарисуйте фигуру, которую можно одним прямолинейным разрезом разделить на 3 части.
Ответ. Например:



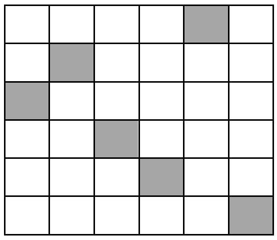
Комментарий. *Верный рисунок – 20 баллов. Указана возможная фигура, но не показано разрезание – 15 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл.*

2. На дерево по очереди забрались 5 бельчат: Ал, Кат, Лон, Бин и Сон. Известно, что Ал не был первым. Лон не был вторым. Бин не был ни первым, ни последним. Сон забрался на дерево сразу после Ала. Кат забрался через одного бельчонка после Лона. В каком порядке забрались на дерево бельчата?
Ответ. Лон, Бин, Кат, Ал, Сон.
Решение. Кат, Ал, Бин, Сон не были первыми. Значит, первый Лон. Тогда Кат третий. Бин и Ал не были последними, значит, последний Сон. Тогда Ал четвертый, а Бин второй.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Только верный ответ без обоснований – 15 баллов. Верный ход решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Продвижение отсутствует – 0 баллов.*

3. На Поле Чудес стоит автомат, который меняет одну золотую монету на три серебряных, а одну серебряную на две золотых. У Буратино были три золотых монеты и одна серебряная. Он 5 раз воспользовался автоматом, и у него оказалось 12 монет. Сколько из них золотых?
Ответ. 4.
Решение. Число монет у Буратино увеличилось на $12 - 4 = 8$. За один раз число монет может увеличиться на 2 или на 1. Представим 8 в виде суммы пяти слагаемых, единиц и двоек: $8 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1$. Буратино может обменять 3 золотых монеты на 9 серебряных, после этого у него будет 10 серебряных монет. При четвёртом и пятом подходе к автомату он обменяет две серебряных на четыре золотых, будет 12 монет, из них 4 золотых.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Не учтена имеющаяся серебряная монета – 15 баллов. Сделан расчёт по монетам, но не показано, что за пять раз – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Только верный ответ без обоснований – 5 баллов.*

Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.

4. Расставьте в незакрашенных клетках числа $1, 2, 3, 4, 5$ (по одному числу в клетку) так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке встречались по разу все числа.



Ответ. Например, так:

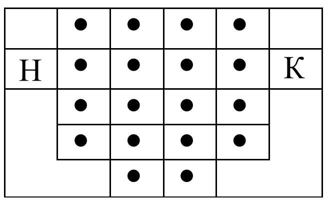
2	4	5	1		3
1		2	3	4	5
	1	3	5	2	4
3	2		4	5	1
5	3	4		1	2
4	5	1	2	3	

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. Только неверный ответ – 0 баллов.*

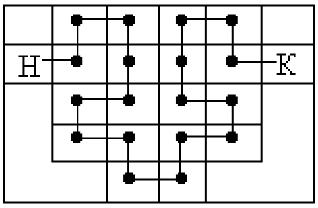
5. Костя первый раз тренировался в среду. Потом через день, в пятницу. Потом через два дня, в понедельник. И дальше промежутки между тренировками каждый раз были на день больше. В какой день недели у Кости будет шестнадцатая тренировка?
Ответ. В пятницу.
Решение. Если между тренировками проходит $7 + a$ дней, это то же самое, как будто прошло a дней, потому что через 7 дней дни недели повторяются. Перед шестнадцатой тренировкой должно пройти $15 = 7 \cdot 2 + 1$ дней. Шестнадцатая тренировка будет в тот же день недели, что и вторая, то есть в пятницу.
Ср*Пят**Пон***Пят****Ср*****Вт******Вт*******Ср********Пят*********Пон...
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ход решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. Только верный ответ без обоснований – 10 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.*

Вариант 3

1. На поляне растут грибы (они показаны на рисунке точками). Бельчонок прошёл из начала (точка Н) в конец (точка К) за 19 шагов и собрал все грибы. Шаг бельчонка – отрезок до точки в соседней по стороне клетке. Нарисуйте маршрут бельчонка.



Ответ.



Комментарий. *Верный рисунок – 20 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл.*

2. В классе учатся Вася, Коля, Дима, Миша, Петя и Денис. Расположите их по росту от самого высокого до самого низкого, если известно, что Коля ниже Миши, а Дима выше Дениса, Вася ниже Пети, Дима ниже Коли, Вася выше Миши.

Ответ. Петя, Вася, Миша, Коля, Дима, Денис.

Решение. Коля ниже Миши, но выше Димы, Дима выше Дениса. Получаем часть цепочки: Миша, Коля, Дима, Денис. Вася выше Миши, но ниже Пети, достраиваем цепочку.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Только верный ответ без обоснований – 15 баллов. Верный ход решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Продвижение отсутствует – 0 баллов.*

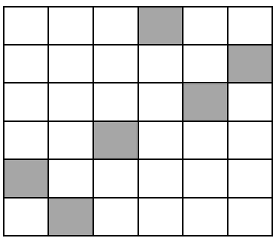
3. У Жени три сестры – Зина, Аня и Лена. За неделю все они получили только пятёрки и четвёрки. Женей получено пятёрок на 2 меньше, чем четвёрок. У Зины пятёрок на 7 больше, чем четвёрок, а у Ани пятёрок на 5 больше, чем четвёрок. Может ли у всех сестёр Лены в сумме пятёрок быть в 5 раз больше, чем четвёрок?

Ответ. Может.

Решение. Например, Женя мальчик, у Зины 8 пятёрок и одна четвёрка, а у Ани 7 пятёрок и 2 четвёрки. Тогда у сестёр Лены в сумме 15 пятёрок и 3 четвёрки.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ответ «нет» с обоснованием – 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Ответ «да» без обоснования – 1 балл. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

4. Расставьте в незакрашенных клетках числа $1, 2, 3, 4, 5$ (по одному числу в клетку) так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке встречались по разу все числа.



Ответ. Например, так:

5	3	4		1	2
4	5	1	2	3	
2	4	5	1		3
3	2		4	5	1
	1	3	5	2	4
1		2	3	4	5

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. Только неверный ответ – 0 баллов.*

5. Игорь первый раз тренировался в понедельник. Потом через день, в среду. Потом через два дня, в субботу. И дальше промежутки между тренировками каждый раз были на день больше. В какой день недели у Игоря будет восемнадцатая тренировка?
Ответ. В среду.
Решение. Если между тренировками проходит $7 + a$ дней, это то же самое, как будто прошло a дней, потому что через 7 дней дни недели повторяются. Перед восемнадцатой тренировкой должно пройти $17 = 7 \cdot 2 + 3$ дней. Восемнадцатая тренировка будет в тот же день недели, что и четвёртая, то есть в среду.
Пон*Ср**Суб***Ср****Пон*****Вос******Вос*******Пон********Ср*********Суб...
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ход решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. Только верный ответ без обоснований – 10 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.*

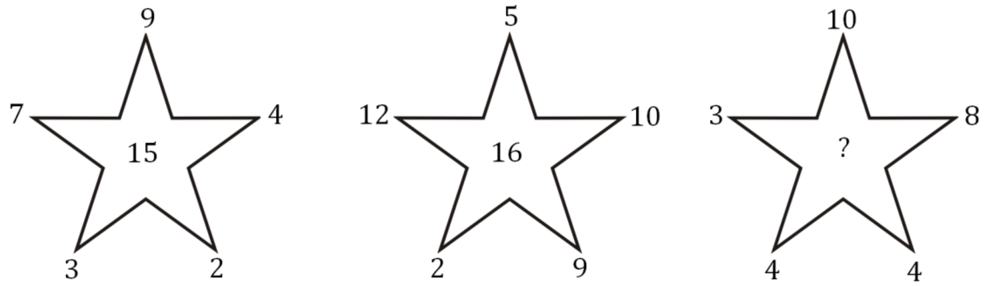
3 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

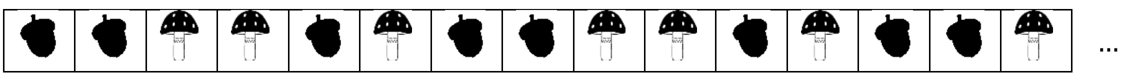
Вариант 1

1. Найдите правило, по которому расставлены числа на концах и в центре звёздочки. Какое число стоит на месте вопросительного знака?



Ответ. 13.
Решение. $(7+9+4)-(2+3)=15$, $(12+5+10)-(2+9)=16$, $?=(3+10+8)-(4+4)=13$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ответ без объяснений – 10 баллов.*

2. Орехи и грибы расположены в ящиках в следующем порядке:



Найдите количество ящиков с грибами, если известно, что всего 81 ящик.
Ответ. 40.
Решение. Заметим, что имеется период из повторяющихся 6 ящиков, среди которых по 3 ящика с орехами и 3 ящика с грибами. Среди 81 ящика 13 таких периодов, 2 ящика с орехами и 1 ящик с грибом от 14 периода, то есть всего $13\cdot 3+1=40$ ящиков с грибами.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Замечено, что имеется период из повторяющихся ящиков – 8 баллов; после этого установлено, что ящиков с грибами 40 – 12 баллов. Баллы суммируются. В верном решении допущена арифметическая ошибка – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла.*

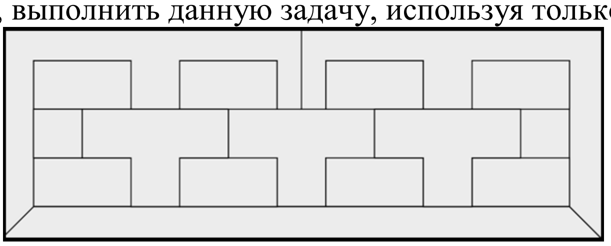
3. Семья состоит из четырёх человек: папа, мама, сын и дочь. Папа старше мамы на 4 года. Сын также старше дочери на 4 года и вдвое младше папы, а всем четверым вместе 130 лет. Сколько лет каждому из них?

Ответ. Папе 46 лет, маме – 42, сыну – 23 и дочери – 19.

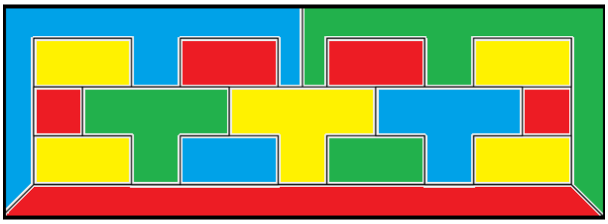
Решение. Добавим мысленно маме и дочери по 4 года. Теперь папа и мама одного возраста, сын и дочь тоже. И папа, и мама теперь вдвое старше и сына, и дочери. Всем четверым вместе стало 138 лет. Значит, папе и сыну вместе 69 лет. Так как папа вдвое старше сына, то папе 46 лет, а сыну 23 года. Вспомним, что на самом деле папа старше мамы на 4 года, а сын старше сестры на 4 года. Отсюда маме 42 года и сестре 19 лет.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Верная идея решения, но ответ получен неверный – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла.*

4. Поставьте во все области на рисунке цифры 1, 2, 3, 4 (по одной в каждую) так, чтобы области, которые имеют общую границу, содержали бы разные цифры. Почему нельзя, не нарушая этого правила, выполнить данную задачу, используя только три цифры: 1, 2, 3?



Ответ. Для наглядности раскрасим области в четыре цвета.



Выполнить задачу, используя три цвета нельзя из-за наличия трёх соседей у некоторых областей.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верная расстановка цифр – 12 баллов; доказано, что задача не выполнима, если используется только три цифры – 8 баллов. Баллы суммируются.*

5. Бельчата Вася, Коля и Миша часто ходят в тайник. Каждый из них берет оттуда семечко или ягоду. Если Вася взял ягоду, то Коля берёт то же, что и Миша. Если Коля берёт ягоду, то Вася всегда выбирает не то, что берёт Миша. А если Миша берёт семечко, то Вася берёт то же самое, что взял Коля. Кто из бельчат всегда берёт один и тот же предмет?

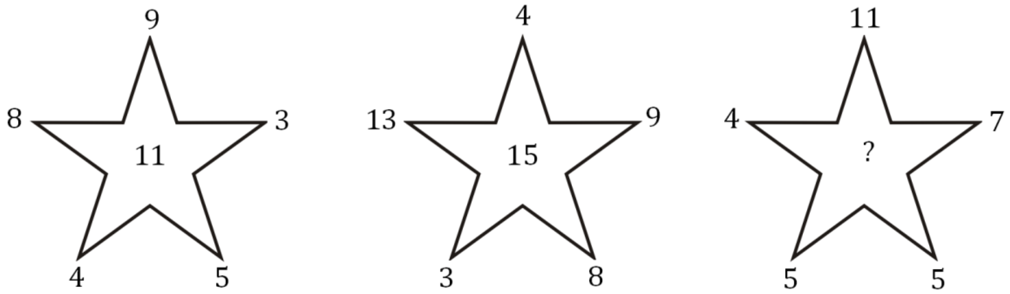
Ответ. Вася всегда берёт только семечко.

Решение. Если Вася берет ягоду, то у Коли и Миши у обоих либо ягода, либо семечко. Но тогда, если у Миши семечко, то у Васи должна быть семечко, как у Коли. Может быть, у всех тогда ягода? Но тогда противоречие, что у Васи должен быть не такой предмет, как у Миши. Проверим, что у остальных могут быть разные варианты. Действительно, варианты: СЯЯ и ССС возможны.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

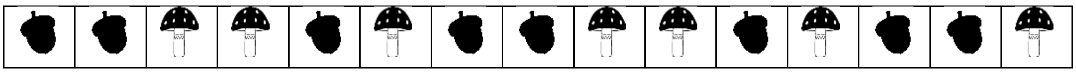
Вариант 2

1. Найдите правило, по которому расставлены числа на концах и в центре звёздочки. Какое число стоит на месте вопросительного знака?



Ответ. 12.
Решение. $(8 + 9 + 3) - (4 + 5) = 11$, $(13 + 4 + 9) - (3 + 8) = 15$, $? = (4 + 11 + 7) - (5 + 5) = 12$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ответ без объяснений – 10 баллов.*

2. Орехи и грибы расположены в ящиках в следующем порядке:

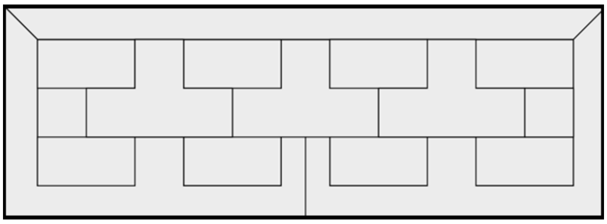


...

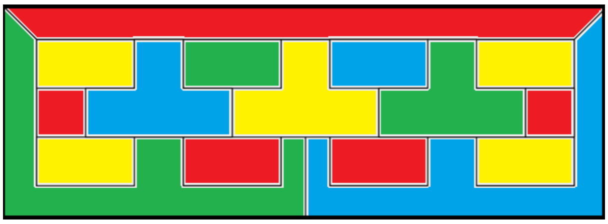
Найдите количество ящиков с грибами, если известно, что всего 87 ящиков.
Ответ. 43.
Решение. Заметим, что имеется период из повторяющихся 6 ящиков, среди которых по 3 ящика с орехами и 3 ящика с грибами. Среди 87 ящиков 14 таких периодов, 2 ящика с орехами и 1 ящик с грибом от 15 периода, то есть всего $14 \cdot 3 + 1 = 43$ ящика с грибами.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Замечено, что имеется период из повторяющихся ящиков – 8 баллов; после этого установлено, что ящиков с грибами 43 – 12 баллов. Баллы суммируются. В верном решении допущена арифметическая ошибка – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла.*

3. Семья состоит из четырёх человек: папа, мама, сын и дочь. Папа старше мамы на 4 года. Сын также старше дочери на 4 года и вдвое младше папы, а всем четверым вместе 136 лет. Сколько лет каждому из них?
Ответ. Папе 48 лет, маме – 44, сыну – 24 и дочери – 20.
Решение. Добавим мысленно маме и дочери по 4 года. Теперь папа и мама одного возраста, сын и дочь тоже. И папа, и мама теперь вдвое старше и сына, и дочери. Всем четверым вместе стало 144 года. Значит, папе и сыну вместе 72 года. Так как папа вдвое старше сына, то папе 48 лет, а сыну 24 года. Вспомним, что на самом деле папа старше мамы на 4 года, а сын старше сестры на 4 года. Отсюда маме 44 года и сестре 20 лет.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Верная идея решения, но ответ получен неверный – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла.*

4. Поставьте во все области на рисунке цифры 1, 2, 3, 4 (по одной в каждую) так, чтобы области, которые имеют общую границу, содержали бы разные цифры. Почему нельзя, не нарушая этого правила, выполнить данную задачу, используя только три цифры: 1, 2, 3?



Ответ. Для наглядности раскрасим области в четыре цвета.



Выполнить задачу, используя три цвета нельзя из-за наличия трёх соседей у некоторых областей.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верная расстановка цифр – 12 баллов; доказано, что задача не выполнима, если используется только три цифры – 8 баллов. Баллы суммируются.*

5. Бельчата Вера, Кира и Маша часто ходят в тайник. Каждая из них берёт оттуда сухофрукт или орех. Если Вера взяла орех, то Кира берёт то же, что и Маша. Если Кира берёт орех, то Вера всегда выбирает не то, что берёт Маша. А если Маша берёт сухофрукт, то Вера берёт то же самое, что взяла Кира. Кто из бельчат всегда берёт один и тот же предмет?

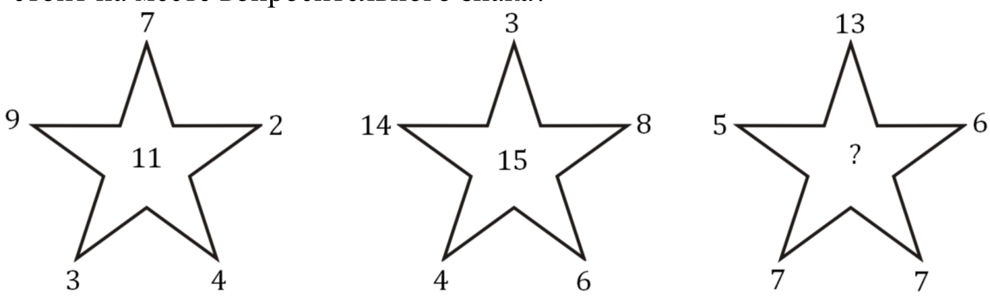
Ответ. Вера всегда берёт только сухофрукт.

Решение. Если Вера берет сухофрукт, то у Киры и Маши у обеих либо орех, либо сухофрукт. Но тогда, если у Маши сухофрукт, то у Веры должен быть сухофрукт, как у Киры. Может быть, у всех тогда орех? Но тогда противоречие, что у Веры должен быть не такой предмет, как у Маши. Проверим, что у остальных могут быть разные варианты. Действительно, варианты: СОО и ССС возможны.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

Вариант 3

1. Найдите правило, по которому расставлены числа на концах и в центре звездочки. Какое число стоит на месте вопросительного знака?

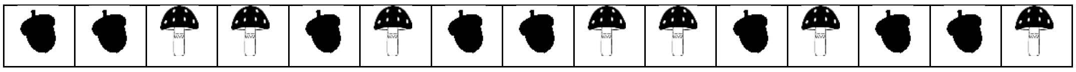


Ответ. 10.

Решение. $(9+7+2)-(3+4)=11$, $(14+3+8)-(4+6)=15$, $?=(5+13+6)-(7+7)=10$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ответ без объяснений – 10 баллов.*

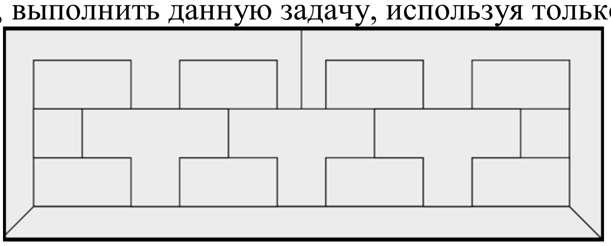
2. Орехи и грибы расположены в ящиках в следующем порядке:



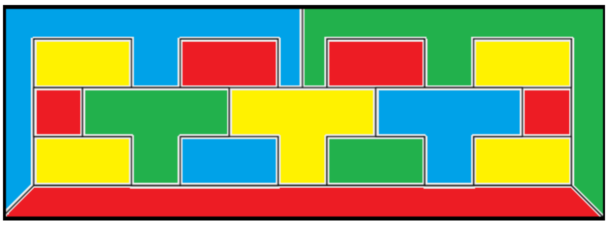
Найдите количество ящиков с грибами, если известно, что всего 93 ящика.
Ответ. 46.
Решение. Заметим, что имеется период из повторяющихся 6 ящиков, среди которых по 3 ящика с орехами и 3 ящика с грибами. Среди 93 ящиков 15 таких периодов, 2 ящика с орехами и 1 ящик с грибом от 16 периода, то есть всего $15 \cdot 3 + 1 = 46$ ящиков с грибами.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Замечено, что имеется период из повторяющихся ящиков – 8 баллов; после этого установлено, что ящиков с грибами 46 – 12 баллов. Баллы суммируются. В верном решении допущена арифметическая ошибка – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла.*

3. Семья состоит из четырёх человек: папа, мама, сын и дочь. Папа старше мамы на 4 года. Сын также старше дочери на 4 года и вдвое младше папы, а всем четверым вместе 142 лет. Сколько лет каждому из них?
Ответ. Папе 50 лет, маме – 46, сыну – 25 и дочери – 21.
Решение. Добавим мысленно маме и дочери по 4 года. Теперь папа и мама одного возраста, сын и дочь тоже. И папа, и мама теперь вдвое старше и сына, и дочери. Всем четверым вместе стало 150 лет. Значит, папе и сыну вместе 75 лет. Так как папа вдвое старше сына, то папе 50 лет, а сыну 25 лет. Вспомним, что на самом деле папа старше мамы на 4 года, а сын старше сестры на 4 года. Отсюда маме 46 лет и сестре 21 год.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Верная идея решения, но ответ получен неверный – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла.*

4. Поставьте во все области на рисунке цифры 1, 2, 3, 4 (по одной в каждую) так, чтобы области, которые имеют общую границу, содержали бы разные цифры. Почему нельзя, не нарушая этого правила, выполнить данную задачу, используя только три цифры: 1, 2, 3?



Ответ. Для наглядности раскрасим области в четыре цвета.



Выполнить задачу, используя три цвета нельзя из-за наличия трёх соседей у некоторых областей.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верная расстановка цифр – 12 баллов; доказано, что задача не выполнима, если используется только три цифры – 8 баллов. Баллы суммируются.*

5. Бельчата Витя, Костя и Марк часто ходят в тайник. Каждый из них берет оттуда жёлудь или ягоду. Если Витя взял ягоду, то Костя берёт то же, что и Марк. Если Костя берёт яго-

ду, то Витя всегда выбирает не то, что берёт Марк. А если Марк берёт жёлудь, то Витя берёт то же самое, что взял Костя. Кто из бельчат всегда берёт один и тот же предмет?
Ответ. Витя всегда берёт только жёлудь.
Решение. Если Витя берет жёлудь, то у Кости и Марка у обоих либо ягода, либо жёлудь. Но тогда, если у Марка жёлудь, то у Вити должен быть жёлудь, как у Кости. Может быть, у всех тогда ягода? Но тогда противоречие, что у Вити должен быть не такой предмет, как у Марка. Проверим, что у остальных могут быть разные варианты. Действительно, варианты: ЖЯЯ и ЖЖЖ возможны.
Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

4 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

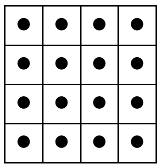
1. За домашнюю работу Алине, Жене и Люде поставили разные оценки: одной тройку, другой четвёрку, третьей пятёрку. Алина подумала: у меня пятёрка! Женя подумала: у меня не тройка. Люда подумала: у меня не пятёрка. Одна из девочек угадала, а две другие ошиблись. Какие оценки получили девочки?

Ответ. У Люды пятёрка, у Жени четвёрка, у Алины тройка.

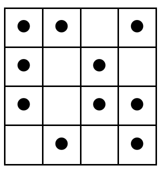
Решение. Пусть угадала Алина. Тогда у Люды не может быть пятёрки, и она тоже говорит правду, хотя правду говорит только одна девочка. Пусть угадала Женя. Тогда у Люды пятёрка, у Жени четвёрка, у Алины тройка. Этот случай подходит. Пусть угадала Люда. Тогда у Жени тройка, у Люды четвёрка, у Алины пятёрка. Получается, что Люда и Алина обе угадали, противоречие.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В решении рассмотрены не все варианты – 15 баллов. Только верный ответ без обоснований – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. Шестнадцать бельчат сидели, как показано на рисунке. Шесть бельчат убежали. Покажите, какие бельчата должны были убежать, чтобы из оставшихся никакие четыре не сидели в вершинах квадрата.



