Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2022/23 уч.г.
Финальный тур. ***Время выполнения заданий 180 минут***

7 класс

7.1. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 5, с суммой цифр 100. Ответ обоснуйте.

Ответ: 599999999995 (между двумя пятерками 10 девяток). **Решение**. В силу делимости на 5, последней цифрой искомого числа N может быть либо 5, либо 0. Если последняя цифра 0, то, не изменяя суммы цифр, мы можем заменить 0 на 5 и вычесть из пяти ненулевых цифр в других разрядах по единичке. Тогда получится меньшее число, удовлетворяющее условиям задачи. Далее, если какая-то цифра числа N между первой и последней – не девятка, то увеличив её на единицу и уменьшив на единицу цифру в старшем разряде, опять получим меньшее число. Итак, у N все цифры, кроме первой и последней – девятки (скажем, n штук), а последняя – пятёрка. Первую цифру x найдем из условия для суммы цифр: $x + 9n + 5 = 100$, т.е. $9n = 95 - x$. Очевидно, цифра x для делимости правой части на 9 определяется однозначно: $x = 5$. Отсюда следует ответ.

7.2. В треугольнике ABC точка пересечения медиан равноудалена от всех трех вершин. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

Решение. Пусть BM – медиана и K – точка пересечения медиан. Тогда в равнобедренном треугольнике AKC медиана KM является и высотой. Отсюда получаем, что в треугольнике ABC медиана BM является высотой. Значит, прямоугольные треугольники ABM и CBM равны (по 1-му признаку равенства треугольников) и поэтому $AB = CB$. Аналогично, рассматривая медиану из вершины A, получим $AB = AC$. Итак, $CB = AB = AC$.

7.3. Существует ли набор из 25 различных целых чисел, обладающих следующим свойством: сумма всех 25 чисел равна нулю, а для любых 24 из них модуль суммы больше 25?

Ответ: существует**. Решение.** Если рассмотреть набор из 25 чисел с нулевой суммой, то для произвольных 24 чисел этого набора сумма будет равна ($-x$), где x – оставшееся («отброшенное») число. Значит, нужно найти набор из 25 различных целых чисел с нулевой суммой, в котором все числа по модулю больше 25. Для этого можно взять три различных числа, в сумме дающие 0, а остальные 22 числа взять в виде 11 пар противоположных чисел. Можно привести такой пример: (-26), (-27), ($+53$), (-28), ($+28$), (-29), ($+29$), …, (-38), ($+38$).

7.4. В отряде космонавтов 20 человек, у каждого не менее 14 друзей в отряде. В космос требуется отправить экипаж, в котором все дружат между собой. Обязательно ли удастся сформировать экипаж из четырех человек?

Ответ: обязательно. **Решение.** Для произвольного космонавта К рассмотрим группу G из 14 его друзей, так что в дополнительной группе G* будет 6 человек вместе с К. Внутри G у каждого космонавта, скажем, С не менее 8 друзей (8=14–6: из всех друзей С, которых не меньше 14, удалены космонавты дополнительной группы G*). Пусть А и В – два друга в группе G. Если, от противного, предположить, что у них нет общего друга в G, то у А внутри группы G есть 7 друзей (кроме В) и у В в G есть 7 друзей (кроме А), и они не пересекаются. Но тогда в G должно быть не менее 2 + 7 + 7 = 16 человек. Противоречие показывает, что в G есть тройка друзей (А, В и их общий друг), а вместе с К они составят искомый экипаж из 4 человек.

7.5. В каждую клетку клетчатого квадрата 9×9 записаны нули. За один ход разрешается выбрать строку и прибавить произвольное положительное число к любым двум соседним клеткам в выбранной строке (прибавляемое число разрешается менять от хода к ходу). Можно ли за несколько ходов составить квадрат, в котором суммы во всех девяти столбцах совпадают?

Ответ: нельзя. **Решение.** Обозначим через A сумму 45 чисел в пяти столбцах с нечетными номерами, а через B – сумму 36 чисел в остальных четырех столбцах (с четными номерами). Заметим, что к A и к B при каждом ходе прибавляется одно и то же число (вообще говоря, зависящее от хода). Поэтому разность $A–B$ остается постоянной. Если, от противного, предположить, что удастся составить искомый квадрат с некоторой суммой $S > 0$ в каждом столбце, то получим: $A = 5S$, $B = 4S$. Тогда $A – B = S > 0$, в то время как вначале имели $A = 0$, $B = 0$ и $S = 0$.