Решение. Например, так

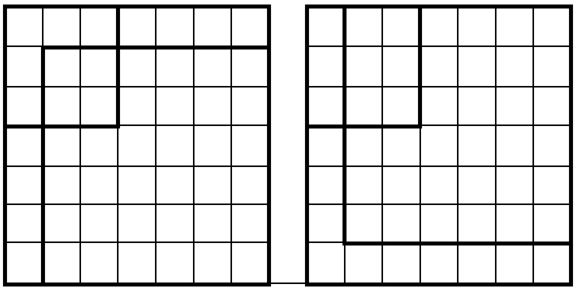


Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть только квадраты со сторонами, не параллельными сторонам большого квадрата – баллы не снижаются. Решение в основном верное, но допущена ошибка – 10 баллов. Предложено неверное решение – 1 балл.*

3. У Васи есть картонная коробка с квадратным основанием, и два бумажных квадрата. Сторона одного бумажного квадрата в 2 раза меньше стороны другого бумажного квадрата. Если Вася помещает бумажные квадраты в противоположные углы картонного основания, то они в два слоя накрывают площадь 4 см². Когда Вася помещает бумажные квадраты в соседние углы, то они в два слоя накрывают площадь 6 см². (Каждый раз бумажные квадраты не выходят за пределы картонного основания). Чему равна сторона квадратного основания?

Ответ. 7(см).

Решение. В первом случае пересечением квадратов является квадрат площади 4 см² (рис. слева), значит, длина стороны этого квадрата равна 2 см. Во втором случае пересечение – прямоугольник, одна сторона которого равна 2 см (рис. справа).



Следовательно, другая сторона этого прямоугольника равна $6 : 2 = 3$(см), а это и есть длина стороны меньшего квадрата. Значит, сторона большего квадрата имеет длину 6 см. Так как стороны квадратов накладываются друг на друга на 2 см, то длина стороны основания равна $6 + 3 - 2 = 7$ (см).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В решении есть верное необоснованное утверждение – 18 баллов. Решение найдено подбором чисел, не доказано, что других решений нет – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Верный ответ без обоснования – 2 балла. Решение начато, но продолжено неверно – 1 балл.*

4. У продавщицы кваса есть трёхлитровые и пятилитровые банки. Мария Ивановна хочет купить четыре литра кваса. Как продавщица может отмерить ей четыре литра в пятилитровую банку?

Решение. Ей потребуются одна 5-литровая и две 3-литровых банки. 1) Налить 5 литров в 5-литровую банку. 2) Перелить 3 литра в первую 3-литровую банку. 3) Перелить 3 литра во вторую 3-литровую банку. 4) Перелить 2 литра из 5-литровой банки в первую 3-литровую банку. 5) Налить 5 литров в 5-литровую банку. 6) Отлить 1 литр из 5-литровой банки в первую 3-литровую банку. После этого в 5-литровой банке останется 4 литра.

	5 литров	3 литра	3 литра
1)	5	0	0
2)	2	3	0
3)	2	0	3
4)	0	2	3
5)	5	2	3
6)	4	3	3

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение в основном верное, но допущены ошибки – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое полезное продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет или продолжено неверно – 1 балл.*

5. 20 рыцарей 5 дней обедали вместе, и у каждого было своё место за столом (всего мест было 20). В первый день некоторые рыцари перепутали места. Во второй день перепутавших было на 2 больше, в третий – на 3 больше второго дня, в четвертый день – на 3 больше третьего, в пятый день – на 3 больше четвёртого. Всё-таки каждый рыцарь за 5 дней сидел на своём месте не меньше трёх раз, а некоторые больше трёх раз. Сколько рыцарей сидело на своём месте в третий день?

Ответ. 13.

Решение. Обозначим число рыцарей, перепутавших место в первый день, через x. Тогда в другие дни перепутали соответственно $x+2,\ x+5,\ x+8,\ x+11$ рыцарей, а всего перепутавших было $x+x+2+x+5+\ x+8+x+11=5x+26.$ Всего рыцари садились за стол $20\cdot5=100$ раз, значит, правильные места были выбраны $100-5x-26=74-5x$ раз. По условию, правильных выборов места больше $20\cdot3=60.$ Отсюда $74-5x>60$, или $5x<14$, то есть $x\le2$. Но $x\ne1$, так как не может быть одного перепутавшего, он должен перепутать с кем-то. Значит, $x=2$. В третий день перепутали места $x+5=2+5=7$ рыцарей, а на своём месте сидели $20-7=13$ рыцарей.

Замечание. Пример, показывающий, что это решение допустимо. В первый день правильно выбрали место рыцари с номерами с 3 по 20. Во второй день – рыцари с номерами с 1 по 16. В третий день – рыцари с номерами с 1 по 13. В четвёртый день правильно выбрали место рыцари с номерами с 14 по 20, номерами 1, 2, и ещё один любой рыцарь. В пятый день правильно выбрали место рыцари с номерами с 17 по 20, и еще три любых рыцаря.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы или неточности – 18 баллов. Не отброшены лишние решения – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. Без доказательства использовано, что в первый день перепутали места 2 рыцаря – 6 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но полезного продвижения нет – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

Вариант 2

1. У каждой из трёх девочек, Нины, Сони и Ани, есть котёнок. Один котёнок белый, другой серый, третий рыжий. Вася сказал: у Ани не белый, у Сони не серый, у Нины белый. Одно утверждение было верным, а в двух других он ошибся. У кого какой котёнок?

Ответ. У Ани белый, у Сони рыжий, у Нины серый.

Решение. Пусть верно, что у Ани не белый. Тогда у Сони серый, у Нины не белый и не серый, то есть рыжий, и Ане остаётся белый, противоречие. Пусть верно, что у Сони не серый. Тогда у Ани белый, у Сони рыжий, у Нины серый. Этот случай подходит. Пусть верно, что у Нины белый. Тогда и у Ани белый, противоречие.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В решении рассмотрены не все варианты – 15 баллов. Только верный ответ без обоснований – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. Шестнадцать бельчат сидели, как показано на рисунке. Восемь бельчат убежали. Покажите, какие бельчата должны были убежать, чтобы из оставшихся никакие четыре не сидели в вершинах квадрата.

●	●	●	●
●	●	●	●
●	●	●	●
●	●	●	●

Решение. Например, так

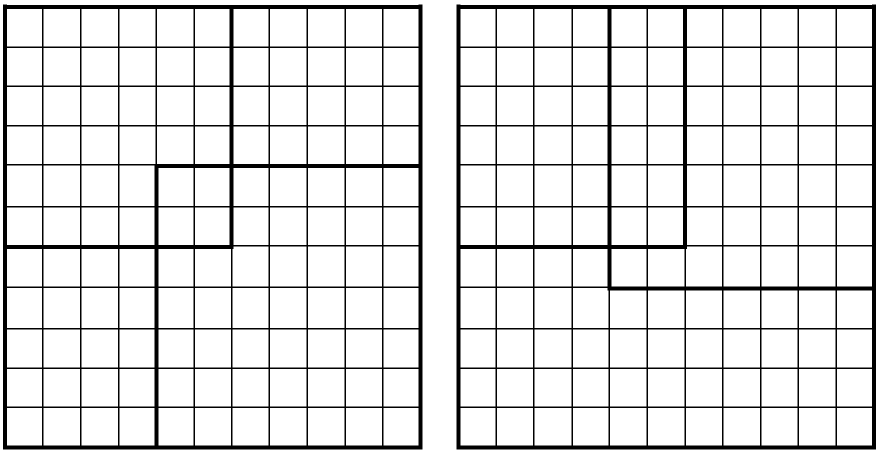
		●	●
●		●	
●		●	
		●	●

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть только квадраты со сторонами, не параллельными сторонам большого квадрата – баллы не снижаются. Решение в основном верное, но допущена ошибка – 10 баллов. Предложено неверное решение – 1 балл.*

3. У Васи есть картонная коробка с квадратным основанием, и два бумажных квадрата. Сторона одного бумажного квадрата на 1 см меньше стороны другого бумажного квадрата. Если Вася помещает бумажные квадраты в противоположные углы картонного основания, то они в два слоя накрывают площадь 4 см². Когда Вася помещает бумажные квадраты в соседние углы, то они в два слоя накрывают площадь 12 см². (Каждый раз бумажные квадраты не выходят за пределы картонного основания). Чему равна сторона квадратного основания?

Ответ. 11 (см).

Решение. В первом случае пересечением квадратов является квадрат площади 4 см² (рис. слева), значит, длина стороны этого квадрата равна 2 см. Во втором случае, пересечение – прямоугольник, одна сторона которого равна 2 см (рис. справа).



Следовательно, другая сторона этого прямоугольника равна $12 : 2 = 6$(см), а это и есть длина стороны меньшего квадрата. Значит, сторона большего квадрата имеет длину 7 см. Так как стороны квадратов накладываются друг на друга на 2 см, то длина стороны основания равна $6 + 7 - 2 = 11$ (см).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В решении есть верное необоснованное утверждение – 18 баллов. Решение найдено подбором чисел, не доказано, что других ре-*

шений нет – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Верный ответ без обоснования – 2 балла. Решение начато, но продолжено неверно – 1 балл.

4. У продавщицы кваса есть одна пятилитровая банка и несколько трёхлитровых. Мария Ивановна пришла с большим бидоном и хочет купить семь литров кваса. Как продавщица может отмерить ей в бидон семь литров?

Решение.

1) Налить 5 литров в 5-литровую банку. 2) Перелить 3 литра в первую 3-литровую банку. 3) Перелить 3 литра из первой 3-литровой банки во вторую. 4) Перелить 2 литра из 5-литровой банки в первую 3-литровую банку. 5) Налить 5 литров в 5-литровую банку. 6) Перелить в бидон 5 литров из 5-литровой банки и 2 литра из первой 3-литровой банки, получится семь литров.

	5 литров	3 литра	3 литра	Бидон
1)	5	0	0	
2)	2	3	0	
3)	2	0	3	
4)	0	2	3	
5)	5	2	3	
6)	0	0	3	$5+2=7$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение в основном верное, но допущены ошибки – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое полезное продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет или продолжено неверно – 1 балл.*

5) 18 бельчат распределили между собой 18 кедров, и 4 дня собирали с них орехи. Каждый день с одного кедра собирал орехи только один бельчонок. В первый день некоторые бельчата перепутали свои кедры. Во второй день перепутавших было на 4 больше, в третий – на 4 больше второго дня, в четвертый день – на 4 больше третьего. Всё-таки каждый бельчонок собирал орехи со своего кедра не меньше двух раз, а некоторые больше двух раз. Сколько бельчат собирали орехи со своего кедра в третий день?

Ответ. 8.

Решение. Обозначим число бельчат, перепутавших кедр в первый день, через x. Тогда в другие дни перепутали соответственно $x+4, x+8, x+12$ бельчат, а всего перепутавших было $x+x+4+x+8+x+12=4x+24$. Всего бельчата выбирали кедр $18\cdot 4=72$ раза, значит, правильных выборов было $72-4x-24=48-4x$. По условию, правильных выборов больше $18\cdot 2=36$. Отсюда $48-4x>36$, или $4x<12$, то есть $x\leq 2$. Но $x\neq 1$, так как не может быть одного перепутавшего, он должен перепутать с кем-то. Значит, $x=2$. В третий день перепутали $x+8=2+8=10$ бельчат, а со своего кедра собирали $18-10=8$ бельчат.

Замечание. Пример, показывающий, что это решение допустимо. В первый день правильно выбрали кедр бельчата с номерами с 1 по 16. Во второй день – бельчата с номерами с 1 по 12. В третий день – бельчата с номерами с 13 по 18, и ещё два бельчонка. В четвёртый день правильно выбрали кедр бельчата с номерами 17, 18 и ещё два бельчонка.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 18 баллов. Не отброшены лишние решения – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. Без доказательства использовано, что в первый день перепутали кедры 2 бельчонка – 6 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но полезного продвижения нет – 1 балл. Только ответ – 0 баллов*

Вариант 3

1. Девочки спрашивали Петю, Олега и Борю, кто из них победил в забеге (бежали они втроём, был один победитель). Петя сказал, что Олег. Олег сказал, что он не победил. Боря тоже сказал, что он не победил. Только один из них сказал правду. Кто из мальчиков победил в забеге и кто сказал правду?

Ответ. Победил Боря, правду сказал Олег.

Решение. Утверждения Пети и Олега противоположны, поэтому одно из них ложное, а другое верное. Поскольку ложных утверждений было два, то утверждение Бори ложное, значит, он победил. Тогда Петя солгал, а Олег сказал правду.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В решении рассмотрены не все варианты – 15 баллов. Только верный ответ без обоснований – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только неверный ответ – 0 баллов.*

Некоторые участники (меньшинство) неверно поняли фразу условия «Боря тоже сказал, что он не победил», считая, что Боря говорил не про себя, а про Олега. За решение задачи в так понятых условиях ставилось 10 баллов (задача делается тривиальной), за ответ без решения – 2 балла.

2. Шестнадцать бельчат сидели, как показано на рисунке. Семь бельчат убежали. Покажите, какие бельчата должны были убежать, чтобы из оставшихся никакие четыре не сидели в вершинах квадрата.

●	●	●	●
●	●	●	●
●	●	●	●
●	●	●	●

Решение. Например, так

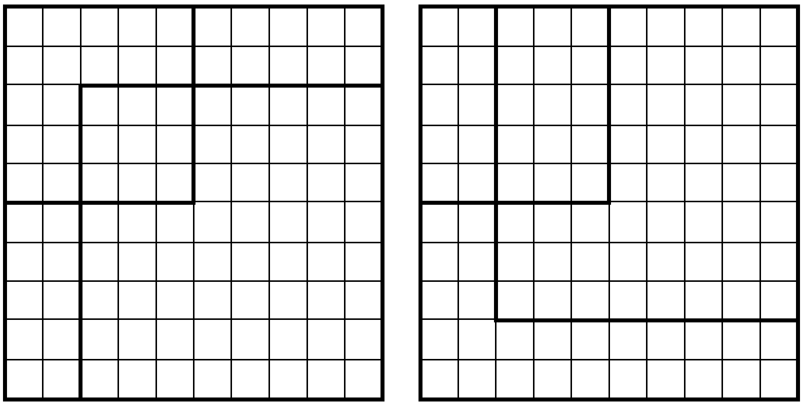
		●	●
●	●	●	
●		●	
		●	●

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть только квадраты со сторонами, не параллельными сторонам большого квадрата – баллы не снижаются. Решение в основном верное, но допущена ошибка – 10 баллов. Предложено неверное решение – 1 балл.*

3. У Васи есть картонная коробка с квадратным основанием, и два бумажных квадрата. Сторона одного бумажного квадрата на 3 см меньше стороны другого бумажного квадрата. Если Вася помещает бумажные квадраты в противоположные углы картонного основания, то они в два слоя накрывают площадь 9 см². Когда Вася помещает бумажные квадраты в соседние углы, то они в два слоя накрывают площадь 15 см². (Каждый раз бумажные квадраты не выходят за пределы картонного основания). Чему равна сторона квадратного основания?

Ответ. 10 (см).

Решение. В первом случае пересечением квадратов является квадрат площади 9 см² (рис. слева), значит, длина стороны этого квадрата равна 3 см. Во втором случае пересечение – прямоугольник, одна сторона которого равна 3 см (рис. справа).



Следовательно, другая сторона этого прямоугольника равна $15 : 3 = 5$(см), а это и есть длина стороны меньшего квадрата. Значит, сторона большего квадрата имеет длину 8 см. Так как стороны квадратов накладываются друг на друга на 3 см, то длина стороны основания равна $5 + 8 - 3 = 10$ (см).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В решении есть верное необоснованное утверждение – 18 баллов. Решение найдено подбором чисел, не доказано, что других решений нет – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Верный ответ без обоснования – 2 балла. Решение начато, но продолжено неверно – 1 балл.*

4. Мария Ивановна купила 12 литров кваса в 12-литровой канистре для себя и для соседки. У неё есть две пустые канистры, одна 8-литровая, другая 5-литровая. Как Мария Ивановна может разделить квас пополам, чтобы 6 литров кваса было в 12-литровой канистре, и 6 литров кваса – в 8-литровой канистре?

Решение.

	12 литров	8 литров	5 литров
0)	12	0	0
1)	4	8	0
2)	4	3	5
3)	9	3	0
4)	9	0	3
5)	1	8	3
6)	1	6	5
7)	6	6	0

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение в основном верное, но допущены ошибки – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое полезное продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет или продолжено неверно – 1 балл.*

5. У каждого из 19 детей в детском саду свой шкафчик для одежды (всего шкафчиков 19). В первый день некоторые дети перепутали шкафчики. Во второй день перепутавших было на 5 больше, в третий – на 4 больше второго дня, в четвертый день – на 3 больше третьего. Каждый раз приходили все 19 детей, и ни разу не было, чтобы какой-то шкафчик остался пустым. Всё-таки каждый ребёнок за 4 дня пользовался своим шкафчиком не меньше двух раз, а некоторые больше двух раз. Сколько детей пользовались своим шкафчиком в третий день?

Ответ. 8.

Решение. Обозначим число детей, перепутавших шкафчик в первый день, через x. Тогда в другие дни перепутали соответственно $x + 5$, $x + 9$, $x + 12$ детей, а всего перепутавших

было $x+x+5+\ x+9+\ x+12=4x+26$. Всего дети выбирали шкафчик $19\cdot 4=76$ раз, значит, правильные шкафчики были выбраны $76-4x-26=50-4x$ раз. По условию, правильных выборов больше $19\cdot 2=38$. Отсюда $50-4x>38$, или $4x<12$, то есть $x\leq 2$. Но $x\neq 1$, так как не может быть одного перепутавшего, он должен перепутать с кем-то. Значит, $x=2$. В третий день перепутали шкафчик $x+9=2+9=11$ детей, а правильно выбрали $19-11=8$ детей.
Замечание. Пример, показывающий, что это решение допустимо. В первый день правильно выбрали шкафчик дети с номерами с 1 по 17. Во второй день – дети с номерами с 1 по 12. В третий день – дети с номерами с 13 по 19, и ещё три любых ребёнка. В четвёртый день правильно выбрали шкафчик дети с номерами 18, 19, и ещё три любых ребёнка.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 18 баллов. Не отброшены лишние решения – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. Без доказательства использовано, что в первый день перепутали шкафчики 2 ребёнка, и получен верный ответ – 6 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но полезного продвижения нет – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

5 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

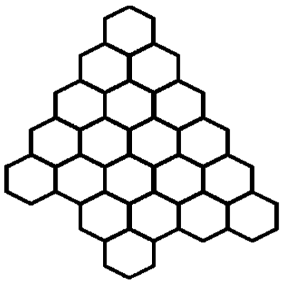
Вариант 1

1. Расставьте цифры 1, 1, 0, 2, 2, 0, 2, 3 в прямоугольники (по одной в каждый) так, чтобы разность получившихся чисел была наибольшей из возможных. Чему равна эта разность? *Четырёхзначное число не может начинаться с нуля.*

$$\square\square\square\square - \square\square\square\square$$

Ответ. $3222 - 1001 = 2221$.
Комментарий. *Верный ответ без объяснений – 20 баллов.*

2. Разрежьте по линиям сетки фигуру, состоящую из ячеек, на 4 равные части.



Ответ. См. рисунок.

Комментарий. *Верное разрезание – 20 баллов. Показана одна часть, а разбиения нет – 15 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

3. Вова с папой ехали на машине по прямой дороге с постоянной скоростью. Пока папа управлял машиной, Вове было нечем заняться, и он рассматривал километровые столбы. Вова заметил, что ровно в $12{:}05$ они проехали мимо столба с числом XY (где X, Y – некоторые цифры), в $12{:}47$ — мимо столба с числом YX, а в $13{:}05$ – мимо столба с числом $X0Y$. С какой скоростью они ехали?

Ответ. 90 км/ч.

Решение. За 42 минуты с $12{:}05$ до $12{:}47$ машина проехала не более 100 км, а за оставшиеся 18 минут ещё меньше в $\frac{42}{18} = \frac{7}{3}$ раза. Значит, до столба с числом 200 машина к $13{:}05$ не добралась. Тогда $X = 1$. Тогда, вне зависимости от числа Y, с $12{:}05$ до $13{:}05$ машина преодолела путь равный 90 км, и её скорость равна 90 км/ч. Остаётся показать, что при такой скорости описанная ситуация возможна, то есть, что условие задачи непротиворечиво. В самом деле: за 42 минуты (что равно $\frac{7}{10}$ часа) машина прошла 63 км. И при $Y = 8$ (кстати, такое Y единственно) она как раз окажется напротив столба с номером $63 + 18 = 81$. За оставшиеся 18 минут до $13{:}05$ ($\frac{3}{10}$ часа) машина проедет ещё 27 км и окажется напротив столба с числом $81 + 27 = 108$.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 8 баллов. Только верный ответ – 4 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

4. Большой отрезок длины 30 разбит точками на отрезки длины 1. Отмечены эти точки и концы большого отрезка. Сколько можно выбрать отрезков с концами в отмеченных точках, длины которых равны нечётному числу? *Выбранные отрезки могут пересекаться и быть частью друг друга.*

Ответ. 240.

Решение. Занумеруем точки слева направо числами $1, 2, \dots, 31$. Отрезок кодируется номерами его концов, а длина отрезка равна разности этих номеров. Разность будет нечётной, если числа на концах разной чётности. У нас нечётных чисел 16, а чётных – 15. Поэтому есть $15 \cdot 16 = 240$ отрезков нечётной длины.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Выписана искомая сумма, которая найдена неверно – 16 баллов. Только верный ответ – 4 балла.*

5. В некотором уезде живут купцы, разбойники и торговцы. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут, а торговцы чередуют правдивые и ложные высказывания, начать могут с любого. Однажды за круглым столом собралась компания из 12 жителей. Каждый произнёс три фразы: «Мой сосед слева – разбойник. Следующий за ним – торговец. Следующий за ним – купец». Сколько торговцев могло сидеть за столом? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*

Ответ. 12 торговцев.

Решение. Предположим, что за столом есть хотя бы один купец. Пронумеруем всех по часовой стрелке так, чтобы этот купец имел номер 1. Тогда из его утверждений следует, что номер 2 – разбойник, 3 – торговец, а 4 – купец. Из первой фразы купца 4 получаем, что номер 5 – разбойник. Но тогда первые два высказывания торговца 3 являются лживыми, чего быть не может. Значит, купцов за столом нет.

Предположим, что за столом есть хотя бы один разбойник. Также будем считать, что его номер 1. Тогда из его первого утверждения следует, что номер 2 не может быть разбойником, а так как купцов за столом нет, то он торговец. Из второй фразы разбойника 1 следует, что номер 3 – разбойник, а из первого утверждения разбойника 3 получаем, что номер 4 – торговец. Но тогда первые два высказывания торговца 2 являются правдивыми. Значит, и разбойников за столом нет.

Таким образом, все сидящие за столом – торговцы. Такое возможно, если каждый из них начал с ложного утверждения.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Доказано, что купцов нет – 8 баллов; доказано, что разбойников нет – 8 баллов; приведен пример рассадки – 4 балла; баллы суммируются. Только верный ответ – 4 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

Вариант 2

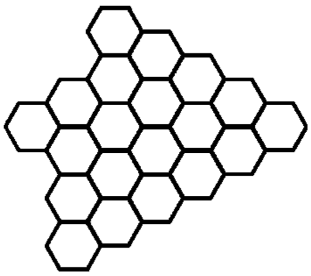
1. Расставьте цифры 1, 1, 0, 3, 3, 0, 3, 4 в прямоугольники (по одной в каждый) так, чтобы разность получившихся чисел была наибольшей из возможных. Чему равна эта разность? *Четырёхзначное число не может начинаться с нуля.*

$$\square\square\square\square - \square\square\square\square$$

Ответ. $4333 - 1001 = 3332$.

Комментарий. *Верный ответ без объяснений – 20 баллов.*

2. Разрежьте по линиям сетки фигуру, состоящую из ячеек, на 4 равные части.



Ответ. См. рисунок.

Комментарий. *Верное разрезание – 20 баллов. Показана одна часть, а разбиения нет – 15 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

3. Миша с папой ехали на машине по прямой дороге с постоянной скоростью. Пока папа управлял машиной, Мише было нечем заняться, и он рассматривал километровые столбы. Миша заметил, что ровно в $12:10$ они проехали мимо столба с числом XY (где X, Y – некоторые цифры), в $12:52$ — мимо столба с числом YX, а в $13:10$ – мимо столба с числом $X0Y$. С какой скоростью они ехали?

Ответ. 90 км/ч.

Решение. За 42 минуты с $12:10$ до $12:52$ машина проехала не более 100 км, а за оставшиеся 18 минут ещё меньше в $\frac{42}{18} = \frac{7}{3}$ раза. Значит, до столба с числом 200 машина к $13:10$ не добралась. Тогда $X = 1$. Тогда, вне зависимости от числа Y, с $12:10$ до $13:10$

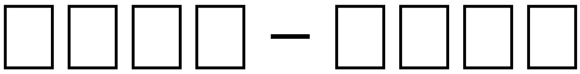
машина преодолела путь равный 90 км, и её скорость равна 90 км/ч. Остаётся показать, что при такой скорости описанная ситуация возможна, то есть, что условие задачи непротиворечиво. В самом деле: за 42 минуты (что равно $\frac{7}{10}$ часа) машина прошла 63 км. И при $Y = 8$ (кстати, такое Y единственно) она как раз окажется напротив столба с номером $63 + 18 = 81$. За оставшиеся 18 минут до $13:10$ ($\frac{3}{10}$ часа) машина проедет ещё 27 км и окажется напротив столба с числом $81 + 27 = 108$.
Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 8 баллов. Только верный ответ – 4 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

4. Большой отрезок длины 32 разбит точками на отрезки длины 1. Отмечены эти точки и концы большого отрезка. Сколько можно выбрать отрезков с концами в отмеченных точках, длины которых равны нечётному числу? *Выбранные отрезки могут пересекаться и быть частью друг друга.*
Ответ. 272.
Решение. Занумеруем точки слева направо числами $1, 2, \ldots, 33$. Отрезок кодируется номерами его концов, а длина отрезка равна разности этих номеров. Разность будет нечётной, если числа на концах разной чётности. У нас нечётных чисел 17, а чётных – 16. Поэтому есть $16 \cdot 17 = 272$ отрезка нечётной длины.
Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Выписана искомая сумма, которая найдена неверно – 16 баллов. Только верный ответ – 4 балла.*

5. В некотором уезде живут купцы, разбойники и торговцы. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут, а торговцы чередуют правдивые и ложные высказывания, начать могут с любого. Однажды за круглым столом собралась компания из 14 жителей. Каждый произнёс три фразы: «Мой сосед слева – разбойник. Следующий за ним – торговец. Следующий за ним – купец». Сколько торговцев могло сидеть за столом? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*
Ответ. 14 торговцев.
Решение. Предположим, что за столом есть хотя бы один купец. Пронумеруем всех по часовой стрелке так, чтобы этот купец имел номер 1. Тогда из его утверждений следует, что номер 2 – разбойник, 3 – торговец, а 4 – купец. Из первой фразы купца 4 получаем, что номер 5 – разбойник. Но тогда первые два высказывания торговца 3 являются лживыми, чего быть не может. Значит, купцов за столом нет.
Предположим, что за столом есть хотя бы один разбойник. Также будем считать, что его номер 1. Тогда из его первого утверждения следует, что номер 2 не может быть разбойником, а так как купцов за столом нет, то он торговец. Из второй фразы разбойника 1 следует, что номер 3 – разбойник, а из первого утверждения разбойника 3 получаем, что номер 4 – торговец. Но тогда первые два высказывания торговца 2 являются правдивыми. Значит, и разбойников за столом нет.
Таким образом, все сидящие за столом – торговцы. Такое возможно, если каждый из них начал с ложного утверждения.
Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Доказано, что купцов нет – 8 баллов; доказано, что разбойников нет – 8 баллов; приведен пример рассадки – 4 балла; баллы суммируются. Только верный ответ – 4 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

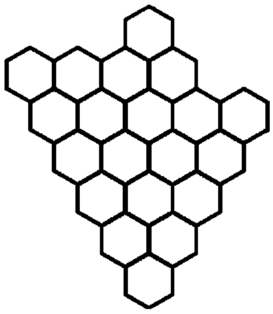
Вариант 3

1. Расставьте цифры 2, 2, 0, 3, 3, 0, 3, 4 в прямоугольники (по одной в каждый) так, чтобы разность получившихся чисел была наибольшей из возможных. Чему равна эта разность? *Четырёхзначное число не может начинаться с нуля.*



Ответ. $4333 - 2002 = 2331$.
Комментарий. *Верный ответ без объяснений – 20 баллов.*

2. Разрежьте по линиям сетки фигуру, состоящую из ячеек, на 4 равные части.



Ответ. См. рисунок.

Комментарий. *Верное разрезание – 20 баллов. Показана одна часть, а разбиения нет – 15 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

3. Миша с папой ехали на машине по прямой дороге с постоянной скоростью. Пока папа управлял машиной, Мише было нечем заняться, и он рассматривал километровые столбы. Миша заметил, что ровно в $12{:}15$ они проехали мимо столба с числом XY (где X, Y – некоторые цифры), в $12{:}57$ — мимо столба с числом YX, а в $13{:}15$ – мимо столба с числом $X0Y$. С какой скоростью они ехали?
Ответ. 90 км/ч.
Решение. За 42 минуты с $12{:}15$ до $12{:}57$ машина проехала не более 100 км, а за оставшиеся 18 минут ещё меньше в $\frac{42}{18} = \frac{7}{3}$ раза. Значит, до столба с числом 200 машина к $13{:}15$ не добралась. Тогда $X = 1$. Тогда, вне зависимости от числа Y, с $12{:}15$ до $13{:}15$ машина преодолела путь равный 90 км, и её скорость равна 90 км/ч. Остаётся показать, что при такой скорости описанная ситуация возможна, то есть, что условие задачи непротиворечиво. В самом деле: за 42 минуты (что равно $\frac{7}{10}$ часа) машина прошла 63 км. И при $Y = 8$ (кстати, такое Y единственно) она как раз окажется напротив столба с номером $63 + 18 = 81$. За оставшиеся 18 минут до $13{:}15$ ($\frac{3}{10}$ часа) машина проедет ещё 27 км и окажется напротив столба с числом $81 + 27 = 108$.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 8 баллов. Только верный ответ – 4 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

4. Большой отрезок длины 28 разбит точками на отрезки длины 1. Отмечены эти точки и концы большого отрезка. Сколько можно выбрать отрезков с концами в отмеченных точках, длины которых равны нечётному числу? *Выбранные отрезки могут пересекаться и быть частью друг друга.*

Ответ. 210.

Решение. Занумеруем точки слева направо числами $1, 2, \ldots, 29$. Отрезок кодируется номерами его концов, а длина отрезка равна разности этих номеров. Разность будет нечётной, если числа на концах разной чётности. У нас нечётных чисел 15, а чётных – 14. Поэтому есть $14 \cdot 15 = 210$ отрезков нечётной длины.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Выписана искомая сумма, которая найдена неверно – 16 баллов. Только верный ответ – 4 балла.*

5. В некотором уезде живут купцы, разбойники и торговцы. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут, а торговцы чередуют правдивые и ложные высказывания, начать могут с любого. Однажды за круглым столом собралась компания из 16 жителей. Каждый произнёс три фразы: «Мой сосед слева – разбойник. Следующий за ним – торговец. Следующий за ним – купец». Сколько торговцев могло сидеть за столом? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*

Ответ. 16 торговцев.

Решение. Предположим, что за столом есть хотя бы один купец. Пронумеруем всех по часовой стрелке так, чтобы этот купец имел номер 1. Тогда из его утверждений следует, что номер 2 – разбойник, 3 – торговец, а 4 – купец. Из первой фразы купца 4 получаем, что номер 5 – разбойник. Но тогда первые два высказывания торговца 3 являются лживыми, чего быть не может. Значит, купцов за столом нет.

Предположим, что за столом есть хотя бы один разбойник. Также будем считать, что его номер 1. Тогда из его первого утверждения следует, что номер 2 не может быть разбойником, а так как купцов за столом нет, то он торговец. Из второй фразы разбойника 1 следует, что номер 3 – разбойник, а из первого утверждения разбойника 3 получаем, что номер 4 – торговец. Но тогда первые два высказывания торговца 2 являются правдивыми. Значит, и разбойников за столом нет.

Таким образом, все сидящие за столом – торговцы. Такое возможно, если каждый из них начал с ложного утверждения.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Доказано, что купцов нет – 8 баллов; доказано, что разбойников нет – 8 баллов; приведен пример рассадки – 4 балла; баллы суммируются. Только верный ответ – 4 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

6 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Встретились однажды Пупсень, Вупсень и Лупсень. Один из них всегда говорит правду, другой всегда врёт, а третий может и правду сказать, и соврать. Они встали в ряд, и самый левый сказал: Лупсень врёт. Следующий сказал: Вупсень и Лупсень одновременно говорят правду или одновременно лгут. А правый заявил: Пупсень врёт. (Про себя никто не говорил). Кто из них говорил правду, и в каком порядке они стояли?

Ответ. Правду говорил Лупсень, стояли в порядке слева направо Вупсень, Пупсень и Лупсень.

Решение. Прежде всего, из высказываний можно установить, что стояли слева направо Вупсень, Пупсень и Лупсень (так как в середине стоит Пупсень, а слева не Пупсень и не Лупсень, то есть Вупсень). Пусть Пупсень говорит правду. Тогда Вупсень и Лупсень лгут, поскольку все трое не могут говорить правду. Значит, Вупсень сказал правду про Лупсеня, но Вупсень лгал, противоречие. Пусть Пупсень лжёт. Тогда Лупсень сказал правду, а Вупсень солгал. Пупсень в своем высказывании солгал, и Вупсень и Лупсень не говорят правду одновременно.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. Только верный ответ без обоснований – 10 баллов. Дан только верный ответ о порядке с обоснованиями – 4 балла, без обоснований – 2 балла. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

2. Трём братьям подарили коробку с фигурками Лего, и они решили поделить между собой эти фигурки в пропорции 1 : 3 : 4. Все они приходили к коробке в разное время, каждый думал, что он пришёл первым, и брал свою долю. Какое наименьшее целое число фигурок могло остаться после того, как все трое забрали свою долю?

Ответ. 35.

Решение. Мальчики должны были забрать $1/_8$, $3/_8$, $4/_8$ всех фигурок. После каждого оставалось соответственно $7/_8$, $5/_8$, $4/_8$ всех фигурок. Пусть в коробке было a фигурок. После первого осталось $7a/_8$, после второго $7a/_8 \cdot 5/_8$, после третьего $7a/_8 \cdot 5/_8 \cdot 4/_8 = 35a/_{128}$. Заметим, что ввиду свойств умножения этот результат не зависит от порядка, в котором братья подходили к коробке. Например, если подходили в порядке $2, 1, 3$, то осталось $5a/_8 \cdot 7/_8 \cdot 4/_8 = 35a/_{128}$. Чтобы число фигурок было целым, наименьшее a должно равняться 128. Тогда осталось 35 фигурок.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 19 баллов. Найдено выражение* $35a/_{128}$ *– 18 баллов. Решение исходит из делимости на* 8^3 *– 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но не закончено, или продолжено неверно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

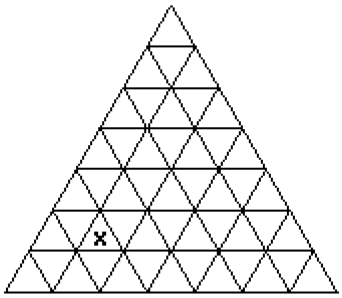
3. Ваня задумал 5 натуральных чисел (не обязательно разных). Если он складывает любые два из этих чисел, то получает только три значения: или 43, или 56, или 69. Какие числа задумал Ваня?

Ответ. $15, 28, 28, 28, 41$.

Решение. Поскольку сумм всего три, среди этих чисел есть одинаковые (иначе, добавляя одно к остальным, получили бы четыре разные суммы). Сумма двух одинаковых чисел – число чётное. Есть только одна чётная сумма, это 56. Значит, все одинаковые числа равны 28. Если бы было ещё какое-то другое чётное число, то в сумме с 28 получилось бы другое чётное, а его нет. Нечётное число равно либо $43 - 28 = 15$, либо $69 - 28 = 41$.

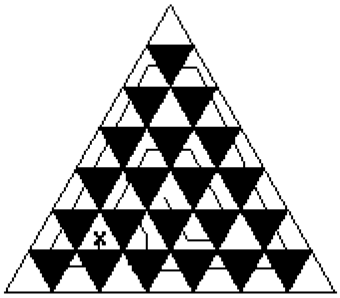
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верно найдены три разных числа – 15 баллов. Только верный ответ без обоснований – 10 баллов. Верно найдено только одно число – 2 балла. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только неверный ответ – 0 баллов.*

4. Треугольник разделён на 49 маленьких треугольников (см. рисунок). В маленьком треугольнике, отмеченном крестиком, сидит бельчонок, а в остальных 48 находится по одному ореху. Бельчонок может перепрыгнуть в соседний по стороне треугольник, если в нём есть орех (и забрать его). Сколько орехов удастся собрать бельчонку? Нарисуйте его путь.



Ответ. 42.

Решение. Закрасим треугольники через один в чёрный цвет. Белых треугольников 28, а чёрных 21. При каждом шаге бельчонок переходит в треугольник другого цвета. Наибольший путь будет иметь вид БЧБЧ...ЧБ, где чёрных треугольников 21, а белых 22. Итак, бельчонок может побывать не больше, чем в 43 треугольниках (включая начальный), а в 6 он не побывает, значит он соберет не больше 42 орехов. Пример маршрута приведён на рисунке.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Указан верный путь, получен ответ, но не доказано, что больше орехов собрать нельзя – 10 баллов. Есть объяснение с попыткой доказательства – 15 баллов. Дан верный числовой ответ, путь не указан – 8 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

5. Между деревнями Осиновкой и Еловкой, Еловкой и Сосновкой, Сосновкой и Осиновкой проложены дороги (между двумя деревнями может быть много разных дорог, но есть хотя бы одна). Все дороги с двусторонним движением. От Осиновки до Еловки можно добраться по 15 маршрутам (некоторые маршруты проходят через Сосновку), а от Осиновки до Сосновки можно добраться по 20 маршрутам (некоторые маршруты проходят через Еловку). Сколько всего может быть способов добраться от Еловки до Сосновки? Найдите все решения и покажите, что других нет.
Ответ. 12.
Решение. Обозначим число дорог между Осиновкой и Еловкой через x, между Еловкой и Сосновкой через y, между Сосновкой и Осиновкой через z. По условию $zy+x=15, xy+z=20$. Вычтем из второго уравнения первое, получим $y(x-z)+z-x=5$, или $(x-z)(y-1)=5$. Значит, $y-1$ может равняться или 1, или 5. Пусть $y-1=1$, тогда $y=2$, $x-z=5$. Подставим в уравнение $zy+x=15$, получим $2z+z+5=15$, $3z=10$, но 10 не делится на 3. Пусть $y-1=5$, тогда $y=6$, $x-z=1$. Подставим в уравнение $zy+x=15$, получим $6z+z+1=15$, $z=2$. Итак, $z=2, y=6, x=z+1=3$. Проверим, что эти значения удовлетворяют второму уравнению: $xy+z=3\cdot 6+2=20$. Теперь можно найти число маршрутов от Еловки до Сосновки, оно равно $xz+y=3\cdot 2+6=12$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Не отброшена лишняя тройка значений – 18 баллов. Сделан полный перебор, но до ответа не доведено – 15 баллов. Решение найдено подбором, не показано, что других решений нет – 10 баллов. В решении есть продвижение, но оно не закончено или допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

Вариант 2

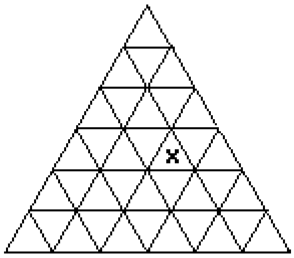
1. Четыре человека встали в ряд. Среди них был хотя бы один лжец (всегда лжёт), хотя бы один правдивый (всегда говорит правду), и хотя бы один хитрец (может и лгать, и говорить правду). Первый сказал: «Рядом со мной стоит правдивый». Второй сказал: «По обе стороны от меня стоят хитрецы». Третий сказал: «По обе стороны от меня стоят лжецы». Четвертый сказал: «Рядом со мной стоит правдивый». Кто где стоит? Обозначайте лжеца – Л, правдивого – П, хитреца – Х.
Ответ. ХПХЛ.
Решение. Первый не может быть правдивым, потому что тогда и второй правдивый, но он сказал, что первый хитрец. Если второй правдивый, то стоят так: ХПХ, и последний лжец. Это возможный вариант. Если третий правдивый, то четвёртый лжец и сказал правду –

противоречие. Если четвёртый правдивый, то третий правдивый, но он назвал четвертого лжецом – противоречие. Единственный вариант ХПХЛ.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование – 15 баллов. В решении рассмотрены не все варианты – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. Только верный ответ без обоснований – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

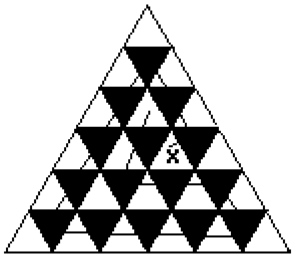
2. Три пирата решили поделить между собой кучу монет в пропорции $1:4:5$. Все они приходили к куче в разное время, каждый думал, что он пришёл первым, и брал свою долю. Какое наименьшее целое число монет могло остаться после того, как все трое забрали свою долю?
Ответ. 27.
Решение. Пираты должны были забрать $1/_{10}$, $4/_{10}$, $5/_{10}$ кучи. После каждого оставалось соответственно $9/_{10}$, $6/_{10}$, $5/_{10}$ кучи. Пусть в куче было a монет. После первого осталось $9a/_{10}$, после второго $9a/_{10} \cdot 6/_{10}$, после третьего $9a/_{10} \cdot 6/_{10} \cdot 5/_{10} = 27a/_{100}$. Заметим, что ввиду свойств умножения этот результат не зависит от порядка, в котором пираты подходили к куче. Например, если подходили в порядке $2, 1, 3$, то осталось $6a/_{10} \cdot 9/_{10} \cdot 5/_{10} = 27a/_{100}$. Чтобы число монет было целым, наименьшее a должно равняться 100. Тогда остаётся 27 монет.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 19 баллов. Найдено выражение $27a/_{100}$ – 18 баллов. Решение исходит из делимости на 10^3 – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но не закончено, или продолжено неверно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. Умный бельчонок задумал 5 натуральных чисел (не обязательно разных). Если он складывает любые два из этих чисел, то получает только три значения: или 59, или 68, или 77. Какие числа задумал бельчонок?
Ответ. $25, 34, 34, 34, 43$.
Решение. Поскольку сумм всего три, среди этих чисел есть одинаковые (иначе, добавляя одно к остальным, получили бы четыре разные суммы). Сумма двух одинаковых чисел – число чётное. Есть только одна чётная сумма, это 68. Значит, все одинаковые числа равны 34. Если бы было ещё какое-то другое чётное число, то в сумме с 34 получилось бы другое чётное, а его нет. Нечётное число равно либо $59 - 34 = 25$, либо $77 - 34 = 43$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верно найдены три разных числа – 15 баллов. Только верный ответ без обоснований – 10 баллов. Верно найдено только одно число – 2 балла. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только неверный ответ – 0 баллов.*

4. Треугольник разделён на 36 маленьких треугольников (см. рисунок). В маленьком треугольнике, отмеченном крестиком, сидит муравей, а в остальных 35 находится по одной крупинке сахара. Муравей может переползать в соседний по стороне треугольник, если в нём есть крупинка (и забрать её). Сколько крупинок сахара удастся собрать муравью? Нарисуйте его маршрут.



Ответ. 30.
Решение. Закрасим треугольники через один в чёрный цвет. Белых треугольников 21, а чёрных 15. При каждом шаге муравей переходит в треугольник другого цвета. Наибольший путь будет иметь вид БЧБЧ...ЧБ, где чёрных треугольников 15, а белых 16. Итак, муравей может побывать не больше, чем в 31 треугольнике (включая начальный), а в 5 он не побывает, значит он соберет не больше 30 крупинок. Пример маршрута приведён на рисунке.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Для доказательства верно использована раскраска, но получен ответ 31 – 19 баллов. Указан верный путь, получен ответ, но не доказано, что больше крупинок собрать нельзя – 10 баллов. Дан верный числовой ответ, путь не указан – 8 баллов. Есть объяснение с попыткой доказательства – 15 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

5. Между тремя замками проложены дороги (между двумя замками может быть много разных дорог, но есть хотя бы одна). Все дороги с двусторонним движением. От первого замка до второго можно добраться по 19 маршрутам (некоторые маршруты проходят через третий замок), а от первого замка до третьего можно добраться по 26 маршрутам (некоторые маршруты проходят через второй замок). Сколько может быть способов попасть из второго замка в третий? Найдите все решения и покажите, что других нет.
Ответ. 14 или 46.
Решение. Обозначим число дорог между первым и вторым замками через x, между вторым и третьим замками через y, между третьим и первым замками через z. По условию $zy + x = 19, xy + z = 26$. Вычтем из второго уравнения первое, получим $y(x - z) + z - x = 7$, или $(x - z)(y - 1) = 7$. Значит, $y - 1$ может равняться или 1, или 7. Пусть $y - 1 = 1$, тогда $y = 2$, $x - z = 7$. Подставим в уравнение $zy + x = 19$, получим $2z + z + 7 = 19$, $3z = 12$, $z = 4, x = 11$.. Проверим, что эти значения удовлетворяют второму уравнению: $xy + z = 11 \cdot 2 + 4 = 26$. Значит, $x = 11, y = 2, z = 4$ удовлетворяют условиям. Число маршрутов от второго замка до третьего в этом случае равно $xz + y = 11 \cdot 4 + 2 = 46$.
Пусть $y - 1 = 7$, тогда $y = 8$, $x - z = 1$. Подставим в уравнение $zy + x = 19$, получим $8z + z + 1 = 19$, $9z = 18$. Итак, $z = 2, y = 8, x = z + 1 = 3$. Проверим, что эти значения удовлетворяют второму уравнению: $xy + z = 3 \cdot 8 + 2 = 26$. Значит, второе решение: $x =$

ние: $x = 3, y = 8, z = 2$, а число маршрутов от второго замка до третьего в этом случае равно $xz + y = 3 \cdot 2 + 8 = 14$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Не отброшена лишняя тройка значений – 18 баллов. Сделан полный перебор, но до ответа не доведено – 15 баллов. Решение найдено подбором, не показано, что других решений нет – 10 баллов. В решении есть продвижение, но оно не закончено или допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

Вариант 3

1. В волшебном лесу живут говорящие грибы двух видов: настоящие опята и ложные опята. Ложные ядовитые, а настоящие вкусные. Ложные всегда лгут, настоящие всегда говорят правду. Гриша увидел на полянке 4 опёнка. Первый опёнок сказал: «Мы с четвёртым разного вида». Второй сказал: «Третий – ложный». Третий сказал: «Второй – ложный». Четвёртый сказал: «Из нас четверых не меньше двух настоящих опят». Сколько было ложных опят?
Ответ. 3.
Решение. Если второй сказал правду, то третий солгал, а если второй солгал, то третий сказал правду, значит, из них один настоящий и один ложный. Пусть первый сказал правду, тогда четвёртый солгал, и настоящих опят меньше двух, но среди второго и третьего есть настоящий, получается вместе два настоящих – противоречие. Пусть первый солгал, тогда четвёртый тоже ложный. Значит, настоящий опёнок один, а ложных опят три.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. Только верный ответ без обоснований – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

2. Три бельчонка решили поделить между собой кучу шишек в пропорции $1 : 2 : 5$. Все они приходили к куче в разное время, каждый думал, что он пришёл первым, и брал свою долю. Какое наименьшее целое число шишек могло остаться после того, как все трое забрали свою долю?
Ответ. 63.
Решение. Бельчата должны были забрать $1/8$, $2/8$, $5/8$ кучи. После каждого оставалось соответственно $7/8$, $6/8$, $3/8$ кучи. Пусть в куче было a шишек. После первого осталось $7a/8$, после второго $7a/8 \cdot 6/8$, после третьего $7a/8 \cdot 6/8 \cdot 3/8 = 63a/256$. Заметим, что ввиду свойств умножения этот результат не зависит от порядка, в котором бельчата подходили к куче. Например, если подходили в порядке $2, 1, 3$, то осталось $6a/8 \cdot 7/8 \cdot 3/8 = 63a/256$. Чтобы число шишек было целым, наименьшее a должно равняться 256. Тогда осталось 63 шишки.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 19 баллов. Найдено выражение* $63a/256$ *– 18 баллов. Решение исходит из делимости на* 8^3 *– 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но не закончено, или продолжено неверно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

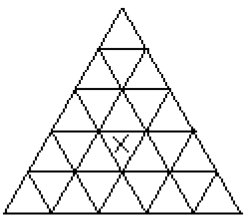
3. Ваня задумал 5 натуральных чисел (не обязательно разных). Если он складывает любые два из этих чисел, то получает только три значения: или 51, или 64, или 77. Какие числа задумал Ваня?

Ответ. $19, 32, 32, 32, 45$.

Решение. Поскольку сумм всего три, среди этих чисел есть одинаковые (иначе, добавляя одно к остальным, получили бы четыре разные суммы). Сумма двух одинаковых чисел – число чётное. Есть только одна чётная сумма, это 64. Значит, все одинаковые числа равны 32. Если бы было ещё какое-то другое чётное число, то в сумме с 32 получилось бы другое чётное, а его нет. Каждое нечётное число равно либо $51 - 32 = 19$, либо $77 - 32 = 45$.