8 класс

8.1. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 5, с суммой цифр 100. Ответ обоснуйте.

Ответ: 599999999995 (между двумя пятерками 10 девяток). **Решение**. См. задачу 7.1.

8.2. Даны два взаимно простых натуральных числа p и q, отличающиеся больше, чем на единицу. Докажите, что существует такое натуральное n, что числа $p + n$ и $q + n$ не будут взаимно простыми.

Решение. Пусть, для определенности, $q > p$. Обозначим $m = q – p > 1$. Заметим, что $p + n$ и $q + n$ при любом фиксированном n дают одинаковые остатки от деления на m, поскольку их разность постоянна и равна $q – p = m$. При изменении n от 1 до m эти остатки пробегают все возможные m значений (начиная с $p \pmod m$). Значит, при некотором $n < m$ получится нулевой остаток, т.е. оба числа $p + n$ и $q + n$ будут делиться на m, и тем самым, не будут взаимно простыми. *Комментарий. Найденное n, для которого оба числа $p+n$ и $q+n$ делятся на m, не будет наименьшим в условиях задачи, когда m –число составное. Действительно, если m' –наименьший простой делитель числа m, то вместо рассмотрения остатков от деления на m можно ограничиться остатками от деления на m', поэтому искомое число n будет меньше, чем m'.*

8.3. О данном треугольнике и данном четырехугольнике известно следующее: для любых двух углов треугольника найдется угол четырехугольника, по величине равный сумме этих двух углов треугольника. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Решение. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Если предположить, от противного, что все эти углы различны, то числа $(\alpha + \beta)$, $(\beta + \gamma)$ и $(\alpha + \gamma)$ будут различными, и в четырехугольнике будет три разных вершины с такими углами. Сумма этих трех углов равна $2\cdot(\alpha + \beta + \gamma) = 2\cdot180° = 360°$, но это противоречит тому, что в четырехугольнике сумма всех четырех углов равна 360°.

8.4. В отряде космонавтов 20 человек, у каждого – не менее 15 друзей в отряде. В космос требуется отправить экипаж, в котором все дружат между собой. Обязательно ли удастся сформировать экипаж **а)** из четырех человек? **б)** из пяти человек?

Ответ: **а)** обязательно: **б)** не обязательно. **Решение. а)** См. решение задачи 7.4 (условие 7.4 даже более общее, чем в пункте **а)** задачи 8.4**). б)** Рассмотрим такой контрпример. Пусть космонавты разбиты на 4 группы по 5 человек в каждой, и пусть каждый космонавт не дружит ни с кем из своей группы, а дружит со всеми остальными 15 космонавтами из других групп. Таким образом, у каждого ровно 15 друзей. Если предположить, от противного, что найдутся 5 космонавтов, дружащих между собой, то из них по меньшей мере двое должны быть из одной группы (т.к. групп 4, а космонавтов 5). Получаем противоречие (в нашем примере в одной и той же группе друзей нет).

8.5. В каждую клетку клетчатого квадрата 9×9 записаны нули. Требуется за несколько ходов составить магический квадрат (сумма во всех строках и столбцах должна быть равна одному и тому же числу). Можно ли это сделать, если за один ход разрешается **а)** выбрать строку и прибавить положительное число к любым двум соседним клеткам в выбранной строке, причем прибавляемое число разрешается менять от хода к ходу; **б)** прибавить единицу к любым двум соседним по стороне клеткам?

Ответ: а) нельзя**: б)** можно**. Решение. а)** См. решение задачи 7.5 (из которого следует, что не только магический квадрат, но и равных сумм в столбцах нельзя получить). **б)** Имеются различные алгоритмы составления магического квадрата. Они сводятся к разбиению на доминошки (прямоугольники 2×1). Приведем алгоритм разбиения на доминошки (прямоугольники 2×1) с дальнейшим прибавлением единичек к доминошкам. Рассмотрим квадрат 8×8, который получается, если из исходного квадрата вырезать левую верхнюю угловую клетку, а также (примыкающие) 16 клеток: 8 клеток верхней строки и 8 клеток левого столбца. Назовем эти 16 клеток фигурой Г. Очевидно, и квадрат 8×8, и фигура Г разбиваются на доминошки. Если после такого разбиения на доминошки повторить n раз прибавление единичек в каждую доминошку квадрата 8×8, и m раз – в каждую доминошку фигуры Г, то сумма чисел в любой строке, начиная со второй, квадрата 9×9 будет равна $m+8n$, и аналогично – для любого столбца, начиная со второго. А в первой строке (столбце) сумма будет $8m$. Для равенства $m+8n= 8m$ можно взять $n=7$, $m=8$. Тогда получится магический квадрат с суммами 64 в строках и столбцах. *Комментарий. Имеется алгоритм разбиения на доминошки, который можно разделить на 9 этапов, соответствующих разбиению доски, из которой удалена очередная диагональная клетка. Кроме того, есть алгоритм, использующий тот факт, что квадрат* 9×9 *можно разбить на квадраты* 3×3*, и задача сводится к более простой – составлению магического квадрата* 3×3.