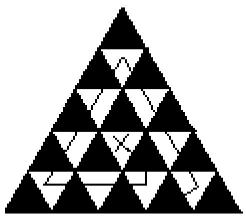
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верно найдены три разных числа – 15 баллов. Только верный ответ без обоснований – 10 баллов. Верно найдено только одно число – 2 балла. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только неверный ответ – 0 баллов.*

4. Треугольник разделён на 25 маленьких треугольников (см. рисунок). В маленьком треугольнике, отмеченном крестиком, сидит муравей, а в остальных 24 находится по одной крупинке сахара. Муравей может переползать в соседний по стороне треугольник, если в нём есть крупинка (и забрать её). Сколько крупинок сахара удастся собрать муравью? Нарисуйте его маршрут.



Ответ. 19.

Решение. Закрасим треугольники через один в чёрный цвет. Белых треугольников 10, а чёрных 15. При каждом шаге муравей переходит в треугольник другого цвета. Наибольший путь будет иметь вид ЧБЧБЧ...Ч, где белых треугольников 9, а чёрных 10. Итак, муравей может побывать не больше, чем в 20 треугольниках (включая начальный), а в 5 он не побывает, значит, он соберет не больше 19 крупинок. Пример маршрута приведён на рисунке.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Указан верный путь, получен ответ, но не доказано, что больше орехов собрать нельзя – 10 баллов. Есть объяснение с попыткой доказательства – 15 баллов. Дан верный числовой ответ, путь не указан – 8 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

5. Между дубом и берёзой, берёзой и сосной, сосной и дубом проложены тропинки (между двумя деревьями может быть много разных тропинок, но есть хотя бы одна). Бельчонок бегает только по тропинкам. От дуба до берёзы он может добраться по 11 маршрутам (некоторые маршруты проходят через сосну), а от дуба до сосны он может добраться по 14 маршрутам (некоторые маршруты проходят через берёзу). Сколько всего может быть способов добраться от берёзы до сосны? Найдите все решения и покажите, что других нет.

Ответ. 10.

Решение. Обозначим число тропинок между дубом и берёзой через x, между берёзой и сосной через y, между сосной и дубом через z. По условию $zy + x = 11, xy + z = 14$. Вычтем из второго уравнения первое, получим $y(x - z) + z - x = 3$, или $(x - z)(y - 1) = 3$. Значит, $y - 1$ может равняться или 1, или 3. Пусть $y - 1 = 1,$ тогда $y = 2$, $x - z = 3$. Подставим в уравнение $zy + x = 11$, получим $2z + z + 3 = 11$, $3z = 8$, но 8 не делится на 3. Пусть $y - 1 = 3,$ тогда $y = 4$, $x - z = 1$. Подставим в уравнение $zy + x = 11$, получим $4z + z + 1 = 11, z = 2$. Итак, $z = 2, y = 4, x = z + 1 = 3$. Проверим, что эти значения удовлетворяют второму уравнению: $xy + z = 3 \cdot 4 + 2 = 14$. Теперь можно найти число маршрутов от берёзы до сосны, оно равно $xz + y = 3 \cdot 2 + 4 = 10$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Не отброшена лишняя тройка значений – 18 баллов. Сделан полный перебор, но до ответа не доведено – 15 баллов. Решение найдено подбором, не показано, что других решений нет – 10 баллов. В решении есть продвижение, но оно не закончено или допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

7 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Расположите в каких-то клетках квадрата 6×6 по одной снежинке ($*$) так, чтобы в любой строке было ровно три снежинки, а в любом столбце – одна или четыре снежинки.
Ответ. См. пример на рисунке.

*	*	*			
*	*		*		
*		*	*		
	*	*	*		
*		*		*	
	*		*		*

2. Даша, Маша и Настя записали по натуральному числу. Даша умножила своё число на число Насти, а также свое число на число Маши; эти два произведения отличались друг от друга на 1. Маша умножила своё число на Дашино и своё на Настино; эти произведения отличались на 25. Наконец, Настя умножила своё число на Дашино и своё на число Маши. На сколько отличались произведения у Насти? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*
Ответ. На 24.
Решение. Пусть числа Даши, Маши и Насти равны a, b и c соответственно. Тогда по условию $a \cdot |b-c| = 1,\ \ b \cdot |a-c| = 25$. Из первого равенства находим, что $a = 1$, и тогда из второго $b(c-1) = 25$. Значит, либо $b = 1$, $c = 26$ (что противоречит первому равенству) либо $b = 25$, $c = 2$ (аналогично), либо, наконец, $b = 5$, $c = 6$. Поэтому у Насти получается $c \cdot |a-b| = 6 \cdot 4 = 24$.

3. Точки Q и S взяты по разные стороны от прямой PR. Отрезки QK и SL – перпендикуляры, опущенные на отрезок PR из точек Q и S соответственно. Оказалось, что $PK = KL = LR$ и $SK = PQ$. Докажите, что $QR = PS$.

Решение. В треугольнике PQL отрезок QK является медианой и высотой, следовательно, $PQ = QL$. Аналогично в треугольнике RSK выполняется равенство $RS = SK$. Кроме того, $SK = PQ$ и $PL = RK$, значит, эти треугольники равны по третьему признаку. Отсюда $\angle QPR = \angle PRS$. Таким образом, получается, что треугольники PQR и RSP равны по первому признаку, откуда следует требуемое равенство.

4. Есть мешок с орехами весом 1 г, 2 г, ..., 50 г и чашечные весы. Бельчата Вася и Петя по очереди кладут на весы по одному ореху из мешка, каждый на свою чашу, начинает Вася. После хода каждого игрока его чаша должна перевесить. Выигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?
Ответ. Вася.
Решение. Разобьем гирьки на пары: две самые тяжёлые, две следующие по весу и т. д. Каждым ходом Вася должен класть на весы одну из двух самых тяжёлых оставшихся гирек так, чтобы Петя был вынужден положить вторую гирьку пары. А именно, Вася кладёт более лёгкую, если разность весов гирек на чашах меньше 2 г, и более тяжёлую, если разность равна 2 г. В частности, первые ходы: 49 г, 50 г, 47 г, 48 г, 45 г, 46 г и т.д. После каждой пары ходов обоих игроков разность между весами на чашах будет равна 2 г. Тогда после 24 ходов в распоряжении Васи останутся гирьки весом 1 г и 2 г, а чаша Пети будет перевешивать на 2 г. При этом у Васи не будет возможности сделать ход, поэтому он выиграет.
5. Числа от 1 до $2n$ $(n > 1)$ разбили на две группы по n чисел. Пусть A – произведение чисел в первой группе, а B – во второй группе. Может ли $|A - B| = 555553$?
Ответ. Не может.
Решение. Предположим, что найдётся такое n, что числа от 1 до $2n$ можно разбить требуемым образом. Разность произведений может равняться нечётному числу 555553, только если одно произведение нечётное, а другое чётное. Но произведение натуральных чисел нечётно, только если все сомножители нечётны. А среди чисел от 1 до $2n$ ровно n нечётных чисел. Значит, числа от 1 до $2n$ должны быть разбиты на группы нечётных чисел $(1, 3, \ldots, 2n-1)$ и чётных чисел $(2, 4, \ldots, 2n)$. И при этом $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n - 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = 555553$. Заметим, что $2n > 12$, так как $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 12 = 46080 < 555553$. Но тогда среди чётных чисел встретятся числа 6 и 12. Поэтому произведение чётных чисел делится на 9. Среди нечётных чисел встретится число 9. Поэтому произведение нечётных чисел также делится на 9. Значит, разность произведений должна делиться на 9. А число 555553 на 9 не делится. Противоречие.

Вариант 2

1. Расположите в каких-то клетках квадрата 6×6 по одной снежинке $(*)$ так, чтобы в любой строке было ровно две снежинки, а в любом столбце – одна или четыре снежинки.
Ответ. См. пример на рисунке.

$*$		$*$			
$*$	$*$				
$*$		$*$			
		$*$	$*$		
$*$		$*$			
				$*$	$*$

2. Дима, Миша и Слава записали по натуральному числу. Дима умножил своё число на число Славы, а также свое число на число Миши; эти два произведения отличались друг от друга на 1. Миша умножил своё число на Димино и своё на Славино; эти произведения

отличались на 49. Наконец, Слава умножил своё число на Димино и своё на число Миши. На сколько отличались произведения у Славы? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*

Ответ. На 48.

Решение. Пусть числа Димы, Миши и Славы равны a, b и c соответственно. Тогда по условию $a \cdot |b-c| = 1, \quad b \cdot |a-c| = 49$. Из первого равенства находим, что $a = 1$, и тогда из второго $b(c-1) = 49$. Значит, либо $b = 1$, $c = 50$ (что противоречит первому равенству) либо $b = 49$, с $= 2$ (аналогично), либо, наконец, $b = 7$, с $= 8$. Поэтому у Славы получается $c \cdot |a-b| = 8 \cdot 6 = 48$.

3. Точки A и C взяты по разные стороны от прямой BD. Отрезки AE и CH – перпендикуляры, опущенные на отрезок BD из точек A и C соответственно. Оказалось, что $BE = EH = HD$ и $CE = AB$. Докажите, что $BC = AD$.

Решение. В треугольнике BAH отрезок AE является медианой и высотой, следовательно, $AB = AH$. Аналогично в треугольнике ECD выполняется равенство $EC = CD$. Кроме того, $CE = AB$ и $BH = DE$, значит, эти треугольники равны по третьему признаку. Отсюда $\angle ABH = \angle CDE$. Таким образом, получается, что треугольники BAD и DCB равны по первому признаку, откуда следует требуемое равенство.

4. Есть мешок с орехами весом 1 г, 2 г, ..., 60 г и чашечные весы. Бельчата Вася и Петя по очереди кладут на весы по одному ореху из мешка, каждый на свою чашу, начинает Вася. После хода каждого игрока его чаша должна перевесить. Выигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ. Вася.

Решение. Разобьем гирьки на пары: две самые тяжёлые, две следующие по весу и т. д. Каждым ходом Вася должен класть на весы одну из двух самых тяжёлых оставшихся гирек так, чтобы Петя был вынужден положить вторую гирьку пары. А именно, Вася кладёт более лёгкую, если разность весов гирек на чашах меньше 2 г, и более тяжёлую, если разность равна 2 г. В частности, первые ходы: 59 г, 60 г, 57 г, 58 г, 55 г, 56 г и т.д. После каждой пары ходов обоих игроков разность между весами на чашах будет равна 2 г. Тогда после 24 ходов в распоряжении Васи останутся гирьки весом 1 г и 2 г, а чаша Пети будет перевешивать на 2 г. При этом у Васи не будет возможности сделать ход, поэтому он выиграет.

5. Числа от 1 до $2n$ $(n > 1)$ разбили на две группы по n чисел. Пусть A – произведение чисел в первой группе, а B – во второй группе. Может ли $|A - B| = 555557$?

Ответ. Не может.

Решение. Предположим, что найдётся такое n, что числа от 1 до $2n$ можно разбить требуемым образом. Разность произведений может равняться нечётному числу 555557, только если одно произведение нечётное, а другое чётное. Но произведение натуральных чисел нечётно, только если все сомножители нечётны. А среди чисел от 1 до $2n$ ровно n нечётных чисел. Значит, числа от 1 до $2n$ должны быть разбиты на группы нечётных чисел $(1, 3, \dots, 2n-1)$ и чётных чисел $(2, 4, \dots, 2n)$. И при этом $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n - 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = 555557$. Заметим, что $2n > 12$, так как $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 12 = 46080 < 555557$. Но тогда среди чётных чисел встретятся числа 6 и 12. Поэтому произведение чётных чисел делится на 9. Среди нечётных чисел встретится число 9. Поэтому произведение нечётных чисел также делится на 9. Значит, разность произведений должна делиться на 9. А число 555557 на 9 не делится. Противоречие.

Вариант 3

1. Расположите в каких-то клетках квадрата 7×7 по одной снежинке ($*$) так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было ровно три снежинки.
Ответ. См. пример на рисунке.

		$*$		$*$		$*$
	$*$		$*$		$*$	
$*$				$*$		$*$
	$*$		$*$		$*$	
$*$		$*$				$*$
	$*$		$*$		$*$	
$*$		$*$		$*$		

2. Даша, Маша и Настя записали по натуральному числу. Даша умножила своё число на число Насти, а также свое число на число Маши; эти два произведения отличались друг от друга на 1. Маша умножила своё число на Дашино и своё на Настино; эти произведения отличались на 121. Наконец, Настя умножила своё число на Дашино и своё на число Маши. На сколько отличались произведения у Насти? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*
Ответ. На 120.
Решение. Пусть числа Даши, Маши и Насти равны a, b и c соответственно. Тогда по условию $a \cdot |b - c| = 1,\quad b \cdot |a - c| = 121$. Из первого равенства находим, что $a = 1$, и тогда из второго $b(c - 1) = 121$. Значит, либо $b = 1$, $c = 122$ (что противоречит первому равенству) либо $b = 121$, $c = 2$ (аналогично), либо, наконец, $b = 11$, $c = 12$. Поэтому у Насти получается $c \cdot |a - b| = 12 \cdot 10 = 120$.

3. Точки C и D взяты по разные стороны от прямой AB. Отрезки CE и DH – перпендикуляры, опущенные на отрезок AB из точек C и D соответственно. Оказалось, что $AE = EH = HB$ и $AC = DE$. Докажите, что $AD = BC$.
Решение. В треугольнике BDE отрезок DH является медианой и высотой, следовательно, $DB = DE$. Аналогично в треугольнике ACH выполняется равенство $AC = CH$. Кроме того, $AC = DE$ и $AH = BE$, значит, эти треугольники равны по третьему признаку. Отсюда $\angle DBE = \angle CAH$. Таким образом, получается, что треугольники ACB и BDA равны по первому признаку, откуда следует требуемое равенство.

4. Есть мешок с орехами весом 1 г, 2 г, ..., 70 г и чашечные весы. Бельчата Вася и Петя по очереди кладут на весы по одному ореху из мешка, каждый на свою чашу, начинает Вася. После хода каждого игрока его чаша должна перевесить. Выигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?
Ответ. Вася.
Решение. Разобьем гирьки на пары: две самые тяжёлые, две следующие по весу и т. д. Каждым ходом Вася должен класть на весы одну из двух самых тяжёлых оставшихся гирек так, чтобы Петя был вынужден положить вторую гирьку пары. А именно, Вася кладёт более лёгкую, если разность весов гирек на чашах меньше 2 г, и более тяжёлую, если разность равна 2 г. В частности, первые ходы: 69 г, 70 г, 67 г, 68 г, 65 г, 66 г и т.д. После каждой пары ходов обоих игроков разность между весами на чашах будет равна 2 г. Тогда после 24 ходов в распоряжении Васи останутся гирьки весом 1 г и 2 г, а чаша Пети будет перевешивать на 2 г. При этом у Васи не будет возможности сделать ход, поэтому он выиграет.

5. Числа от 1 до $2n$ $(n > 1)$ разбили на две группы по n чисел. Пусть A – произведение чисел в первой группе, а B – во второй группе. Может ли $|A - B| = 555559$?
Ответ. Не может.
Решение. Предположим, что найдётся такое n, что числа от 1 до $2n$ можно разбить требуемым образом. Разность произведений может равняться нечётному числу 555559, только если одно произведение нечётное, а другое чётное. Но произведение натуральных чисел нечётно, только если все сомножители нечётны. А среди чисел от 1 до $2n$ ровно n нечётных чисел. Значит, числа от 1 до $2n$ должны быть разбиты на группы нечётных чисел $(1, 3, \dots, 2n - 1)$ и чётных чисел $(2, 4, \dots, 2n)$. И при этом $2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n - 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1) = 555559$. Заметим, что $2n > 12$, так как $2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 12 = 46080 < 555559$. Но тогда среди чётных чисел встретятся числа 6 и 12. Поэтому произведение чётных чисел делится на 9. Среди нечётных чисел встретится число 9. Поэтому произведение нечётных чисел также делится на 9. Значит, разность произведений должна делиться на 9. А число 555559 на 9 не делится. Противоречие.

8 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Сумма 14 натуральных чисел равна 2023. Найдите, какое максимальное значение может принимать наибольший общий делитель слагаемых, и приведите пример таких чисел.
Ответ. 119.
Решение. Наибольший общий делитель должен быть делителем числа 2023. Число $2023 = 7 \cdot 17^2$, то есть имеет делители $7, 17, 119, 289, 2023$. Поскольку $289 \cdot 14 > 2023$, наибольшим подходящим числом является 119. Пример: 13 чисел 119 и число 476 ($476 = 119 \cdot 4$).
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пример отсутствует – 15 баллов. Верные рассуждения, но число 2023 считается простым – 10 баллов (без верных рассуждений – 1 балл). Число 2023 разложено на простые множители, но решение не закончено – 10 баллов. Число 2023 не разложено на простые множители, ответ «7» – 5 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Рассмотрены примеры, дающие оценку – 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

2. Приведённый квадратный трёхчлен имеет два действительных корня. Коэффициент при x^2 увеличили на 2, а коэффициент при x и свободный член уменьшили на 4. При этом оба корня трёхчлена увеличились на 1. Найдите исходный квадратный трёхчлен.
Ответ. $x^2 + x - 2$.
Решение. Пусть $x^2 + px + q$ – исходный квадратный трёхчлен, x_1, x_2– его корни. Тогда $x_1 + x_2 = -p, x_1 + x_2 + 2 = -\frac{p-4}{3}$. Из уравнения $-p + 2 = -\frac{p-4}{3}$ находим $p = 1$.
Применяя опять теорему Виета, получаем $x_1 x_2 = q$, $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = \frac{q-4}{3}$. Но $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = q - p + 1 = q$. Из уравнения $q = \frac{q-4}{3}$ находим $q = -2$. Исходный квадратный трёхчлен имеет вид $x^2 + x - 2$, а преобразованный $3x^2 - 3x - 6$. Необходимо еще проверить, что трёхчлены имеют корни. Дискриминант исходного трёхчлена равен 9, корни равны -2 и 1. Дискриминант преобразованного трёхчлена равен 225, корни равны -1 и 2.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Не проверено, что трёхчлены имеют корни – 19 баллов. В преобразовании допущена ошибка или описка – снимается 1 балл. При верном в целом решении есть ошибка – 15 баллов. Верный ход решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. Решение найдено подбором, не доказано, что других решений нет – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

3. Существуют ли такие целые n, для которых $n + 2 = a^3$ и $n^2 - 2n + 4 = b^3$, где a и b – натуральные числа?

Ответ. Нет.

Решение. Если $n + 2$ и $n^2 - 2n + 4$ — точные кубы, то их произведение также должно быть точным кубом. Итак, рассмотрим $(n + 2)(n^2 - 2n + 4) = n^3 + 8$. Это может быть точный куб, только если он на 8 больше, чем другой точный куб, а именно n^3. Легко видеть, что единственные пары точных кубов, отличающиеся на 8, это $(-8, 0)$ и $(0, 8)$. В первой паре число 0 не является натуральным числом (а должно, как произведение натуральных чисел). Таким образом, должно выполняться $n^3 = 0^3$, то есть $n = 0$. При этом значении $n^2 - 2n + 4$ не является точным кубом. Поэтому $n + 2$ и $n^2 - 2n + 4$ не могут оба быть кубами.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получены выражения $n^3 + 8$ и n^3 – 18 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

4. Пятеро бельчат (рыжий, серый, белый, чёрный, полосатый) встали в ряд. Рыжий не рядом с серым. Чёрный не рядом с полосатым. Серый не рядом с белым. Сколькими способами бельчата могли встать в ряд?

Ответ. 28.

Решение. 1) Пусть серый на первом (крайнем левом) месте. Поскольку серый не рядом с рыжим и белым, то справа от него должен быть чёрный или полосатый. Среднее место должно быть у рыжего или белого (потому что чёрный и полосатый не рядом). Место справа от среднего места может занять тот, кто остался от чёрного и полосатого, или тот, кто остался от рыжего и белого. На последнее место остался только один бельчонок. Есть 2 способа переставить рыжего и белого, 2 способа переставить чёрного и полосатого, а также 2 способа выбрать, кто займет место справа от среднего места. Всего $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ способов.

2) Серый стоит на втором месте. Чёрный и полосатый должны быть по обе стороны от серого, иначе нам пришлось бы посадить рыжего или белого рядом с серым, что запрещено.Затем рыжий и белый занимают оставшиеся два места. Есть 2 способа переставить рыжего и белого, 2 способа переставить чёрного и полосатого. Всего $2 \cdot 2 = 4$ способа.

3) Серый стоит посередине. И снова чёрный и полосатый должны быть по обе стороны от серого, а рыжий и белый занимают оставшиеся два места. Здесь также есть 4 варианта.

4) Серый стоит на четвертом месте. По симметрии это то же самое, что и в случае 2), 4 варианта.

5) Серый стоит на последнем месте (крайнем правом). По симметрии это то же самое, что и в случае 1), 8 вариантов.

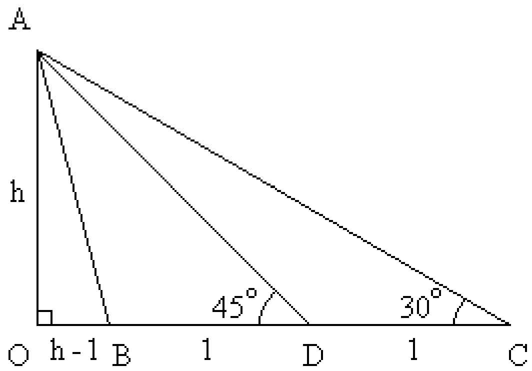
Складывая число вариантов, получаем $8 + 4 + 4 + 4 + 8 = 28$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Допущена одна ошибка – 18 баллов. Из-за однотипной ошибки не учтено несколько способов или посчитаны лишние – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

5. В $\Delta\, ABC$ точка D – середина BC. Найдите градусную меру $\angle ABC$, если $\angle ACB = 30°$ и $\angle ADB = 45°$.

Ответ. $105°$.

Решение. Проведём из точки A высоту к стороне BC; пусть она пересекает продолжение стороны BC в точке O. Без ограничения общности пусть $BD = DC = 1$, и пусть $AO = h$. Тогда $OD = h$ и $OB = h - 1$. В прямоугольном треугольнике AOC гипотенуза равна $\sqrt{h^2 + (h+1)^2} = \sqrt{2h^2 + 2h + 1}$. Катет, лежащий против угла $30°$, равен половине гипотенузы. Отсюда $2h = \sqrt{2h^2 + 2h + 1}$, или $2h^2 - 2h - 1 = 0$. Решая уравнение, находим: $h = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Найдём AB: $AB^2 = h^2 + (h-1)^2 = 2h^2 - 2h + 1 = 2h^2 - 2h - 1 + 2 = 0 + 2 = 2$, и $AB = \sqrt{2}$. Рассмотрим треугольники ABC и DBA. У них общий угол $\angle ABC$, а стороны, образующие этот угол, пропорциональны ($AB = \sqrt{2}, BD = 1$ и $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2, \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$). Следовательно, треугольники ABC и DBA подобны. Поэтому $\angle BCA = \angle DAB = 30°$, а $\angle ABD = 180° - (45° + 30°) = 105°$.



Замечание. Если исходить из чертежа с острым углом B, когда $O \in (BD)$, то значение OB в этом решении окажется отрицательным, что указывает на то, что O лежит по другую сторону от B, иначе катет оказывается больше гипотенузы. Также легко видеть, что при прямом угле B условия не могут выполняться.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Решение проведено на основе чертежа с острым углом B, и не замечено, что этот случай невозможен – 10 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы –15 баллов. Доказаны некоторые полезные утверждения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

Вариант 2

1. Сумма 18 натуральных чисел равна 2075. Найдите, какое максимальное значение может принимать наибольший общий делитель слагаемых, и приведите пример таких чисел.

Ответ. 83.

Решение. Наибольший общий делитель должен быть делителем числа 2075. Число $2075 = 83 \cdot 5^2$, то есть имеет делители $5, 25, 83, 415, 2075$. Поскольку $415 \cdot 18 > 2075$, наибольшим подходящим числом является 83. Пример: 17 чисел 83 и число 664 ($664 = 83 \cdot 8$).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верно найден НОД, но пример не верен – 15 баллов. Число 2075 не разложено на множители, ответ «5» или «25» – 5 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Рассмотрены примеры, дающие оценку – 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

2. Приведённый квадратный трёхчлен имеет два действительных корня. Коэффициенты при x^2 и при x увеличили на 1, а свободный член уменьшили на 22. При этом оба корня трёхчлена уменьшились на 1. Найдите исходный квадратный трёхчлен.

Ответ. $x^2 - 3x - 18$.