9 класс

9.1. При каких значениях параметра a уравнения $ax + a = 7$ и $3x - a = 17$ имеют общий целый корень?

Ответ: $a = 1$. **Решение.** Решая эти два уравнения как систему с неизвестными x и a, выразим a из второго уравнения и подставим в первое. Получим квадратное уравнение $3x^2 - 14x - 24 = 0$. У него два корня: 6 и (–4/3). Для целого корня $x = 6$ соответствующее значение $a = 3x - 17 = 1$.

9.2. Даны два взаимно простых натуральных числа p и q, отличающиеся больше, чем на единицу. **а)** Докажите, что существует натуральное n, для которого числа $p + n$ и $q + n$ не будут взаимно простыми. **б)** Найдите наименьшее такое n при $p = 2$, $q = 2023$.

Ответ: б) 41**. Решение.** См. решение задачи 8.2 (вместе с обозначениями и комментарием**).** Если оба числа $p + n$ и $q + n$ делятся на некоторое $k > 1$, то $m = q - p$ тоже делится на k и поэтому k не меньше наименьшего простого делителя числа m**.** Для $p = 2$, $q = 2023$ имеем $m = 2021 = 43\cdot47$ – разложение на простые множители. Значит, к числам 2 и 2023 для делимости на 43 надо прибавить 43 – 2 = 41.

9.3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, отличный от дельтоида (дельтоид – это четырехугольник, симметричный относительно одной из своих диагоналей). Известно, что биссектрисы углов A и C пересекаются в точке на диагонали BD. Докажите, что биссектрисы углов B и D пересекаются на диагонали AC.

Решение. Пусть M **–** точка пересечения биссектрис углов A и C (поскольку $ABCD$ – не дельтоид, эти биссектрисы не совпадают и имеют единственную точку пересечения). По условию, M лежит на диагонали BD и поэтому по свойству биссектрис, $\frac{DA}{AB}=\frac{DM}{MB}=\frac{DC}{CB}$. Отсюда $\frac{DA}{DC}=\frac{AB}{CB}$. Но тогда биссектрисы углов B и D пересекают диагональ AC в одной и той же точке. Действительно, если бы точки пересечения N и L этих биссектрис с диагональю AC были бы различны, то из равенств $\frac{NA}{NC}=\frac{AB}{CB}$ и $\frac{DA}{DC}=\frac{LA}{LB}$ следовало бы, что отношения $\frac{AB}{CB}$ и $\frac{DA}{DC}$ не могут быть одинаковыми. Значит, точки N и L совпадают.

9.4. Дано уравнение $x^3 + 2^n \cdot y = y^3 + 2^n \cdot x$. Докажите, что **а)** если натуральные числа *x, y, n* удовлетворяют этому уравнению, то $x = y$; **б)** если ненулевые целые *x, y* и неотрицательные целые *n* удовлетворяют этому уравнению, то $|x| = |y|$.