Решение. Пусть $x^2 + px + q$ – исходный квадратный трёхчлен, x_1, x_2 – его корни. Тогда $x_1 + x_2 = -p,\ x_1 + x_2 - 2 = -\frac{p+1}{2}$. Из уравнения $-p - 2 = -\frac{p+1}{2}$ находим $p = -3$.

Применяя опять теорему Виета, получаем $x_1x_2 = q,\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{q-22}{2}$.

Но $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = q + p + 1 = q - 2$. Из уравнения $q - 2 = \frac{q-22}{2}$ находим $q = -18$. Исходный квадратный трёхчлен имеет вид $x^2 - 3x - 18$, а преобразованный $2x^2 - 2x - 40$. Необходимо еще проверить, что трёхчлены имеют корни. Дискриминант исходного трёхчлена равен 81, корни равны -3 и 6. Дискриминант преобразованного трёхчлена равен $4 \cdot 81$, корни равны -4 и 5.

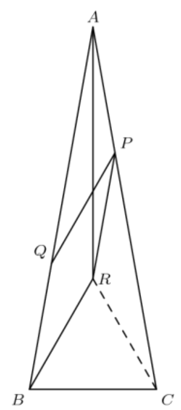
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Не проверено, что трёхчлены имеют корни – 19 баллов. В преобразовании допущена ошибка или описка – снимается 1 балл. При верном в целом решении есть ошибка – 15 баллов. Верный ход решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

3. Существуют ли такие целые n, для которых $n + 1 = a^3$ и $n^2 - 4n + 7 = b^3$, где a и b – натуральные числа?

Ответ. Нет.

Решение. Если $n + 1$ и $n^2 - 4n + 7$ — точные кубы, то их произведение также должно быть точным кубом. Итак, рассмотрим $(n + 1)(n^2 - 4n + 7) = n^3 - 3n^2 + 3n + 7 = (n - 1)^3 + 8$. Это может быть точный куб, только если он на 8 больше, чем другой точный куб, а именно $(n - 1)^3$. Легко видеть, что единственные пары точных кубов, отличающиеся на 8, это $(-8, 0)$ и $(0, 8)$. В первой паре число 0 не является натуральным числом (а должно, как произведение натуральных чисел). Таким образом, должно выполняться $(n - 1)^3 = 0^3$, то есть $n = 1$. При этом значении $n^2 - 4n + 7$ не является точным кубом. Поэтому $n + 1$ и $n^2 - 4n + 7$ не могут оба быть кубами.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*



4. В треугольнике ABC известно, что углы B и C равны. Точки P и Q лежат на AC и AB соответственно, так что $AP = PQ = QB = BC$. Найдите отношение градусных мер углов ACB и APQ.

Ответ. $\frac{4}{7}$.

Решение. Проведём через вершину B прямую, параллельную QP, а через точку P – прямую, параллельную AB. Точку пересечения прямых обозначим R. Тогда $BQPR$ – параллелограмм с равными смежными сторонами, то есть ромб. Значит $ABRP$ – равнобедренная трапеция. Диагональ BP делит угол ромба $\angle ABP$ пополам, но это и угол трапеции. Из симметрии в равнобедренной трапеции следует, что другая диагональ AR тоже делит угол $\angle BAP$ пополам. Значит, AR – биссектриса равнобедренного треугольника, и точка R лежит на серединном перпендикуляре к BC. Следовательно, треугольник BRC – равнобедренный, а поскольку $BR = BC$, он равносторонний. Теперь можно посчитать углы. Обозначим $x = \angle QBR = \angle RCP = \angle BAC$. Запишем сумму углов треугольника ABC : $\angle QBR + \angle RBC + \angle BCR + \angle RCP + \angle BAC = 3x + 120° = 180°$, откуда

$x = 20°$. $\angle ACB = x + 60° = 80°$. $\angle APQ = 180° - 40° = 140°$. Отношение градусных мер углов ACB и APQ равно $\frac{80}{140} = \frac{4}{7}$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы –15 баллов. Доказаны некоторые полезные утверждения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

5. Девять девушек заказали мороженое. Три из них выбрали фруктовое, три шоколадное, три ванильное. Официант принёс девять порций мороженого, по три порции каждого вида, но перепутал, и только одной девушке дал то, что она заказывала. Сколько существует вариантов такого распределения порций мороженого?

Ответ. 216.

Решение. Обозначим девушек ФФФШШШВВВ. Одна из них получила то, что хотела. Пусть это будет первая Ф (потом результат вычислений умножим на 9, чтобы учесть всех девушек). Рассмотрим вторую и третью ФФ. 1) Пусть обе они получили ШШ, 1 вариант. Тогда девушки ВВВ должны были получить ФФШ, 3 варианта. Девушкам ШШШ достанутся ВВВ, потому что других не осталось. Всего $1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$ варианта. 2) Пусть вторая и третья ФФ получили ВВ. Этот случай аналогичен предыдущему и тоже даёт 3 варианта. 3) Пусть одна Ф получила Ш, а другая Ф получила В, 2 варианта. Имеем уже розданные порции ФШВ, остались девушки ШШШВВВ и мороженое ФФШШВВ. Девушки ШШШ тогда получат ВВФ (так как нельзя оставлять мороженое ВВ девушкам ВВ), 3 варианта. Девушки ВВВ получат соответственно ШШФ, 3 варианта. Всего в случае 3) $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ вариантов. Суммируя варианты по трём случаям, получаем:
$3 + 3 + 18 = 24$. Это результат в предположении, что верно мороженое подали первой девушке. Ответ получается умножением на 9, поскольку на месте первой могла быть любая девушка, $9 \cdot 24 = 216$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Допущена одна ошибка – 18 баллов. Из-за однотипной ошибки не учтено несколько способов – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

Вариант 3

1. Сумма 15 натуральных чисел равна 2107. Найдите, какое максимальное значение может принимать наибольший общий делитель слагаемых, и приведите пример таких чисел.

Ответ. 49.

Решение. Наибольший общий делитель должен быть делителем числа 2107. Число $2107 = 43 \cdot 7^2$, то есть имеет делители $7, 43, 49, 301, 2107$. Поскольку $301 \cdot 15 > 2107$, наибольшим подходящим числом является 49. Пример: 14 чисел 49 и число 1481 ($1481 = 49 \cdot 29$).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ход решения, но число 301 не разложено на множители, или верное решение записано, но отброшено – 15 баллов. Число 2107 не разложено на множители, ответ «7» – 5 баллов. В решении есть продвижение – 5 баллов. Рассмотрены примеры, дающие оценку – 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

2. Приведённый квадратный трёхчлен имеет два действительных корня. Коэффициент при x^2 увеличили на 1, коэффициент при x уменьшили на 2,5, а свободный член уменьшили на 11. При этом оба корня трёхчлена увеличились на 1. Найдите исходный квадратный трёхчлен.

Ответ. $x^2 + 1{,}5x - 10$.

Решение. Пусть $x^2 + px + q$ – исходный квадратный трёхчлен, x_1, x_2 – его корни. Тогда $x_1 + x_2 = -p, x_1 + x_2 + 2 = -\frac{p-2{,}5}{2}$. Из уравнения $-p + 2 = -\frac{p-2{,}5}{2}$ находим $p = 1{,}5$. Применяя опять теорему Виета, получаем $x_1 x_2 = q$, $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = \frac{q-11}{2}$. Но $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = q - p + 1 = q - 0{,}5$. Из уравнения $q - 0{,}5 = \frac{q-11}{2}$ находим $q = -10$. Исходный квадратный трёхчлен имеет вид $x^2 + 1{,}5x - 10$, а преобразованный $2x^2 - x - 21$. Необходимо еще проверить, что трёхчлены имеют корни. Дискриминант исходного трёхчлена равен $42{,}25$, корни равны -4 и $2{,}5$. Дискриминант преобразованного трёхчлена равен 169, корни равны -3 и $3{,}5$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Не проверено, что трёхчлены имеют корни – 19 баллов. При верном в целом решении есть ошибка – 15 баллов. Верный ход решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

3. Существуют ли такие целые n, для которых $n + 3 = a^3$ и $n^2 + 3 = b^3$, где a и b – натуральные числа?

Ответ. Нет.

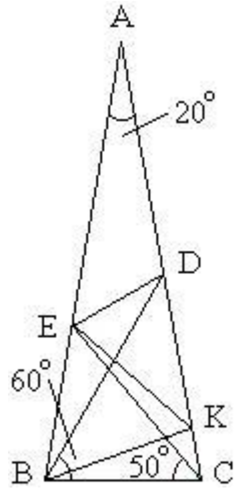
Решение. Если $n + 3$ и $n^2 + 3$ — точные кубы, то их произведение также должно быть точным кубом. Итак, рассмотрим $(n + 3)(n^2 + 3) = n^3 + 3n^2 + 3n + 9 = (n + 1)^3 + 8$. Это может быть точный куб, только если он на 8 больше, чем другой точный куб, а именно $(n + 1)^3$. Легко видеть, что единственные пары точных кубов, отличающиеся на 8, это $(-8, 0)$ и $(0, 8)$. В первой паре число 0 не является натуральным числом (а должно, как произведение натуральных чисел). Таким образом, должно выполняться $(n + 1)^3 = 0^3$, то есть $n = -1$. При этом значении $n^2 + 3$ не является точным кубом. Поэтому $n + 3$ и $n^2 + 3$ не могут оба быть кубами.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование – 15 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

4. В треугольнике ABC равны стороны AB и AC, $\angle BAC = 20°$. На стороне AC выбрана точка D так, что$\angle DBC = 60°$. Точка E находится на стороне AB, и $\angle ECB = 50°$. Найдите величину $\angle EDB$.

Ответ. $30°$.

Решение. Отметим точку K на AC так, чтобы $\angle KBC = 20°$. Проведем KB и KE.



$\angle BEC = 180° - 80° - 50° = 50°$, $\angle ECB = 50°$. $\angle BEC = \angle ECB$, поэтому ΔBEC равнобедренный с $BE = BC$.
$\angle BKC = 180° - 80° - 20° = 80° = \angle BCK$, поэтому ΔBKC равнобедренный с $BK = BC$. Следовательно, $BE = BK$. $\angle EBK = 60°$, значит, ΔEBK равносторонний. $\angle BDK = 180° - 80° - 60° = 40°$, $\angle DBK = 60° - 20° = 40°$, поэтому ΔBDK равнобедренный, при этом $KD = KB = KE$. Таким образом, ΔKDE равнобедренный. $\angle EKC = 60° + 80° = 140°$, тогда смежный $\angle EKD = 40°$. Следовательно, $\angle EDK = \frac{180° - 40°}{2} = 70°$, а $\angle EDB = 70° - 40° = 30°$.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы –15 баллов. Доказаны некоторые полезные утверждения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

5. В школе есть три команды: по математике, физике и информатике. В каждой команде две девочки и два мальчика. Никто не участвует в двух командах. Из этих команд надо отобрать 6 школьников в сборную по следующим правилам: в сборной должны быть три девочки и три мальчика, и из каждой команды должны быть двое. Сколько существует способов составить сборную?
Ответ. 88.
Решение. Случай 1. Из каждой команды берут мальчика и девочку. Из одной команды мальчика можно выбрать 2 способами, девочку тоже двумя, всего $2 \cdot 2 = 4$ способа. Из трёх команд число способов $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Случай 2. Из одной команды берут двух мальчиков. Тогда девочек из этой команды взять не могут, и из какой-то команды придётся взять двух девочек, а из третьей одну девочку. Первую команду можно выбрать 3 способами, вторую – 2 способами, всего способов выбрать команды $3 \cdot 2 = 6$. Девочку из третьей команды можно выбрать 2 способами. Еще надо выбрать третьего мальчика, его придётся выбирать из третьей команды, и это сделать можно 2 способами. Всего способов в случае 2: $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$. Итак, существует $64 + 24 = 88$ способов.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Допущена одна комбинаторная ошибка – 18 баллов. Из-за однотипной ошибки не учтено несколько способов – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

Вариант 4

1. Найдите какое-нибудь натуральное число, которое заканчивается на «2023» и квадрат которого содержит последовательность цифр «2023».
Ответ. Например, 5002023.
Решение. Рассмотрим формулу $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Если взять $a = 5 \cdot 10^k$, $b = 2023$, то член $2ab = 10a \cdot 2023$. Член b^2 содержит 7 цифр, поэтому $k \geq 6$. Пример: $(5 \cdot 10^6 + 2023)^2 = 25 \cdot 10^{12} + 2023 \cdot 10^7 + 4092529 = 250\mathbf{2023}4092529$.
Комментарий. *Верный пример с обоснованиями – 20 баллов. Только верное число, но не показано, что оно удовлетворяет условиям – 15 баллов. Верный ход решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

2. На доске написан квадратный трёхчлен $g(x) = x^2 + 2022x + 2024$. При своем ходе Катя изменяет на 1 (увеличивает или уменьшает) коэффициент при x. При своем ходе Вася увеличивает или уменьшает на 3 свободный член. Вася выигрывает, если в какой-нибудь момент написанный на доске многочлен $g(x)$ имеет целый корень. Первой ходит

Катя. Может ли Катя помешать Васе выиграть при любых его ходах? Как она для этого должна действовать?

Ответ. Да, может. Например, постоянно придерживаться коэффициентов при x, равных 2023 и 2024, или 2021 и 2020.

Решение. Стратегия Кати состоит в том, чтобы найти два подходящих соседних значения коэффициента при x, и затем придерживаться этих значений. Рассмотрим делимость $g(x)$ на 3. Наша цель – найти два соседних значения коэффициента, при которых многочлен не кратен 3 при любом целом x, поэтому он не может обратиться в 0. При $x = 3n + 1$ остаток от деления $g(x)$на 3 составляет 0, поэтому коэффициент 2022 не является подходящим. Пусть первым ходом Катя увеличит коэффициент при x на 1: $g_1(x) = x^2 + 2023x + 2024$. Рассмотрим делимость $g_1(x)$ на 3. При $x = 3n$ остаток от деления $g_1(x)$ на 3 равен 2; при $x = 3n + 1$ остаток от деления $g_1(x)$ на 3 составляет 1, при $x = 3n + 2$ остаток от деления $g_1(x)$ на 3 составляет 2. Следовательно, многочлен $g_1(x)$ и многочлен $g_1(x) \pm 3k$, получающийся после ходов Васи, не кратен 3 при любом целом x. Следующим ходом Катя опять увеличит коэффициент при x на 1: $g_2(x) = x^2 + 2024x + 2024$. Рассмотрим делимость $g_2(x)$ на 3. При $x = 3n$ остаток равен 2; при $x = 3n + 1$ остаток составляет 2, при $x = 3n + 2$ остаток равен 1. Следовательно, многочлен $g_2(x)$ и многочлен $g_2(x) \pm 3k$, получающийся после ходов Васи, не кратен 3 при любом целом x, значит, он не обращается в 0 при целом аргументе.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование верной стратегии – 15 баллов. Верный ход решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. В решении есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

3. На математическом турнире команда «Пифагор» состояла из Ани, Марата, Олега и Светы. Команда должна была решить задачи по арифметике и геометрии, всего 7 задач. Каждую задачу по арифметике решали двое, а каждую задачу по геометрии – трое. Состав решающих для каждой задачи был разный. Аня решала больше задач, чем Света. Олег решал две задачи по геометрии и одну задачу по арифметике. Сколько задач решала Света?

Ответ. 4.

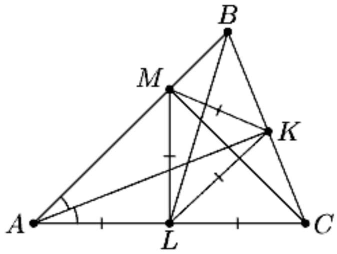
Решение. Было 4 задачи, которые не решал Олег. Но трое оставшихся могут решать не больше 4 задач: одну по геометрии втроём, и три по арифметике парами (АМС, АМ, АС, МС). Значит, без Олега решали три задачи по арифметике и одну по геометрии. И Аня, и Света, приняли участие в решении трёх из этих четырёх задач. Но Аня решала больше задач, чем Света. Значит, Аня решала и вместе с Олегом. Олег решал две задачи по геометрии, поэтому хотя бы одну вместе со Светой (потому что тройка без Светы только одна, ОМА). Рассмотрим варианты. 1) Олег дважды решал с Аней, а со Светой только один раз (например, ОАМ, ОАС, ОМ). 2) Олег трижды решал с Аней, а со Светой дважды – этот случай невозможен, так как всего задействовано 8 человек (три раза Олег, три раза Аня, два раза Света). Но из них нельзя составить две разные тройки. 3) Олег трижды решал с Аней, а со Светой только один раз (например, ОАМ, ОАС, ОА). В возможных случаях 1) и 3) Света решала 4 задачи.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Рассмотрены не все варианты – 15 баллов. Верный ход решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. В решении есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

4. Из одной вершины треугольника ABC провели биссектрису, из другой медиану, из третьей высоту. Их основания образовали равносторонний треугольник. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ. $60°, 60°, 60°$.

Решение. Пусть проведены биссектриса AK, медиана BL, высота CM. Тогда треугольник AMC – прямоугольный, и его медиана ML равна половине гипотенузы: $ML = AL = LC$, а также отрезкам KL и KM, так как стороны треугольника KLM равны (см. рис.). В треугольнике AKC медиана KL равна половине стороны AC, поэтому угол AKC прямой и в треугольнике ABC биссектриса AK является высотой. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный ($AB = AC$) и AK является также медианой: $BK = KC$. Значит, MK – медиана прямоугольного треугольника BMC, поэтому $BC = 2MK = 2KL = AC$. Итак, $AB = BC = AC$, то есть треугольник равносторонний.



Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы –15 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Задача решена в неверных условиях– 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

5. В соревнованиях по бегу соревновались 4 спортсмена. Сколько вариантов результатов может быть с учетом того, что любое число участников может прийти к финишу одновременно? Например, один из способов: 2-й выиграл, 4-й и 3-й поделили следующие места между собой, 1-й последний.

Ответ. 75.

Решение. Будем записывать в скобках номера участников, имеющих одинаковый результат. Рассмотрим возможные случаи.

1) У всех одинаковый результат: (1, 2, 3, 4) – 1 вариант.
2) Одинаковый результат у троих: (1) и (2, 3, 4), (2) и (1, 3, 4), (3) и (1, 2, 4), (4) и (1, 2, 3) – 4 варианта, и тройка может быть и на первом месте, что даёт еще 4 варианта, всего 8.
3) Одинаковые результаты у двух пар: (1, 2) и (3, 4), (1, 3) и (2, 4), (1, 4) и (2, 3) – 3 варианта, и пары могут поменяться местами, что даёт еще 3 варианта, всего 6.
4) Одинаковые результаты только у одной пары: 1, 2, (3, 4); 1, 3, (2, 4); 1, 4, (2, 3); 2, 3, (1, 4); 2, 4, (1, 3); 3, 4, (1, 2) – 6 вариантов, и в каждом варианте 3 элемента (пара и 2 отдельных участника), которые могут быть переставлены числом способов $3! = 6$. Всего вариантов $6 \cdot 6 = 36$.
5) Все участники показали разный результат: (1) (2) (3) 4). Результаты можно переставить числом способов $4! = 24$. Всего вариантов 24.

Следовательно, число возможных результатов равно $1 + 8 + 6 + 36 + 24 = 75$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Допущена одна комбинаторная ошибка – 18 баллов. Из-за однотипной ошибки не учтено несколько способов или посчитаны лишние – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

9 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Каждый житель уезда про каждого из остальных знает, купец он или разбойник. Как-то раз встретились 28 жителей. Двое из них сказали: «Ровно двое из всех разбойники», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из всех разбойники», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из всех разбойники», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из всех разбойники». Сколько разбойников было среди встретившихся?

Ответ. 14 или 28.

Решение. Пусть последняя фраза верна. Тогда все говорившие ее – купцы, и разбойников должно быть ровно 14. Поэтому все говорившие остальные фразы – разбойники и такая ситуация возможна. Пусть последняя фраза неверна. Тогда говорившие ее – разбойники и разбойников не менее 14. Поэтому первые три фразы неверны и, значит, в первых трех группах тоже лгут. Поэтому все встретившиеся – разбойники.

2. Числа a и b таковы, что одновременно выполнены равенства

$$a^4 + 3a^3b = 3a^2 + 5 \text{ и } a^3b + 4ab + 1 = a^4 + a^2.$$

Какие значения может принимать ab?

Ответ. 1.

Решение. Сложим указанные равенства, после преобразования получим:

$$4a^3b + 4ab - 4a^2 - 4 = 0 \iff a^3b + ab - a^2 - 1 = 0 \iff (ab - 1)(a^2 + 1) = 0.$$

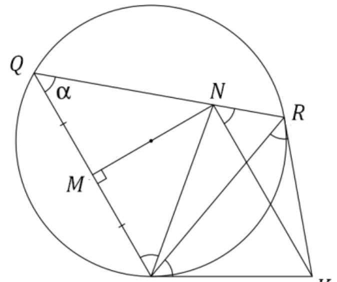
Последнее равенство возможно, только если $ab = 1$. Оба равенства выполнены при $a^4 = 5, b = \frac{1}{a}$.

3. Маша записала в каждую клетку квадрата 10×10 в некотором порядке по одному натуральному числу от 103 до 202 (числа не повторяются). Она вычислила произведение чисел в каждом столбце таблицы и получила набор из десяти чисел. Затем Маша вычислила произведения чисел в каждой строке таблицы и также получила набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ. Нет, не могли.
Решение. Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых чисел не превышающих 202: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встречаться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них, больше 202. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

4. Найдите все пары $(p;q)$ простых чисел, при которых графики функций $y = 2x^4 + 2(q-2)x$ и $y = 2p - 8$ имеют хотя бы одну точку пересечения с целочисленными координатами.
Ответ. $(2;5)$, $(2;11)$, $(5;2)$.
Решение. Запишем уравнение $x^4 + (q-2)x = p - 4$. Рассмотрим три случая.
1) p и q нечётны. Тогда левая часть уравнения чётна, а правая нечётна, что невозможно.
2) p – чётно, т.е. $p = 2$. Тогда уравнение можно записать в виде $x(x^3 + q - 2) = -2$. Значит, x – делитель числа -2, т.е. $x = \pm 1$ или $x = \pm 2$. Этим значениям x соответствуют следующие значения q: -1, 5, -7 и 11. Из них подходят только положительные.
3) q – чётно, т.е. $q = 2$. Тогда после преобразований уравнение приводится к виду $((x-1)^2+1)((x+1)^2+1) = p$. Так как оба множителя в левой части положительны, то один из них равен 1, откуда $x = 1$ или $x = -1$. В обоих случаях $p = 5$.

5. Вокруг треугольника PQR описана окружность ω. Касательные к окружности, проведенные в точках P и R, пересекаются в точке K. Точка M – середина стороны PQ. Прямая, проходящая через точку K параллельно PQ, пересекает сторону RQ в точке N. Докажите, что $\angle PMN = 90^\circ$.
Решение. Положим $\alpha = \angle PQR$. Угол между касательной PK и хордой PR окружности ω равен вписанному в неё углу, который опирается на PR, откуда $\alpha = \angle RPK = \angle PRK$. Так как $PQ \parallel KN$, мы получаем $\angle RNK = \angle PQR = \angle RPK$. Значит, четырехугольник $PNRK$ – вписанный.



Тогда

$$\angle PNQ = 180^\circ - \angle PNR = \angle PKR = 180^\circ - 2\alpha;$$
$$\angle NQP = \alpha = 180^\circ - \angle PNQ - \alpha = \angle NPQ.$$

Поэтому треугольник PNQ равнобедренный, а его медиана NM является также и высотой. Таким образом, $\angle PMN = 90^\circ$.

Вариант 2

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Каждый житель уезда про каждого из остальных знает, купец он или разбойник. Как-то раз встретились 32 жителей. Двое из них сказали: «Ровно двое из всех разбойники», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из всех разбойники», потом десять из оставшихся сказали: «Ровно десять из всех разбойники», наконец, все оставшиеся 16 сказали: «Ровно 16 из всех разбойники». Сколько разбойников было среди встретившихся?
Ответ. 16 или 32.
Решение. Пусть последняя фраза верна. Тогда все говорившие ее – купцы, и разбойников должно быть ровно 16. Поэтому все говорившие остальные фразы – разбойники и такая ситуация возможна. Пусть последняя фраза неверна. Тогда говорившие ее – разбойники и разбойников не менее 16. Поэтому первые три фразы неверны и, значит, в первых трех группах тоже лгут. Поэтому все встретившиеся – разбойники.

2. Числа a и b таковы, что одновременно выполнены равенства

$$a^4 + 4a^3b = 4a^2 + 6 \text{ и } a^3b + 5ab + 1 = a^4 + a^2.$$

Какие значения может принимать ab?
Ответ. 1.
Решение. Сложим указанные равенства, после преобразования получим:

$$5a^3b + 5ab - 5a^2 - 5 = 0 \iff a^3b + ab - a^2 - 1 = 0 \iff (ab-1)(a^2+1) = 0.$$

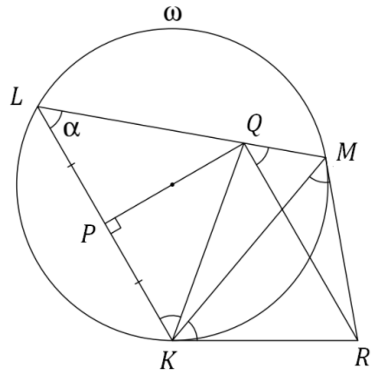
Последнее равенство возможно, только если $ab = 1$. Оба равенства выполнены при $a^4 = 6, b = \frac{1}{a}$.

3. Маша записала в каждую клетку квадрата 10×10 в некотором порядке по одному натуральному числу от 104 до 203 (числа не повторяются). Она вычислила произведение чисел в каждом столбце таблицы и получила набор из десяти чисел. Затем Маша вычислила произведения чисел в каждой строке таблицы и также получила набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?
Ответ. Нет, не могли.
Решение. Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых чисел не превышающих 203: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встречаться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них, больше 203. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

4. Найдите все пары $(p; q)$ простых чисел, при которых графики функций $y = 3x^4 + 3(q-2)x$ и $y = 3p - 12$ имеют хотя бы одну точку пересечения с целочисленными координатами.
Ответ. $(2; 5)$, $(2; 11)$, $(5; 2)$.
Решение. Запишем уравнение $x^4 + (q-2)x = p - 4$. Рассмотрим три случая.
1) p и q нечётны. Тогда левая часть уравнения чётна, а правая нечётна, что невозможно.

2) p – чётно, т.е. $p = 2$. Тогда уравнение можно записать в виде $x(x^3 + q - 2) = -2$. Значит, x – делитель числа -2, т.е. $x = \pm 1$ или $x = \pm 2$. Этим значениям x соответствуют следующие значения q: -1, 5, -7 и 11. Из них подходят только положительные.
3) q – чётно, т.е. $q = 2$. Тогда после преобразований уравнение приводится к виду $((x - 1)^2 + 1)((x + 1)^2 + 1) = p$. Так как оба множителя в левой части положительны, то один из них равен 1, откуда $x = 1$ или $x = -1$. В обоих случаях $p = 5$.

5. Вокруг треугольника KLM описана окружность ω. Касательные к окружности, проведенные в точках K и M, пересекаются в точке R. Точка P – середина стороны KL. Прямая, проходящая через точку R параллельно KL, пересекает сторону ML в точке Q. Найдите угол KPQ.
Решение. Положим $\alpha = \angle KLM$. Угол между касательной KR и хордой KM окружности ω равен вписанному в неё углу, который опирается на KM, откуда $\alpha = \angle MKR = \angle KMR$. Так как $KL \parallel RQ$, мы получаем $\angle MQR = \angle KLM = \angle MKR$. Значит, четырехугольник $KQMR$ – вписанный.



Тогда
$$\angle KQL = 180^{\circ} - \angle KQM = \angle KRM = 180^{\circ} - 2\alpha;$$
$$\angle QLK = \alpha = 180^{\circ} - \angle KQL - \alpha = \angle QKL.$$
Поэтому треугольник KQL равнобедренный, а его медиана PQ является также и высотой. Таким образом, $\angle KPQ = 90^{\circ}$.

Вариант 3

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Каждый житель уезда про каждого из остальных знает, купец он или разбойник. Как-то раз встретились 36 жителей. Двое из них сказали: «Ровно двое из всех разбойники», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из всех разбойники», потом двенадцать из оставшихся сказали: «Ровно двенадцать из всех разбойники», наконец, все оставшиеся 18 сказали: «Ровно 18 из всех разбойники». Сколько разбойников было среди встретившихся?
Ответ. 18 или 36.
Решение. Пусть последняя фраза верна. Тогда все говорившие ее – купцы, и разбойников должно быть ровно 18. Поэтому все говорившие остальные фразы – разбойники и такая ситуация возможна. Пусть последняя фраза неверна. Тогда говорившие ее – разбойники и разбойников не менее 18. Поэтому первые три фразы неверны и, значит, в первых трех группах тоже лгут. Поэтому все встретившиеся – разбойники.

2. Числа a и b таковы, что одновременно выполнены равенства
$$a^4 + 5a^3b = 5a^2 + 7 \text{ и } a^3b + 6ab + 1 = a^4 + a^2.$$
Какие значения может принимать ab?
Ответ. 1.

Решение. Сложим указанные равенства, после преобразования получим:

$$6a^3b + 6ab - 6a^2 - 6 = 0 \iff a^3b + ab - a^2 - 1 = 0 \iff (ab - 1)(a^2 + 1) = 0.$$

Последнее равенство возможно, только если $ab = 1$. Оба равенства выполнены при $a^4 = 7$, $b = \frac{1}{a}$.

3. Маша записала в каждую клетку квадрата 10×10 в некотором порядке по одному натуральному числу от 105 до 204 (числа не повторяются). Она вычислила произведение чисел в каждом столбце таблицы и получила набор из десяти чисел. Затем Маша вычислила произведения чисел в каждой строке таблицы и также получила набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ. Нет, не могли.

Решение. Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых чисел не превышающих 204: $151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199$. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встречаться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них, больше 204. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

4. Найдите все пары $(p; q)$ простых чисел, при которых графики функций $y = 4x^4 + 4(q-2)x$ и $y = 4p - 16$ имеют хотя бы одну точку пересечения с целочисленными координатами.

Ответ. $(2; 5)$, $(2; 11)$, $(5; 2)$.

Решение. Запишем уравнение $x^4 + (q-2)x = p - 4$. Рассмотрим три случая.

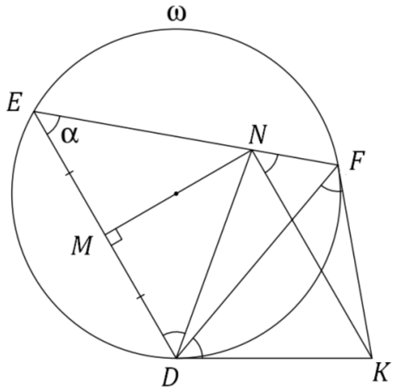
1) p и q нечётны. Тогда левая часть уравнения чётна, а правая нечётна, что невозможно.

2) p – чётно, т.е. $p = 2$. Тогда уравнение можно записать в виде $x(x^3 + q - 2) = -2$. Значит, x – делитель числа -2, т.е. $x = \pm 1$ или $x = \pm 2$. Этим значениям x соответствуют следующие значения q: -1, 5, -7 и 11. Из них подходят только положительные.

3) q – чётно, т.е. $q = 2$. Тогда после преобразований уравнение приводится к виду $((x-1)^2 + 1)((x+1)^2 + 1) = p$. Так как оба множителя в левой части положительны, то один из них равен 1, откуда $x = 1$ или $x = -1$. В обоих случаях $p = 5$.

5. Вокруг треугольника DEF описана окружность ω. Касательные к окружности, проведенные в точках D и F, пересекаются в точке K. Точка M – середина стороны DE. Прямая, проходящая через точку K параллельно DE, пересекает сторону FE в точке N. Докажите, что $DE \perp MN$.

Решение. Положим $\alpha = \angle DEF$. Угол между касательной DK и хордой DF окружности ω равен вписанному в неё углу, который опирается на DF, откуда $\alpha = \angle FDK = \angle DFK$. Так как $DE \parallel KN$, мы получаем $\angle FNK = \angle DEF = \angle FDK$. Значит, четырехугольник $DNFK$ – вписанный.



Тогда
$\angle DNE = 180^\circ - \angle DNF = \angle DKF = 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle NED = \alpha = 180^\circ - \angle DNE - \alpha = \angle NDE$. Поэтому треугольник DNE равнобедренный, а его медиана NM является также и высотой. Таким образом, $DE \perp MN$.

Вариант 4

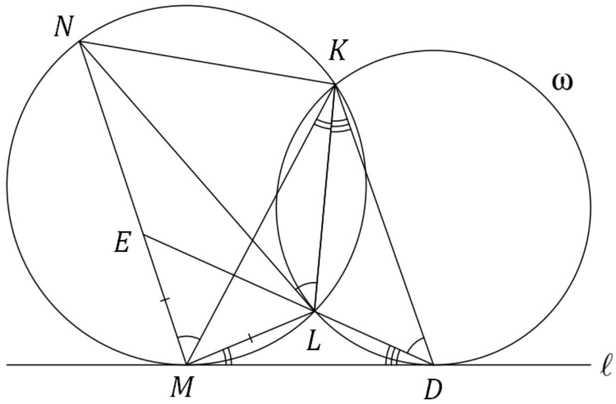
1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Каждый житель уезда про каждого из остальных знает, купец он или разбойник. Как-то раз встретились 19 жителей. Трое из них сказали: «Ровно трое из всех разбойники», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из всех разбойники», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из всех разбойники». Сколько разбойников было среди встретившихся?
Ответ. 9, 18 или 19.
Решение. Пусть третья фраза верна. Тогда все говорившие ее – купцы, и разбойников должно быть ровно девять. Поэтому все говорившие остальные фразы – разбойники. Их девять, а значит, промолчавший – купец, и такая ситуация возможна. Пусть третья фраза неверна. Тогда говорившие ее – разбойники и разбойников не менее девяти. Поэтому в первых двух группах тоже лгут. Следовательно, разбойников не менее 18. Последний же может быть кем угодно.

2. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a + bc = (a + b)(a + c)$. Докажите, что $b + ca = (b + c)(b + a)$.
Решение. Так как $a \neq 0$, то
$$a + bc = (a + b)(a + c) \iff a + bc = a^2 + ab + ac + bc \iff 1 = a + b + c \iff$$
$$\iff b = b^2 + bc + ba \iff b + ca = (b + c)(b + a).$$

3. В клетчатом квадрате 30×30 клеток отмечено 33 узла сетки (отмеченные узлы могут быть на сторонах квадрата). Верно ли, что найдутся два отрезка равной длины с вершинами в отмеченных узлах.
Решение. Всего отрезков с вершинами в данных точках $\frac{33 \cdot 32}{2} = 528$. По теореме Пифагора, длина любого отрезка с вершинами в данных точках – число вида $\sqrt{a^2 + b^2}$, где a и b – числа от 0 до 30. Можно считать, что $a \geq b$. Тогда для каждого числа a получается не более $a + 1$ допустимого значения числа b. То есть общее количество пар $(a; b)$ не более $1 + 2 + 3 + \cdots + 31 = \frac{31 \cdot 32}{2} = 506$. (На самом деле, ещё меньше, так как пара $(0; 0)$ не соответствует никакой длине отрезка). Значит, количество возможных значений выражения $\sqrt{a^2 + b^2}$ не больше 506, что меньше количества отрезков. Таким образом, какие-то два отрезка имеют одинаковую длину.

4. Найдите все такие простые p, что число $5^p + 4p^4$ является точным квадратом.
Ответ. $p = 5$
Решение. Пусть $5^p + 4p^4 = x^2$, где x – натуральное число. Тогда
$$5^p = x^2 - 4p^4 = (x - 2p^2)(x + 2p^2),$$
следовательно, $x - 2p^2 = 5^m$, $x + 2p^2 = 5^n$, где $m < n$. Если $m \neq 0$, то $4p^2 = 5^n - 5^m$ делится на 5, то есть $p = 5$, что удовлетворяет условию.
Если $m = 0$, то $n = p$ и $4p^2 = 5^p - 1$. При $p = 1$ последнее равенство верно, однако 1 не является простым числом. При увеличении p на единицу левая часть равенства увеличивается не более чем в 4 раза, а правая – более чем в 5 раз. Поэтому при $p > 1$ решений нет.

5. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. В точке M к этой окружности проведена касательная ℓ. Окружность ω проходит через точки K и L и касается прямой ℓ в точке D. Прямая DL пересекает отрезок MN в точке E. Докажите, что $LM = ME$, если известно, что LN – касательная к окружности ω.
Решение. Угол между касательной LN и хордой KL окружности ω равен вписанному в нее углу, который опирается на KL, поэтому $\angle KDL = \angle KLN = \angle KMN$. Тогда четырехугольник $KDME$ вписанный, откуда $\angle MEL = \angle MKD$.



Применяя еще два раза теорему о касательной и хорде, мы получим также равенства $\angle LMD = \angle LKM$ и $\angle LDM = \angle LKD$. Тогда
$$\angle MLE = 180^{\circ} - \angle MLD = \angle LMD + \angle LDM = \angle LKM + \angle LKD = \angle MKD = \angle MEL$$
Таким образом, треугольник LME равнобедренный, откуда $LM + ME$.

10 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Найдите все действительные решения системы $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-1, \\ x^3+y^3=4. \end{cases}$ $(x, y \neq 0)$.

Ответ. $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, y=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$.

Решение. Запишем второе уравнение в виде $(x+y)^3-3xy(x+y)=4$. Из первого уравнения следует $x+y=-xy$. Значит, $-(xy)^3+3(xy)^2=4$. Обозначим $xy=a$. Легко видеть, что уравнение $-a^3+3a^2=4$ имеет корень $a=-1$. Это позволяет разложить кубический многочлен на множители: $-a^3+3a^2-4=-(a+1)(a-2)^2=0$. Следовательно, $xy=-1$, $x+y=1$ или $xy=2, x+y=-2$. В первом случае x, y являются корнями квадратного уравнения $u^2-u-1=0$ и равны $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Во втором случае x, y являются корнями квадратного уравнения $u^2+2u+2=0$, имеющего отрицательный дискриминант.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ответ получен, но при разложении на множители рассматривались только целые значения – 10 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

2. Света выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, а Костя выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Каждый из них записывает свои цифры в порядке убывания. Какова вероятность, что трёхзначное число Кости больше трёхзначного числа Светы?

Ответ. $\frac{19}{28}$.

Решение. Будем называть получение большего числа выигрышем. Если одна из цифр Кости – 8, то он выигрывает. Вероятность этого $C_7^2 \big/ C_8^3 = 21/56 = 3/8$. Если каждый из них выбирает из цифр от 1 до 7, то по симметрии у них одинаковые вероятности победить. Пусть P – вероятность получения одинаковых чисел, тогда вероятность получения разных чисел равна $1 - P$, вероятность при этом выигрыша каждого $\frac{1-P}{2}$.

$P = 1/C_7^3 = 1/35$. Отсюда $\frac{1-P}{2} = 1/2 - 1/70 = 17/35$, и вероятность выигрыша Кости равна $3/8 \cdot 1 + 5/8 \cdot 17/35 = \frac{19}{28}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В данном решении баллы раскладываются так: замечена симметрия, дающая равные шансы – 6 баллов, найдена вероятность цифры 8 – 6 баллов, найдена вероятность совпадения – 6 баллов, подсчитан ответ – 2 балла. Арифметическая ошибка – минус 1 балл. При других решениях: верный ход, но допущены ошибки, или не закончено – 10 – 15 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

3. Из интервала $[51;\ 100]$ выбрали три различных целых числа a, b, c, и составили из них 8 чисел: $a+b+c,\ a+bc, b+ac, c+ab, (a+b)c, (b+c)a, (c+a)b,\ abc$. Каково наименьшее возможное число различных среди них?

Ответ. 8.

Решение. Пусть $a < b < c$. Так как $1 < a$, то $ab + c < b + ac$, поскольку $a(c-b) > c-b$. Аналогично, $b + ac < a + bc$ и $(b+c)a < (a+c)b < (a+b)c$. Докажем неравенство: $a+b < ab$. Оно равносильно очевидному неравенству $a(b/2 - 1) + b(a/2 - 1) > 0$. Теперь неравенства можно объединить в две цепочки:

1) $a + b + c < ab + c < b + ac < a + bc$,

2) $(b+c)a < (a+c)b < (a+b)c < abc$.

Рассмотрим выделенные члены, легко видеть, что $b + ac < (a+c)b$ (так как $b < ab, ac < bc$). Поэтому осталось рассмотреть последний член первой цепочки $a + bc$ и первый член второй цепочки $(b+c)a$, чтобы выяснить соотношение между ними. Заметим, что $a > c/2$, так как $50 < a < b < c \leq 100$, и $c \geq b+1$. Тогда $a(b + c - 1) > c/2\,(b + b) = bc$, поэтому $a + bc < a(b + c)$ и все 8 чисел различны.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказано, что не меньше 7 чисел различны – 15 баллов. В доказательстве имеются пробелы – 15 баллов. Верный ход решения, но оно не закончено, или допущены существенные ошибки – 10 баллов. Верный ответ получен на основании нестрогих рассуждений и примеров – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

4. Даны две концентрические окружности w_3 и w_7 с центром O. Радиусы окружностей w_3 и w_7 равны соответственно 3 и 7. В окружности w_3 проведена хорда AB. Через точку B проведена перпендикулярно AB прямая, пересекающая окружность w_7 в точках C и D. Какие значения может принимать сумма квадратов трёх сторон треугольника ACD?

Ответ. 312.

Решение. $AD^2 = AB^2 + BD^2$, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, сложим эти равенства: $AD^2 + AC^2 = 2AB^2 + BD^2 + BC^2 = 2AB^2 + (BC+BD)^2 - 2BC \cdot BD = 2AB^2 + CD^2 - 2BC \cdot BD$.

Заметим, что $BD \cdot BC$ – степень точки B, постоянная величина для данных окружностей. чтобы вычислить её, проведём диаметр окружности w_7 через точку B. Пусть диаметр

пересекает окружность w_7 в точках K и M. Из подобия треугольников KCB и DMBследует $\frac{BD}{4}=\frac{10}{BC}$, откуда $BC\cdot BD=40$. $AD^2+AC^2=2AB^2+CD^2-80$.
Пусть E – середина хорды AB, F – середина хорды CD. Очевидно, OE перпендикулярно AB, OF перпендикулярно CD. Обозначим угол OBE через α. Тогда $BE=3\cos\alpha$, $OF=3\sin\left(\pi/_2-\alpha\right)=3\cos\alpha$. $AB^2=(2EB)^2=4\cdot 9\cos^2\alpha$. Аналогично, $CD^2=(2DF)^2$. По теореме Пифагора $DF^2=49-9\cos^2\alpha$, $CD^2=4(49-9\cos^2\alpha)$. $AB^2+CD^2=4\cdot(49-9\cos^2\alpha)+4\cdot 9\cos^2\alpha=4\cdot 49=196$. Подставим в полученное выше равенство:

$$AD^2+AC^2=2AB^2+CD^2-80=AB^2+196-80=AB^2+116.$$

Прибавим к каждой части CD^2: $AD^2+AC^2+CD^2=AB^2+CD^2+116=196+116=312$. Поскольку ответ не зависит от угла α, сумма квадратов сторон треугольника ACD может принимать только одно значение.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы –15 баллов. В решении есть продвижение – 10 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Доказаны некоторые полезные утверждения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

5. 10 девушек встали в хоровод. Из всех компаний этих девушек численностью не менее 6 человек сколько таких, в которые входят хотя бы 3 девушки, стоящие в хороводе подряд?
Ответ. 361.
Решение. Есть 10 компаний, состоящих из 6 девушек, стоящих подряд, $10\cdot 3=30$ с 5 девушками подряд (так как к 5 девушкам нельзя присоединять двух соседних, остаются 3 девушки). Если же компания из 6 человек содержит только четырёх девушек, стоящих подряд, то две оставшиеся могут быть выбраны из 4 девушек (кроме соседних к тройке) числом способов $\frac{4\cdot 3}{2}=6$, и таких шестёрок будет $10\cdot 6=60$. Случай трёх соседних девушек в компании из 6 человек рассмотрим подробнее. Если компания содержит две группы по 3 соседних девушки, то эти группы не должны граничить, так как случай с 6 девушками подряд уже рассмотрен. Поэтому для группы $(1,2,3)$, например, возможны только три группы $(5,6,7),(6,7,8),(7,8,9)$. Всего таких компаний $10\cdot\frac{3}{2}=15$. Если среди 6 девушек только одна группа из трёх соседних, то три оставшиеся могут быть выбраны числом способов $10\cdot\left(\frac{5\cdot 4}{2}-3\right)=70$. Вычитаемое число 3 здесь равно числу наборов из трёх девушек, стоящих подряд. Для группы $(1,2,3)$, например, запрещенные тройки – $(5,6,7),(6,7,8),(7,8,9)$. Любая компании из не менее чем семи девушек обязательно содержит трёх девушек, стоящих в хороводе подряд. Компаний из 7 человек $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}=120$, компаний из 8 человек $\frac{10\cdot 9}{2}=45$, компаний из 9 человек десять, компания из 10 человек одна. Подсчитаем число вариантов: $10+30+60+15+70+120+45+10+1=361$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Допущена одна ошибка – 18 баллов. Из-за однотипной ошибки не учтено несколько способов или посчитаны лишние – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов. Только ответ – 0 баллов.*

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ 2y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases} \quad (x, y \neq 0)$$

Ответ. $x = 1,\ y = 1$ и $x = \frac{1}{2}, y = -1$.

Решение. Домножим первое уравнение на y, второе на x, и сложим. Получим $4xy - 1 = 3y$. Выразим x: $x = \frac{3y+1}{4y}$. Подставив во второе уравнение, после упрощения получаем: $16y^4 - 15y^2 - 1 = 0$, откуда $y^2 = \pm 1$. Следовательно, $y = 1, x = 1$ или $y = -1, x = \frac{1}{2}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ход решения, но оно не закончено или допущены ошибки – 10 баллов. Найден один ответ – 5 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

2. Лена выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6,\}$, а Федя выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Каждый из них записывает свои цифры в порядке убывания. Какова вероятность, что трёхзначное число Феди больше трёхзначного числа Лены?

Ответ. $\frac{7}{10}$.

Решение. Будем называть получение большего числа выигрышем. Если одна из цифр Феди – 7, то он выигрывает. Вероятность этого ${C_6^2}/{C_7^3} = {15}/{35} = {3}/{7}$. Если каждый из них выбирает из цифр от 1 до 6 то по симметрии у них одинаковые вероятности победить. Пусть P – вероятность получения одинаковых чисел, тогда вероятность получения разных чисел равна $1 - P$, вероятность при этом выигрыша каждого $\frac{1-P}{2}$.

$P = {1}/{C_6^3} = {1}/{20}$. Отсюда $\frac{1-P}{2} = {1}/{2} - {1}/{40} = {19}/{40}$, и вероятность выигрыша Феди равна ${3}/{7} \cdot 1 + {4}/{7} \cdot {19}/{40} = \frac{196}{7 \cdot 40} = \frac{7}{10}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В данном решении баллы раскладываются так: замечена симметрия, дающая равные шансы – 6 баллов, найдена вероятность цифры 7 – 6 баллов, найдена вероятность совпадения – 6 баллов, подсчитан ответ – 2 балла. При других решениях: верный ход, но допущены ошибки – 10 – 15 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

3. Даны 4 действительных числа $\{a_i\}$: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Эти числа в некотором порядке расставляются по окружности, и находится величина A, равная сумме квадратов разностей соседних чисел. При каком расположении чисел $\{a_i\}$ величина A имеет наименьшее значение?

Ответ. a_1, a_2, a_4, a_3.

Решение. Рассмотрим разные расположения.

1) a_1, a_2, a_3, a_4. $A_1 = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + (a_4 - a_1)^2$.
2) a_1, a_3, a_2, a_4. $A_2 = (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_4 - a_1)^2$.
3) a_1, a_2, a_4, a_3. $A_3 = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_4 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2$.