Решение. **а)** Имеем $x^3 - y^3 = 2^n(x - y)$. Если $x \neq y$, то отсюда после деления на $(x - y)$ получим $x^2 + xy + y^2 = 2^n$. Если хотя бы одно из чисел *x* или *y* нечетное, то в левой части будет стоять нечетное число, а в правой четное. Значит, $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ для некоторых натуральных x_1, y_1. Поэтому левая часть делится на 4, и тогда $n > 1$. Таким образом, приходим к уравнению $x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = 2^{n-2}$. Продолжая эти рассуждения, получим аналогично $x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 = 2^{n-4}$ и так далее (методом спуска) придем либо к уравнению вида $x^2 + xy + y^2 = 2$, либо к уравнению вида $x^2 + xy + y^2 = 1$. Оба этих уравнения, очевидно, неразрешимы в натуральных числах, откуда следует утверждение пункта **а)**. **б)** Если *x* и *y* – целые числа одного знака, то утверждение следует из пункта **а**) (случай $n = 0$ также был рассмотрен при решении пункта **а**). Пусть теперь числа *x* и *y* разных знаков, для определенности $x > 0$, $y < 0$. Тогда, обозначив $y = -t$ и повторяя рассуждения пункта а), после деления на $(x + t) > 0$ приходим к уравнению $x^2 - xt + t^2 = 2^n$ в натуральных числах *x, t*. Аналогично, методом спуска приходим к одному из уравнений вида: $x^2 - xt + t^2 = 2$ или $x^2 - xt + t^2 = 1$ в натуральных числах. Первое из этих уравнений неразрешимо по тем же соображениям делимости на 2 и 4 (как и выше). Второе уравнение имеет лишь одно решение в натуральных числах, а именно $x = t = 1$. Действительно, выражение $x^2 - xt + t^2 \geq 2xt - xt = xt$ может (для натуральных *x, t*) равняться единице лишь при $x = t = 1$ и, возвращаясь к исходным переменным до спуска, получаем: $x = 2^{n/2}, y = -2^{n/2}$ (при этом *n* должно быть четным). В любом случае $|x| = |y|$.

9.5. В финансовой компании 20 акционеров, их суммарный пакет – 2000 акций. Акционеров требуется разбить на две группы по 10 человек в каждой с пакетами по 1000 акций в группе. Докажите, что найдутся такие два акционера, что если один из них продаст другому часть своих акций, то нужное разбиение удастся провести.

Решение. Присвоим акционерам номера в порядке возрастания количества их акций: пусть $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{20}$, где x_i – количество акций акционера с номером *i*. Далее, разобьём акционеров на две группы по 10 человек с нечетными и с четными номерами. Обозначим через S_1 и S_2 пакеты акций в первой и второй группах, соответственно. Очевидно, $S_1 \leq S_2$. Пусть $\Delta = S_2 - S_1$. Имеем: $\Delta = (x_{20} - x_1) - (x_{19} - x_{18}) - (x_{17} - x_{16}) - ... - (x_3 - x_2)$. Каждая из данных скобок неотрицательна, и значит, $\Delta \leq x_{20} - x_1$. Заметим, что число Δ чётное, так как имеет одинаковую чётность с $S_1 + S_2 = 2000$. Если 20-й акционер (с x_{20} акций) продаст $\Delta/2$ своих акций первому акционеру (с x_1 акций), то у него станет $(x_{20} - \Delta/2)$ акций, а у первого $(x_1 + \Delta/2)$ акций. Новые пакеты акций в тех же группах будут $S_2 - \Delta/2$ и $S_1 + \Delta/2$. И теперь их разность будет равна $(S_2 - \Delta/2) - (S_1 + \Delta/2) = \Delta - \Delta = 0$, т.е. теперь в обеих группах станет по 1000 акций. (Замечание: если $\Delta = 0$, то уже изначально в обеих группах были равные пакеты акций, но для формального соблюдения условий задачи любой акционер может продать одну свою акцию акционеру из его же группы).

10 класс

10.1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\left(x^2 + 3xy + 2y^2\right)\left(x^2y^2 - 1\right) = 0$.

Решение. Разложив первую скобку на множители $(x + 2y)(x + y)$, а вторую – на множители $(xy + 1)(xy - 1)$, получаем, что искомое множество представляет собой объединение двух прямых $y = -x$, $y = -x/2$ и двух гипербол $y = 1/x$, $y = -1/x$.

10.2. Сколько решений в натуральных числах x, y имеет уравнение $x + y + 2xy = 2023$?

Ответ: 6. **Решение.** Домножим уравнение на 2, прибавим к обеим частям единицу и разложим левую часть на множители, а правую – в произведение простых делителей**:**

$$2x + 4xy + 2y + 1 = 4047 \Leftrightarrow (2x + 1)(2y + 1) = 4047 \Leftrightarrow (2x + 1)(2y + 1) = 3 \cdot 19 \cdot 71$$

Поскольку x и y – натуральные числа, каждый множитель в левой части не меньше трех, поэтому единицы в вариантах разложения на множители не может встретиться, и возможные варианты таковы:

1. $2x + 1 = 3$, $2y + 1 = 1349$. Отсюда $x = 1$, $y = 674$.
2. $2x + 1 = 19$, $2y + 1 = 213$. Отсюда $x = 9$, $y = 106$.
3. $2x + 1 = 71$, $2y + 1 = 57$. Отсюда $x = 35$, $y = 28$.