Три другие возможные перестановки дают значения A, совпадающие с тремя первыми, поскольку важно только, какой элемент стоит напротив a_1.
4) a_1, a_3, a_4, a_2. $A_4 = (a_1 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + (a_4 - a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 = A_3$.
5) a_1, a_4, a_2, a_3. $A_5 = (a_4 - a_1)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_1 - a_3)^2 = A_2$.
6) a_1, a_4, a_3, a_2. $A_6 = (a_4 - a_1)^2 + (a_3 - a_4)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_1 - a_2)^2 = A_1$.
Сравним A_3 и A_1. $A_3 - A_1 = (a_2 - a_4)^2 + (a_3 - a_1)^2 - (a_2 - a_3)^2 - (a_4 - a_1)^2 = 2(a_2 a_3 + a_4 a_1 - a_2 a_4 - a_1 a_3) = 2(a_2 - a_1)(a_3 - a_4) < 0$. Значит, $A_3 < A_1$.
Сравним A_3 и A_2. $A_3 - A_2 = (a_1 - a_2)^2 + (a_4 - a_3)^2 - (a_2 - a_3)^2 - (a_4 - a_1)^2 = 2(a_2 a_3 + a_4 a_1 - a_2 a_1 - a_1 a_4) = 2(a_3 - a_1)(a_2 - a_4) < 0$.
Значит, $A_3 < A_2$. Следовательно, оптимальное расположение: a_1, a_2, a_4, a_3.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В доказательстве имеются пробелы – 15 баллов. Рассмотрены три случая, получен верный ответ, но обоснование недостаточно – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка, или решение не закончено – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

4. Даны две концентрические окружности w_5 и w_8 с центром O. Радиусы окружностей w_5 и w_8 равны соответственно 5 и 8. В окружности w_5 проведена хорда AB. Через точку B проведена перпендикулярно AB прямая, пересекающая окружность w_8 в точках C и D. Точка G – середина отрезка AC, точка M – середина OB. Найдите длину отрезка GM.
Ответ. 4.
Решение. Пусть точка H– середина отрезка AD. Тогда GH – средняя линия треугольника ADC. GH параллельна CD, значит, перпендикулярна AB. Как средняя линия, GH делит высоту AB треугольника ABC пополам. Пусть E – середина AB. OE – высота равнобедренного треугольника AOB, она также перпендикулярна AB. Значит, GH проходит через точку O. Обозначим T середину GH. Проведём прямую MT. Рассмотрим треугольник EOB. Отрезок MT проходит через середину боковой стороны OB и параллелен основанию EB, значит, это средняя линия треугольника OEB, и $MT = \frac{EB}{2} = \frac{AB}{4}$. Аналогично по свойствам средней линии $GT = \frac{GH}{2} = \frac{CD}{4}$. Таким образом, $GM^2 = \frac{1}{16}(AB^2 + CD^2)$.
Пусть F – середина стороны CD. Обозначим угол OBE через α. Тогда $BE = OB \cdot \cos\alpha = 5\cos\alpha$, $OF = 5\cos\alpha$. $AB^2 = (2EB)^2 = 4 \cdot 25\cos^2\alpha$. Аналогично, $CD^2 = (2DF)^2$. По теореме Пифагора $DF^2 = OD^2 - OF^2 = 64 - 25\cos^2\alpha$, $CD^2 = 4(64 - 25\cos^2\alpha)$. $AB^2 + CD^2 = 4 \cdot 64 = 256$. Следовательно, $GM^2 = \frac{1}{16} \cdot 256 = 16$, $GM = 4$.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы –15 баллов. В решении есть продвижение – 10 баллов. Рассмотрен один частный случай – 5 баллов. Доказаны некоторые полезные утверждения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

5. 10 девушек встали в хоровод. Из всех компаний этих девушек численностью от 5 до 7 человек включительно сколько таких, в которые входят хотя бы 3 девушки, стоящие в хороводе подряд?
Ответ. 455.
Решение. Рассмотрим компании из 5 человек. Есть 10 компаний, состоящих из 5 девушек, стоящих подряд, и $10 \cdot 4 = 40$ компаний с 4 девушками, стоящими подряд (так как к 4 девушкам нельзя присоединять двух соседних, остаются 4 девушки). Если же компания из 5 человек содержит только трёх девушек, стоящих подряд, то две оставшиеся могут быть выбраны из 5 девушек (кроме соседних к тройке) числом способов $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, и таких пятёрок будет $10 \cdot 10 = 100$. Аналогично находится и число компаний, состоящих

из 6 девушек: 10 с 6 подряд, $10 \cdot 3 = 30$ с 5 подряд, $10 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 60$ с 4 подряд. Случай трёх соседних девушек в компании из 6 человек рассмотрим подробнее. Если компания содержит две группы по 3 соседние девушки, то эти группы не должны граничить, так как случай с 6 девушками подряд уже рассмотрен. Поэтому для группы $(1, 2, 3)$, например, возможны только группы $(5, 6, 7), (6, 7, 8), (7, 8, 9)$, всего 3. Всего таких компаний $10 \cdot \frac{3}{2} = 15$. Если среди 6 девушек только одна группа из трёх соседних, то три оставшиеся могут быть выбраны числом способов $10 \cdot \left(\frac{5 \cdot 4}{2} - 3\right) = 70$. Вычитаемое число 3 здесь равно числу наборов из трёх девушек, стоящих подряд. Для группы $(1, 2, 3)$, например, три запрещенные тройки – $(5, 6, 7), (6, 7, 8), (7, 8, 9)$. Любая компании из более чем семи девушек обязательно содержит трёх девушек, стоящих в хороводе подряд. Компаний из 7 человек $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$.

Подсчитаем число вариантов: $10 + 40 + 100 + 10 + 30 + 60 + 15 + 70 + 120 = 455$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Допущена одна ошибка – 18 баллов. Из-за однотипной ошибки не учтено несколько способов или посчитаны лишние – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов. Только ответ – 0 баллов.*

Вариант 3

1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz, \\ 2y + 2z = x^2. \end{cases}$

Найдите возможные значения $x + y + z$.

Ответ. 0 или 4.

Решение. $x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz = (x - y - z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz - yz) = (x - y - z)[(x + y)^2 + (x + z)^2 + (y - z)^2] = 0$. Пусть $(x + y)^2 + (x + z)^2 + (y - z)^2 = 0$. Тогда $x = -y = -z$. Подставляя во второе уравнение, получаем $x^2 + 4x = 0, x = 0$ или $x = -4$. Пусть $x - y - z = 0$. Тогда $x = y + z = \frac{x^2}{2}$. Отсюда $x = 0$ или $x = 2$, $x + y + z = 0$ или $x + y + z = 4$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В решении имеются пробелы – 15 баллов. Найден один ответ, но решение не закончено – 10 баллов. Ответ получен на основании рассмотрения частных случаев, не доказано, что других значений нет – 6 баллов, если найдены оба значения, 3 балла, если только одно. В решении есть продвижение, но решение не закончено, или допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

2. Ира выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, а Артём выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Каждый из них записывает свои цифры в порядке убывания. Какова вероятность, что трёхзначное число Артёма больше трёхзначного числа Иры?

Ответ. $\frac{37}{56}$.

Решение. Будем называть получение большего числа выигрышем. Если одна из цифр Артёма – 9, то он выигрывает. Вероятность этого $C_8^2 / C_9^3 = 28/84 = 1/3$. Если каждый из них выбирает из цифр от 1 до 8, то по симметрии у них одинаковые вероятности победить. Пусть P – вероятность получения одинаковых чисел, тогда вероятность получения разных чисел равна $1 - P$, вероятность при этом выигрыша каждого $\frac{1-P}{2}$.

$P = {}^{1}\!/_{C_8^3} = {}^{1}\!/_{56}$. Отсюда $\frac{1-P}{2} = {}^{1}\!/_{2} - {}^{1}\!/_{112} = {}^{55}\!/_{112}$, и вероятность выигрыша Артёма равна ${}^{1}\!/_{3} \cdot 1 + {}^{2}\!/_{3} \cdot {}^{55}\!/_{112} = \frac{222}{3 \cdot 112} = \frac{37}{56}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В данном решении баллы раскладываются так: замечена симметрия, дающая равные шансы – 6 баллов, найдена вероятность цифры 9 – 6 баллов, найдена вероятность совпадения – 6 баллов, подсчитан ответ – 2 балла. При других решениях: верный ход, но допущены ошибки – 10 – 15 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

3. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что максимальное из чисел a, b, c больше 1, а два других числа меньше 1.

Решение. Выразим $c = \frac{1}{ab}$. Тогда $a + b + \frac{1}{ab} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab$, или $ab - a - b + 1 < \frac{1}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + 1$. Разложим на множители: $(a-1)(b-1) < \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)$. Но $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right) = \frac{1}{ab}(a-1)(b-1)$. Отсюда $(a-1)(b-1) < \frac{1}{ab}(a-1)(b-1)$, и $(a-1)(b-1)\left(\frac{1}{ab} - 1\right) > 0$. Подставим $c = \frac{1}{ab}$: $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$. Значит, ни одно из чисел не равно 1, и среди трёх сомножителей должно быть чётное число отрицательных. 1) Пусть все три сомножителя положительны, тогда $a > 1$, $b > 1$, $\frac{1}{ab} > 1$. Но третье неравенство противоречит первым двум, и этот случай невозможен. 2) Пусть положителен только один сомножитель из трёх. Тогда максимальное из чисел a, b, c больше 1, а два других числа меньше 1, что и требовалось доказать.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В доказательстве имеются пробелы – 15 баллов. Есть ошибки, или пропущен случай – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

4. Даны две концентрические окружности w_6 и w_{10} с центром O. Радиусы окружностей w_6 и w_{10} равны соответственно 6 и 10. В окружности w_6 проведена хорда AB. Через точку B проведена перпендикулярно AB прямая, пересекающая окружность w_{10} в точках C и D. Точка G – середина отрезка AC, точка H– середина отрезка AD, точка M – середина OB. Докажите, что точки G и H лежат на окружности с центром M, и найдите радиус этой окружности.

Ответ. 5.

Решение. По построению GH – средняя линия треугольника ADC. GH параллельна CD, значит, перпендикулярна AB. Как средняя линия, GH делит высоту AB треугольника ADC пополам. Пусть E – середина AB. OE – высота равнобедренного треугольника AOB, она также перпендикулярна AB. Значит, GH проходит через точку O. Обозначим T середину GH. Проведём прямую MT. Рассмотрим треугольник EOB. Отрезок MT проходит через середину боковой стороны OB и параллелен основанию EB, значит, это средняя линия треугольника OEB, и $MT = \frac{EB}{2} = \frac{AB}{4}$. Аналогично по свойствам средней линии $GT = \frac{GH}{2} = \frac{CD}{4}$. Таким образом, $GM^2 = \frac{1}{16}(AB^2 + CD^2)$.

Пусть F – середина стороны CD. Обозначим угол OBE через α. Тогда $BE = OB \cdot \cos\alpha = 6\cos\alpha$, $OF = 6\cos\alpha$. $AB^2 = (2EB)^2 = 4 \cdot 36\cos^2\alpha$. Аналогично, $CD^2 = (2DF)^2$. По теореме Пифагора $DF^2 = OD^2 - OF^2 = 100 - 36\cos^2\alpha$, $CD^2 = 4(100 - 36\cos^2\alpha)$. $AB^2 + CD^2 = 4 \cdot 100 = 400$. Следовательно, $GM^2 = \frac{1}{16} \cdot 400 = 25$, $GM = 5$. Это доказательство применимо и к точке H, аналогичные рассуждения показывают, что $HM = 5$. Точки G и H лежат на окружности с центром M радиуса 5.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы –15 баллов. В решении есть продвижение – 10 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Доказаны некоторые полезные утверждения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

5. 10 девушек встали в хоровод. Из всех компаний этих девушек численностью не более 6 человек сколько таких, в которые входят хотя бы 3 девушки, стоящие в хороводе подряд?
Ответ. 405.
Решение. Компаний численностью 3 человека, очевидно, 10 (берём по кругу, начиная каждый раз с новой девушки). Рассмотрим компании из 4 человек. Есть 10 таких, где 4 девушки, стоящие подряд, но есть еще компании из 4 человек, где только 3 девушки, стоящие подряд. К трём, стоящим подряд, нельзя присоединить крайних, поэтому четвёртой может быть любая из оставшихся 5, всего таких компаний $10 \cdot 5 = 50$. Рассмотрим компании из 5 человек. Есть 10 компаний, состоящих из 5 девушек, стоящих подряд, и $10 \cdot 4 = 40$ компаний с 4 девушками, стоящими подряд (так как к 4 девушкам нельзя присоединять двух соседних, остаются 4 девушки). Если же компания из 5 человек содержит только трёх девушек, стоящих подряд, то две оставшиеся могут быть выбраны из 5 девушек (кроме соседних к тройке) числом способов $\frac{5\cdot4}{2} = 10$, и таких пятёрок будет $10 \cdot 10 = 100$. Аналогично находится и число компаний, состоящих из 6 девушек: 10 с 6 подряд, $10 \cdot 3 = 30$ с 5 подряд, $10 \cdot \frac{4\cdot3}{2} = 60$ с 4 подряд. Случай трёх соседних девушек в компании из 6 человек рассмотрим подробнее. Если компания содержит две группы по 3 соседние девушки, то эти группы не должны граничить, так как случай с 6 девушками подряд уже рассмотрен. Поэтому для группы $(1, 2, 3)$, например, возможны только группы $(5, 6, 7), (6, 7, 8), (7, 8, 9)$, всего 3. Всего таких компаний $10 \cdot \frac{3}{2} = 15$. Если среди 6 девушек только одна группа из трёх соседних, то три оставшиеся могут быть выбраны числом способов $10 \cdot \left(\frac{5\cdot4}{2} - 3\right) = 70$. Вычитаемое число 3 здесь равно числу наборов из трёх девушек, стоящих подряд. Для группы $(1, 2, 3)$, например, запрещенные тройки – $(5, 6, 7), (6, 7, 8), (7, 8, 9)$. Подсчитаем число вариантов: $10 + 10 + 50 + 10 + 40 + 100 + 10 + 30 + 60 + 15 + 70 = 405$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Допущена одна ошибка – 18 баллов. Из-за однотипной ошибки не учтено несколько способов или посчитаны лишние – 15 баллов. Верная идея решения, но допущены существенные ошибки – 10–12 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов. Только ответ – 0 баллов.*

Вариант 4

1. У Вани 6 монет, у Маши 5 монет. Каждый бросает все свои монеты. Какова вероятность, что у Вани выпадет больше решек, чем у Маши?
Ответ. $1/2$.
Решение. Пусть событие $A = \{$у Вани выпало больше решек, чем у Маши$\}$, событие $B = \{$у Вани выпало больше гербов, чем у Маши$\}$. Эти события несовместны, так как у Вани ровно на 1 монету больше, чем у Маши. В то же время одно из них обязательно должно произойти, следовательно, объединение этих событий равно достоверному событию, и $P(A) + P(B) = 1$. По симметрии события A и B равновозможны. Поэтому $P(A) = 1/2$.

Замечание. Непосредственный подсчёт вероятностей: $P(A) = {}^{1}/_{64} + {}^{6}/_{64} \cdot {}^{31}/_{32} + {}^{15}/_{64} \cdot {}^{26}/_{32} + {}^{20}/_{64} \cdot {}^{16}/_{32} + {}^{15}/_{64} \cdot {}^{6}/_{32} + {}^{6}/_{64} \cdot {}^{1}/_{32} = \frac{1024}{64\cdot 32} = {}^{1}/_{2}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ход решения, но есть одна арифметическая ошибка – 18 баллов, две вычислительные ошибки – 15 баллов. Недостаточное обоснование решения – 10 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

2. Действительные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=27. \end{cases}$

Найдите наибольшее и наименьшее возможное значение z.

Ответ. $z_{min} = -3, z_{max} = 5$.

Решение. Выразим из первого уравнения $x+y$: $x+y = 3-z$. Поскольку $x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{(3-z)^2}{2}$, $27 \geq \frac{(3-z)^2}{2} + z^2$. После приведения получаем $z^2 - 2z - 15 \leq 0$. Найдём корни квадратного трёхчлена: $z = 1 \pm \sqrt{16} = 1 \pm 4$, $z_{min} = -3, z_{max} = 5$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы –15 баллов. В решении есть продвижение – 10 баллов. Рассмотрен частный случай целых значений – 5 баллов. Решение начато, дан верный ответ, но не вытекающий из решения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без решения – 0 баллов.*

3. Прямоугольный параллелепипед $a \times b \times c$ построен из одинаковых единичных кубиков. Назовём внешними кубики, у которых хотя бы одна грань лежит на поверхности параллелепипеда, а остальные будем называть внутренними. Пусть известно, что a четное и $8 \leq a \leq b \leq c$. Найдите все такие тройки целых чисел (a, b, c), для которых число внешних кубиков равно числу внутренних кубиков.

Ответ. $(8, 8, 18)$, $(8, 9, 14)$, $(8, 10, 12)$.

Решение. Общее количество единичных кубиков равно abc. Общее количество внутренних единичных кубиков равно $(a-2)(b-2)(c-2)$.Число внешних кубиков равно $abc - (a-2)(b-2)(c-2)$. Должно выполняться условие $abc = 2(a-2)(b-2)(c-2)$. Разделив на abc, получим $\left(1-\frac{2}{a}\right)\left(1-\frac{2}{b}\right)\left(1-\frac{2}{c}\right) = {}^{1}/_{2}$. Поскольку $\left(1-\frac{2}{a}\right) \leq \left(1-\frac{2}{b}\right) \leq \left(1-\frac{2}{c}\right)$, мы имеем $\left(1-\frac{2}{a}\right)^3 \leq {}^{1}/_{2}$.

При возрастании a выражение $1-\frac{2}{a}$ возрастает, по условию $a \geq 8$. Легко проверить, что при $a > 9$ неравенство перестает выполняться. Таким образом, надо проверить только значение $a = 8$.

При $a = 8$ имеем $8bc = 2(8-2)(b-2)(c-2)$, или $2bc = 3(b-2)(c-2)$. Преобразуем: $bc - 6c - 6b + 12 = 0$, или $(b-6)(c-6) = 24$. Разлагая 24 на множители, и учитывая, что $8 \leq b \leq c$, откуда $2 \leq b-6 \leq c-6$, получаем пары для $(b-6, c-6)$: $(2, 12), (3, 8), (4, 6)$. Тогда пары (b, c) имеют вид: $(8, 18), (9, 14), (10, 2)$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получены лишние ответы за счет перестановок a, b, c – 19 баллов. Верный ход решения, но найдены не все ответы – 15 баллов. Есть продвижение – 10 баллов. Недостаточное обоснование решения – 10 баллов. Верно составлено уравнение – 5 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка, или решение не закончено – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.*

4. Семеро бельчат (Рыжий, Серый, Белый, Чёрный, Полосатый, Усатый, Хвостатый) должны встать в ряд. Рыжий хочет стоять слева от Серого. Белый хочет стоять слева от

Чёрного. Чёрный хочет стоять слева от Полосатого. Сколькими способами бельчата могли встать в ряд, чтобы выполнилось **хотя бы** одно пожелание?

Ответ. 4620.

Решение. Всего перестановок 7!. Найдём число перестановок, при которых не выполняется ни одно пожелание, то есть Рыжий стоит справа от Серого, Белый справа от Чёрного. Чёрный справа от Полосатого. Перестановки Рыжий, Серый и Серый, Рыжий симметричны, поэтому в половине случаев Рыжий стоит справа от Серого. Следующие два условия затрагивают сразу трёх бельчат: Полосатого, Чёрного, Белого. Чтобы не выполнилось ни одно условие, они должны стоять именно в таком порядке. Это одна возможная перестановка из $3! = 6$. Таким образом, число способов встать в ряд, чтобы не выполнилось ни одно пожелание, равно $\frac{7!}{2!3!} = 420$. Тогда число способов встать в ряд, чтобы выполнилось хотя бы одно пожелание, равно $7! - \frac{7!}{2!3!} = 5040 - 420 = 4620$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Допущена одна ошибка – 18 баллов. Из-за однотипной ошибки не учтено несколько способов или посчитаны лишние – 15 баллов. Есть продвижение, но допущены существенные ошибки – 10 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов. Только ответ – 0 баллов.*

5. В треугольнике ABC из вершины A проведены биссектриса AD и высота AH. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены полуокружности, расположенные вне треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к AD пересекает полуокружность с диаметром AB в точке X, а полуокружность с диаметром AC в точке Y. Докажите, что точки X, Y, H, D лежат на одной окружности.

Решение. По теореме о биссектрисе угла $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. Обозначим середины отрезков AB, AC, AD как M, N, P соответственно. Эти точки лежат на средней линии треугольника ABC, то есть они лежат на одной прямой, параллельной BC, и $MP = \frac{BD}{2}$, $NP = \frac{CD}{2}$. Отсюда $\frac{BD}{CD} = \frac{MP}{NP}$. Поскольку AB и AC являются диаметрами, а точки M и N – центрами окружностей, $AB = 2MX, AC = 2NY$. Отсюда получаем, что $\frac{AB}{AC} = \frac{MX}{NY}$. Объединяя равенства, имеем $\frac{MP}{MX} = \frac{NP}{NY}$. Очевидно равенство вертикальных углов $\angle MPX = \angle NPY$. Из теоремы синусов следует, что $\sin\angle PXM = \sin\angle PYN$, то есть эти углы или равны, или дополнительны до $180°$. Они равны, так как они острые, поскольку каждый из них составляет часть прямого угла (опирающегося на диаметр).

Значит, треугольники MPX и NPY подобны, и оттуда находим

$$\angle PMX = \angle XMB + \angle BMP = 180° - \angle AMX + 180° - \angle AMP$$
$$= 180° - 2\angle ABX + 180° - \angle ABC.$$

$\angle PNY = \angle PNA + \angle ANY = \angle ACB + 2\angle ACY$. Приравнивая выражения для $\angle PMX$ и $\angle PNY$, получаем, что

$$\angle ABX + \angle ACY = (180° - \angle ABC - \angle BCA) + (90° - \angle ABX) + (90° - \angle ACY)$$
$$= \angle BAC + \angle XAB + \angle CAY = \angle XAY.$$

Очевидно, что A, H, B, X лежат на одной окружности (угол $\angle BHA$ прямой и опирается на диаметр).Аналогично, на одной окружности лежат и точки A, Y, C, H. Следовательно, $\angle AHX = \angle ABX, \angle AHY = \angle ACY$. Отсюда $\angle XAY = \angle AHX + \angle AHY = \angle XHY$.

Поскольку $\angle XAY = \angle XDY$, окончательно получаем $\angle XHY = \angle XDY$, что и означает принадлежность точек X, Y, H, D одной окружности.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В решении есть продвижение, но оно не закончено – 10 баллов. Доказаны некоторые полезные утверждения – 5 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

11 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. У бельчонка есть 7 орехов, 6 грибов и 10 ягод. Сколькими способами он может выложить все эти предметы в ряд так, чтобы никакие две ягоды не лежали рядом?

Ответ. 1717716.

Решение. Сперва выложим все орехи и грибы C_{13}^7 способами. В промежутки между ними и по краям выберем 10 мест и вставим туда ягоды. Всего способов это сделать C_{14}^{10}. Итого получается $C_{13}^7 \cdot C_{14}^{10} = 1717716$ способов выложить эти предметы в ряд.

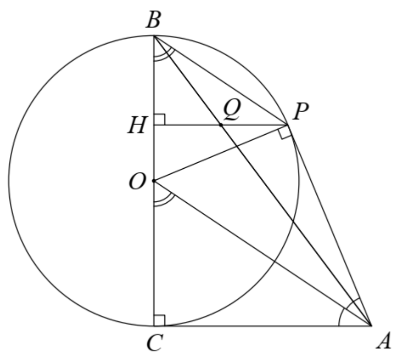
2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На его катете BC длины 26 как на диаметре построена окружность ω. Из точки A к этой окружности проведена касательная AP, отличная от AC. Перпендикуляр PH, опущенный на отрезок BC, пересекает отрезок AB в точке Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH:CH = 4:9$.

Ответ. 24.

Решение. Пусть O – центр окружности ω. Заметим, что

$$BH = \frac{4}{13}BC = 8, \quad CH = 18, \quad OH = \frac{1}{2}BC - BH = 5,$$

$$PH = \sqrt{OP^2 - OH^2} = 12.$$



Прямоугольные треугольники BHP и OCA подобны, поскольку

$$\angle CBP = \frac{1}{2}\angle COP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CAP) = 90^\circ - \angle CAO = \angle COA.$$

Тогда

$$\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{AC}{OC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{PH}{BH} = \frac{3}{4}.$$

Их подобия треугольников BHQ и BCA мы получаем $QH = \frac{3}{4}BH = 6$. Поэтому

$$S_{BPQ} = \frac{1}{2}\cdot PQ\cdot BH = \frac{1}{2}\cdot(PH - QH)\cdot BH = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24.$$

3. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{z^2}{x+y+2z}+\frac{x^2}{2x+y+z}+\frac{y^2}{x+2y+z}\geq\frac{xy}{x+y+2z}+\frac{yz}{2x+y+z}+\frac{zx}{x+2y+z}.$$

Решение. Оценим разность первых слагаемых из обеих частей неравенства:

$$\frac{z^2}{x+y+2z}-\frac{xy}{x+y+2z}=\frac{4z^2-4xy}{4(x+y+2z)}\geq\frac{4z^2-(x+y)^2}{4(x+y+2z)}=$$
$$=\frac{(2z-x-y)(2z+x+y)}{4(x+y+2z)}=\frac{2z-x-y}{4}.$$

Аналогично

$$\frac{x^2}{2x+y+z}-\frac{yz}{2x+y+z}\geq\frac{2x-y-z}{4},\qquad\frac{y^2}{x+2y+z}-\frac{zx}{x+2y+z}\geq\frac{2y-z-x}{4}.$$

Сложив три полученных неравенства, получим

$$\frac{z^2}{x+y+2z}-\frac{xy}{x+y+2z}+\frac{x^2}{2x+y+z}-\frac{yz}{2x+y+z}+\frac{y^2}{x+2y+z}-\frac{zx}{x+2y+z}\geq 0.$$

4. 20 команд провели турнир по хоккею, каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. При этом каждые три команды в играх между собой набрали разное количество очков. Какое наибольшее число ничьих могло быть в этом турнире?

Ответ. 100.

Решение. Решим задачу для N команд.

Оценка. Докажем по индукции, что число ничьих не превосходит $\frac{N^2}{4}$.

База. При $N=2$ это очевидно. При $N=3$ все три игры не могли закончиться вничью, иначе у всех команд было бы одинаковое число очков.

Шаг индукции. Рассмотри две команды A и B, сыгравшие вничью. С каждой из остальных команд хотя бы одна из н их сыграла не вничью, иначе образуется запрещенная тройка команд. Значит, общее число ничьих в играх с участием этих двух команд не больше $N-1$. По предположению индукции в играх между остальными командами было не более $\frac{(N-2)^2}{4}$ ничьих. Следовательно, общее число ничьих не превосходит $\frac{(N-2)^2}{4}+N-1=\frac{N^2}{4}$.

Пример. Пронумеруем команды числами от 1 до N. Пусть каждые две команды с номерами разной чётности сыграли вничью, а в играх между командами с номерами одной чётности победила команда в меньшим номером. Если $N=2k-1$, то k команд имеют нечётный номер и $k-1$ команда – чётный, поэтому количество ничьих равно $k(k-1)$. При $N=2k$ получаем по k команд с номерами каждой чётности и k^2 ничьих. В обоих случаях полученное число равно $\left[\frac{N^2}{4}\right]$. При этом каждые три команды в играх между собой набрали либо 0, 2 или 4 очка, если имеют номера одной чётности, либо 1, 2, 3 очка, если две из них имеют номера одной чётности, а третья – другой.

5. Решите уравнение

$$3^{2a}+3^a+2=2^k7^l$$

в целых неотрицательных числах.

Ответ. $(a,k,l)\in\{(0;2;0),(1;1;1)\}$.

Решение. Если $l\geq 2$, то получим сравнение

$$t^2+t+2\equiv 0\pmod{7^2},$$

где $t=3^a$. Но это сравнение невозможно ни при каком t. Значит, $l\in\{0;1\}$.

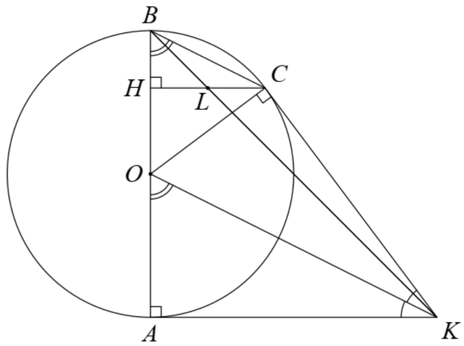
1) В случае $l=0$ имеем уравнение $3^{2a}+3^a+2=2^k$. Если $a=0$, то $k=2$. При $a=1$ решений нет. Далее считаем $a\geq 2$. Имеем $k\geq 2$ и $2^k\equiv 2\pmod 3$, откуда $k=2m+1$ для некоторого натурального m. Из равенства $3^a(3^a+1)=2(4^m-1)$ следует, что m делится на 3 (иначе правая часть не будет делиться на 9). Тогда 4^m-1 делится на $4^3-1=$

$7 \cdot 9$. Следовательно, $3^a + 1$ делится на 7. Но тогда $a \equiv 3 \ (mod\, 6)$, так что $3^a + 1 \equiv 0$ $(mod\ 3^3 + 1)$. Однако $3^3 + 1 \equiv 0\ (mod\ 4)$, что дает противоречие.
2) Рассмотрим случай $l = 1$. При $a = 1$ из уравнения $3^{2a} + 3^a + 2 = 7 \cdot 2^k$ находим $k = 1$. Пусть далее $a \geq 2$ и, как следствие, $k \geq 2$. Имеем $3(3^{a-1} - 1)(3^a + 4) = 14(2^{k-1} - 1)$. Отсюда следует, что $(3^{a-1} - 1)(3^a + 4)$ делится на 7. Это возможно только при условии $a \equiv 1\ (mod\ 6)$. Но тогда $3^{a-1} - 1 \equiv 0\ (mod\ 8)$, что приводит к противоречию.

Вариант 2

1. У бельчонка есть 8 орехов, 6 грибов и 10 ягод. Сколькими способами он может выложить все эти предметы в ряд так, чтобы никакие две ягоды не лежали рядом?
Ответ. 9018009.
Решение. Сперва выложим все орехи и грибы C_{14}^8 способами. В промежутки между ними и по краям выберем 10 мест и вставим туда ягоды. Всего способов это сделать C_{15}^{10}. Итого получается $C_{14}^8 \cdot C_{15}^{10} = 9018009$ способов выложить эти предметы в ряд.

2. На отрезке AH длины 10 как па диаметре построена окружность ω. Через точку A проведена касательная к ω, на которой выбрана точка K. Через точку K проведена прямая, отличная от AK, касающаяся окружности ω в точке C. Высота CH треугольника ABC пересекает отрезок BK и точке L. Найдите площадь треугольника CKL, если известно, что $BH: AH = 1: 4$.
Ответ. 8.



Решение. Пусть O – центр окружности ω. Заметим, что
$$BH = \frac{1}{5}AB = 2,\ \ AH = 8,\ \ \ OH = \frac{1}{2}AB - BH = 3,$$
$$CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = 4.$$
Прямоугольные треугольники BHC и OAK подобны, поскольку
$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}(180^\circ - AKC) = 90^\circ - \angle AKO$$
$$= \angle AOK.$$
Тогда
$$\frac{AB}{AK} = 2 \cdot \frac{AO}{OK} = 2 \cdot \frac{BH}{CH} = 1,$$
Откуда $\angle ABK = 45^\circ$ и $LH = BH = 2$. Поэтому
$$S_{CKL} = \frac{1}{2} \cdot CL \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot (CH - LH) \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8.$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$\frac{c^2}{a + b + 2c} + \frac{a^2}{2a + b + c} + \frac{b^2}{a + 2b + c} \geq \frac{ab}{a + b + 2c} + \frac{bc}{2a + b + c} + \frac{ca}{a + 2b + c}.$$
Решение. Оценим разность первых слагаемых из обеих частей неравенства:
$$\frac{c^2}{a + b + 2c} - \frac{ab}{a + b + 2c} = \frac{4c^2 - 4ab}{4(a + b + 2c)} \geq \frac{4c^2 - (a + b)^2}{4(a + b + 2c)} =$$
$$= \frac{(2c - a - b)(2c + a + b)}{4(a + b + 2c)} = \frac{2c - a - b}{4}.$$
Аналогично
$$\frac{a^2}{2a + b + c} - \frac{bc}{2a + b + c} \geq \frac{2a - b - c}{4}, \qquad \frac{b^2}{a + 2b + c} - \frac{ca}{a + 2b + c} \geq \frac{2b - c - a}{4}.$$
Сложив три полученных неравенства, получим

$$\frac{c^2}{a+b+2c}-\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{a^2}{2a+b+c}-\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{b^2}{a+2b+c}-\frac{ca}{a+2b+c}\geq 0.$$

4. 24 команды провели турнир по хоккею, каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. При этом каждые три команды в играх между собой набрали разное количество очков. Какое наибольшее число ничьих могло быть в этом турнире?
Ответ. 144.
Решение. Решим задачу для N команд.
Оценка. Докажем по индукции, что число ничьих не превосходит $\frac{N^2}{4}$.
База. При $N=2$ это очевидно. При $N=3$ все три игры не могли закончиться вничью, иначе у всех команд было бы одинаковое число очков.
Шаг индукции. Рассмотри две команды A и B, сыгравшие вничью. С каждой из остальных команд хотя бы одна из н их сыграла не вничью, иначе образуется запрещенная тройка команд. Значит, общее число ничьих в играх с участием этих двух команд не больше $N-1$. По предположению индукции в играх между остальными командами было не более $\frac{(N-2)^2}{4}$ ничьих. Следовательно, общее число ничьих не превосходит $\frac{(N-2)^2}{4}+N-1=\frac{N^2}{4}$.
Пример. Пронумеруем команды числами от 1 до N. Пусть каждые две команды с номерами разной чётности сыграли вничью, а в играх между командами с номерами одной чётности победила команда в меньшим номером. Если $N=2k-1$, то k команд имеют нечётный номер и $k-1$ команда – чётный, поэтому количество ничьих равно $k(k-1)$. При $N=2k$ получаем по k команд с номерами каждой чётности и k^2 ничьих. В обоих случаях полученное число равно $\left[\frac{N^2}{4}\right]$. При этом каждые три команды в играх между собой набрали либо 0, 2 или 4 очка, если имеют номера одной чётности, либо 1, 2, 3 очка, если две из них имеют номера одной чётности, а третья – другой.

5. Решите уравнение
$$3^{2a}-3^a+2=2^k7^l$$
в целых неотрицательных числах.
Ответ. $(a,k,l)\in\{(0;1;0),(1;3;0)\}$.
Решение. Если $l\geq 2$, то получим сравнение
$$t^2-t+2\equiv 0 \pmod{7^2},$$
где $t=3^a$. Но это сравнение невозможно ни при каком t. Значит, $l\in\{0;1\}$.
1) В случае $l=0$ имеем уравнение $3^{2a}-3^a+2=2^k$. Если $a=0$, то $k=1$. При $a=1$ получим $k=3$. Далее считаем $a\geq 2$. Имеем $k\geq 2$ и $2^k\equiv 2\ (mod\ 3)$, откуда $k=2m+1$ для некоторого натурального m. Из равенства $3^a(3^a-1)=2(4^m-1)$ следует, что m делится на 3 (иначе правая часть не будет делиться на 9). Тогда 4^m-1 делится на $4^3-1=7\cdot 9$. Следовательно, 3^a-1 делится на 7. Но тогда $a\equiv 0\ (mod\ 6)$, так что $3^a-1\equiv 0$ $(mod\ 3^6-1)$. Однако $3^6-1\equiv 0\ (mod\ 8)$, что дает противоречие.
2) Рассмотрим случай $l=1$. При $a=1$ уравнение $3^{2a}-3^a+2=7\cdot 2^k$ не имеет решений. Пусть далее $a\geq 2$ и, как следствие, $k\geq 2$. Имеем $3(3^{a-1}+1)(3^a-4)=14(2^{k-1}-1)$. Отсюда следует, что $(3^{a-1}+1)(3^a-4)$ делится на 7. Это возможно только при условии $a\equiv 4\ (mod\ 6)$. Но тогда $3^{a-1}-1\equiv 0\ (mod\ 4)$, что приводит к противоречию.

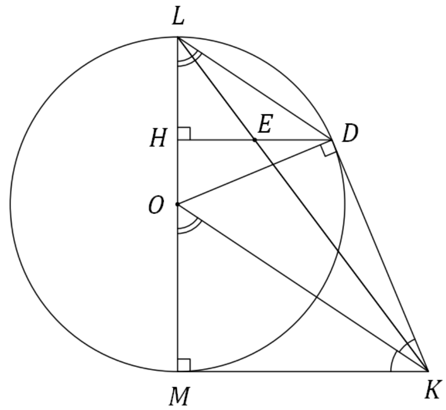
Вариант 3

1. У бельчонка есть 5 орехов, 8 грибов и 11 ягод. Сколькими способами он может выложить все эти предметы в ряд так, чтобы никакие две ягоды не лежали рядом?
Ответ. 468468.

Решение. Сперва выложим все орехи и грибы C_{13}^{8} способами. В промежутки между ними и по краям выберем 11 мест и вставим туда ягоды. Всего способов это сделать C_{14}^{11}. Итого получается $C_{13}^{8} \cdot C_{14}^{11} = 468468$ способов выложить эти предметы в ряд.

2. Дан прямоугольный треугольник KLM с прямым углом M. На его катете LM длины 52 как на диаметре построена окружность ω. Из точки K к этой окружности проведена касательная KD, отличная от KM. Перпендикуляр DH, опущенный на отрезок LM, пересекает отрезок KL в точке E. Найдите площадь треугольника LDE, если известно, что $LH{:}\,MH = 4{:}\,9$.

Ответ. 96.



Решение. Пусть O – центр окружности ω. Заметим, что

$$LH = \frac{4}{13}LM = 16, \quad MH = 36, \quad OH = \frac{1}{2}LM - LH = 10,$$

$$DH = \sqrt{OD^2 - OH^2} = 24.$$

Прямоугольные треугольники LHD и OMK подобны, поскольку

$$\angle MLD = \frac{1}{2}\angle MOD = \frac{1}{2}(180^{\circ} - \angle MKD) = 90^{\circ} - \angle MKO = \angle MOK.$$

Тогда

$$\frac{KM}{LM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{KM}{OM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{DH}{LH} = \frac{3}{4}.$$

Их подобия треугольников LHE и LMK мы получаем $EH = \frac{3}{4}LH = 12$. Поэтому

$$S_{LDE} = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot LH = \frac{1}{2}\cdot(DH - EH)\cdot LH = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 16 = 96.$$

3. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{z^2}{x+y+2z} + \frac{x^2}{2x+y+z} + \frac{y^2}{x+2y+z} \geq \frac{xy}{x+y+2z} + \frac{yz}{2x+y+z} + \frac{zx}{x+2y+z}.$$

Решение. Оценим разность первых слагаемых из обеих частей неравенства:

$$\frac{z^2}{x+y+2z} - \frac{xy}{x+y+2z} = \frac{4z^2 - 4xy}{4(x+y+2z)} \geq \frac{4z^2 - (x+y)^2}{4(x+y+2z)} = $$

$$= \frac{(2z-x-y)(2z+x+y)}{4(x+y+2z)} = \frac{2z-x-y}{4}.$$

Аналогично

$$\frac{x^2}{2x+y+z} - \frac{yz}{2x+y+z} \geq \frac{2x-y-z}{4}, \qquad \frac{y^2}{x+2y+z} - \frac{zx}{x+2y+z} \geq \frac{2y-z-x}{4}.$$

Сложив три полученных неравенства, получим

$$\frac{z^2}{x+y+2z} - \frac{xy}{x+y+2z} + \frac{x^2}{2x+y+z} - \frac{yz}{2x+y+z} + \frac{y^2}{x+2y+z} - \frac{zx}{x+2y+z} \geq 0.$$

4. 16 команд провели турнир по хоккею, каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. При этом каждые три команды в играх между собой набрали разное количество очков. Какое наибольшее число ничьих могло быть в этом турнире?

Ответ. 64.

Решение. Решим задачу для N команд.

Оценка. Докажем по индукции, что число ничьих не превосходит $\frac{N^2}{4}$.

База. При $N = 2$ это очевидно. При $N = 3$ все три игры не могли закончиться вничью, иначе у всех команд было бы одинаковое число очков.
Шаг индукции. Рассмотри две команды A и B, сыгравшие вничью. С каждой из остальных команд хотя бы одна из н их сыграла не вничью, иначе образуется запрещенная тройка команд. Значит, общее число ничьих в играх с участием этих двух команд не больше $N - 1$. По предположению индукции в играх между остальными командами было не более $\frac{(N-2)^2}{4}$ ничьих. Следовательно, общее число ничьих не превосходит $\frac{(N-2)^2}{4} + N - 1 = \frac{N^2}{4}$.
Пример. Пронумеруем команды числами от 1 до N. Пусть каждые две команды с номерами разной чётности сыграли вничью, а в играх между командами с номерами одной чётности победила команда в меньшим номером. Если $N = 2k - 1$, то k команд имеют нечётный номер и $k - 1$ команда – чётный, поэтому количество ничьих равно $k(k - 1)$. При $N = 2k$ получаем по k команд с номерами каждой чётности и k^2 ничьих. В обоих случаях полученное число равно $\left[\frac{N^2}{4}\right]$. При этом каждые три команды в играх между собой набрали либо 0, 2 или 4 очка, если имеют номера одной чётности, либо 1, 2, 3 очка, если две из них имеют номера одной чётности, а третья – другой.

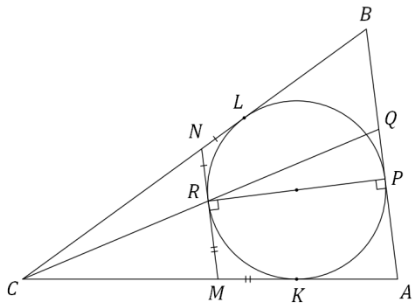
5. Решите уравнение
$$3^{2a} + 3^a + 2 = 2^k 7^l$$
в целых неотрицательных числах.
Ответ. $(a, k, l) \in \{(0; 2; 0), (1; 1; 1)\}$.
Решение. Если $l \geq 2$, то получим сравнение
$$t^2 + t + 2 \equiv 0 \pmod{7^2},$$
где $t = 3^a$. Но это сравнение невозможно ни при каком t. Значит, $l \in \{0; 1\}$.
1) В случае $l = 0$ имеем уравнение $3^{2a} + 3^a + 2 = 2^k$. Если $a = 0$, то $k = 2$. При $a = 1$ решений нет. Далее считаем $a \geq 2$. Имеем $k \geq 2$ и $2^k \equiv 2 \ (mod\ 3)$, откуда $k = 2m + 1$ для некоторого натурального m. Из равенства $3^a(3^a + 1) = 2(4^m - 1)$ следует, что m делится на 3 (иначе правая часть не будет делиться на 9). Тогда $4^m - 1$ делится на $4^3 - 1 = 7 \cdot 9$. Следовательно, $3^a + 1$ делится на 7. Но тогда $a \equiv 3 \ (mod\ 6)$, так что $3^a + 1 \equiv 0$ $(mod\ 3^3 + 1)$. Однако $3^3 + 1 \equiv 0 \ (mod\ 4)$, что дает противоречие.
2) Рассмотрим случай $l = 1$. При $a = 1$ из уравнения $3^{2a} + 3^a + 2 = 7 \cdot 2^k$ находим $k = 1$. Пусть далее $a \geq 2$ и, как следствие, $k \geq 2$. Имеем $3(3^{a-1} - 1)(3^a + 4) = 14(2^{k-1} - 1)$. Отсюда следует, что $(3^{a-1} - 1)(3^a + 4)$ делится на 7. Это возможно только при условии $a \equiv 1 \ (mod\ 6)$. Но тогда $3^{a-1} - 1 \equiv 0 \ (mod\ 8)$, что приводит к противоречию.

Вариант 4

1. Андрей, Боря, Вася, Гриша, Денис и Женя после олимпиады собрались в кинотеатр. Они купили билеты на 6 мест подряд в одном ряду. Андрей и Боря хотят сидеть рядом, а Вася и Гриша не хотят. Сколькими способами они могут сесть на свои места с учетом их пожеланий?
Ответ. 144.
Решение. Число способов рассадки, когда Андрей и Боря сидят рядом, равно $2 \cdot 5! = 240$. Способов рассадки, при которых и Андрей-Боря, и Вася-Гриша окажутся рядом, равно $2 \cdot 2 \cdot 4! = 96$. Поэтому они могут сесть $240 - 96 = 144$ способами.

2. В треугольник ABC вписана окружность ω радиуса r, которая касается стороны AB в точке P. На окружности отметили точку R, диаметрально противоположную точке P. Прямая CR пересекает сторону AB в точке Q, причём $CA + AQ = 1$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ. r.



Решение. Проведем через точку К касательную к ω, пересекающую отрезки AC и BC в точках M и N соответственно. Пусть K и L – точки, в которых ω касается сторон AC и BC соответственно. Заметим, что
$CM + MR = CM + MK = CK = CL = CN + LN = CN + NR$.
Прямые AB и MN параллельны как перпендикуляры к одному диаметру. Поэтому треугольники CNR и CBQ, а также CMR и CAQ подобны с коэффициентом $k = \frac{CR}{CQ}$. Тогда

$$CB + BQ = k(CN + NR) = k(CM + MR) = CA + AQ = 1,$$

откуда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(CA + AB + BC) \cdot r = \frac{1}{2}(CA + AQ + BQ + CB) \cdot r = r.$$

3. Известно, что $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{3a^2 + b^2 + 2ca} + \frac{b}{3b^2 + c^2 + 2ab} + \frac{c}{3c^2 + a^2 + 2bc} \le \frac{3}{2}.$$

Решение. Заметим, что $3a^2 + b^2 + 2ca = a^2 + b^2 + 2a(1 - b) = 2a + (a - b)^2 \ge 2a$. Следовательно,

$$\frac{a}{3a^2 + b^2 + 2ca} \le \frac{1}{2};$$

Аналогично

$$\frac{b}{3b^2 + c^2 + 2ab} \le \frac{1}{2}; \quad \frac{c}{3c^2 + a^2 + 2bc} \le \frac{1}{2}.$$

Сложив три полученных неравенства, получим

$$\frac{a}{3a^2 + b^2 + 2ca} + \frac{b}{3b^2 + c^2 + 2ab} + \frac{c}{3c^2 + a^2 + 2bc} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

4. Несколько команд провели турнир по футболу – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Команда «Бельчата» заняла первое место, набрав больше всего очков, а команда «Метеор» – последнее место, набрав меньше всех очков. Если бы за победу давали не 3 очка, а 2, то наоборот, команда «Метеор» стала бы первой, а команда «Бельчата» – последней. Найдите наименьшее количество команд, которое могло участвовать в таком турнире.

Ответ. 12.

Решение. *Оценка.* До пересчёта у команды «Бельчата» было хотя бы на 2 очка больше, чем у команды «Метеор», а после пересчёта – хотя бы на 2 очка меньше. Кроме того, чтобы после пересчёта оказаться первой, команда «Метеор» должна иметь хотя бы одну победу. Действительно, в каждом матче разыгрывается 2 очка, поэтому если бы у команды «Метеор» не было побед, то она набрала бы не более половины возможного числа очков и не могла бы стать первой. Аналогично, для того чтобы команда «Бельчата» стала последней, у неё должно быть поражений больше, чем побед. Таким образом, после пересчёта команда «Метеор» потеряет как минимум 1 очко. Следовательно, команда «Бельчата» должна потерять не менее 5 очков, т. е. у неё должно быть не меньше пяти побед и не меньше шести поражений. Поэтому она сыграла как минимум 11 матчей, значит, в турнире участвовало не менее 12 команд.

Пример турнира для 12 команд, удовлетворяющий условию, приведён в таблице (первой буквой В обозначен выигрыш, два последних столбца – количество очков до и после пересчета соответственно).

Команда	Б	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	М	Сумма 1	Сумма 2
Б		В	В	В	В	В	0	0	0	0	0	0	15	10
2	0		1	1	1	1	В	В	В	0	0	1	14	11
3	0	1		1	1	1	0	В	В	В	0	1	14	11
4	0	1	1		1	1	0	0	В	В	В	1	14	11
5	0	1	1	1		1	В	0	0	В	В	1	14	11
6	0	1	1	1	1		В	В	0	0	В	1	14	11
7	В	0	В	В	0	0		1	1	1	1	1	14	11
8	В	0	0	В	В	0	1		1	1	1	1	14	11
9	В	0	0	0	В	В	1	1		1	1	1	14	11
10	В	В	0	0	0	В	1	1	1		1	1	14	11
11	В	В	В	0	0	0	1	1	1	1		1	14	11
М	В	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		13	12

5. Решите уравнение

$$x^4 + y^2 = xy^2 + y$$

в натуральных числах.

Ответ. $(x, y) \in \{(1; 1), (6; 16)\}$.

Решение. Если $x = 1$, то $y = 1$ и наоборот. Далее пусть $x > 1$. Из уравнения следует сравнение $y \equiv 1 \ (mod\ x - 1)$, т.е. $y = l(x - 1) + 1$ для некоторого натурального числа l. После подстановки и сокращения на $x - 1$ получим уравнение:

$$(x-1)^2 l^2 + (2x - 1)l - x^3 - x^2 - x = 0. \qquad (*)$$

Отсюда $l - 3 \equiv 0 \ (mod\ x - 1)$, то есть число

$$m = \frac{l - 3}{x - 1} = \frac{y - 3x + 2}{(x-1)^2}$$

Должно быть целым. Более того, имеем $m < 1$, поскольку это равносильно неравенству

$$y < (x-1)^2 + 3x - 2 = x^2 + x - 1,$$

которое верно при $x > 1$. Действительно, если $y \geq x^2 + x - 1$, то

$$x^4 = (x-1)y^2 + y \geq (x-1)(x^2 + x - 1)^2 + x^2 + x - 1 = x^5 + x^4 - 3x^3 + 4x - 2,$$

что невозможно при $x > 1$. Таким образом, $m \leq 0$, а значит, $l \in \{1; 2; 3\}$.

При $l = 1$ уравнение $(*)$ принимает вид $-x(x^2 + 1) = 0$, что невозможно для $x > 1$. Если $l = 2$, то число m будет целым только при $x = 2$, однако пара $(l, x) = (2, 2)$ не удовлетворяет уравнению $(*)$. При $l = 3$ уравнение $(*)$ переписывается в виде

$$-(x-1)^2(x + 6) = 0,$$

отсюда находим, что $x = 6$ и затем $y = l(x - 1) + 1 = 16$.