Кроме того, очевидно, имеются симметричные решения:

4. $x = 28$, $y = 35$; **5**. $x = 106$, $y = 9$; **6**. $x = 674$, $y = 1$.

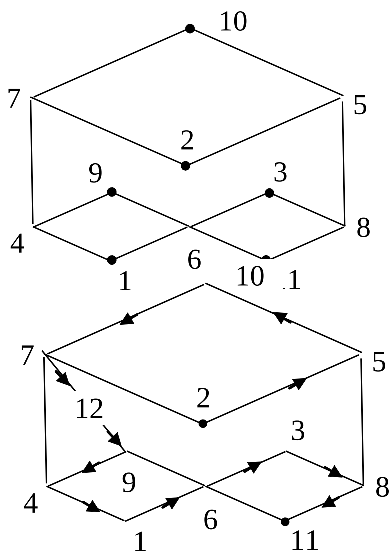
10.3. Дан треугольник, у которого длины сторон – числа рациональные. Докажите, что рациональным числом является отношение R/r , где R и r – радиусы описанной и вписанной окружности треугольника.

Решение. Пусть a, b, c – длины сторон, p – полупериметр, S – площадь треугольника. Из известных соотношений $S = pr$, $S = \dfrac{abc}{4R}$ и формулы Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ следует, что $\dfrac{R}{r} = \dfrac{abcp}{4S^2} = \dfrac{abcp}{4p(p-a)(p-b)p-c)} = \dfrac{abc}{4(p-a)(p-b)(p-c)}$. Отсюда в силу рациональности сторон получаем утверждение задачи.

10.4. В финансовой компании 20 акционеров, их суммарный пакет – 2000 акций. Акционеров требуется разбить на две группы по 10 человек в каждой с пакетами по 1000 акций в группе. Докажите, что найдутся такие два акционера, что если один из них продаст другому часть своих акций, то нужное разбиение удастся провести.

Решение. См. задачу 9.5.

10.5. **а)** Докажите, что первые 11 натуральных чисел 1, 2, …, 11 нельзя переставить так, чтобы соседние числа отличались либо на 3, либо на 5. **б)** Можно ли сделать это для чисел 1,2,…,12?



Ответ: б) можно**. Решение. а)** Начертим граф возможных соседей (см. рисунок). Рассмотрим три пары вершин в четырехугольниках на графе (они отмечены жирными точками), а именно: (2, 10), (1, 9) и (3, 11) – это вершины с наименьшей степенью (количеством соседей), равной 2. Предположим, от противного, что есть простой путь на графе (т.е. без повторения вершин), проходящий через все вершины. Тогда найдется такая пара вершин среди трех указанных пар, что путь не начинается и не кончается в вершинах из этой пары (такая пара есть, т.к. концов у пути – два, а пар – три). Таким образом, обе вершины этой пары – "проходные", но если впервые будет пройдена одна вершина из этой пары, то вторая вершина станет изолированной («отрезанной»: в неё нельзя будет попасть потом). Противоречие.

б) Пример перестановки: 2, 5, 10, 7, 12, 9, 4, 1, 6, 3, 8, 11. Граф (см. рисунок) помогает построить подобный пример.

11 класс

11.1. Решите неравенство $2\cos(\cos x) > 1$.

Ответ: x – любое действительное число. **Решение.** Так как $\cos x \in [-1, 1]$ при всех x, то из неравенства $1 < \pi/3$ и свойств функции косинус (монотонного убывания в первой четверти и четности) следует, что для всех x выполняются неравенства: $\cos(\cos x) > \cos 1 > \cos \pi/3 = 1/2$. Отсюда следует результат.

11.2. Решите уравнение $(\sqrt{2023} + \sqrt{2022})^x - (\sqrt{2023} - \sqrt{2022})^x = \sqrt{8088}$.

Ответ: $x = 1$. **Решение.** Заметим, что $\sqrt{8088} = 2\sqrt{2022}$. Это наблюдение подсказывает, что $x = 1$ является корнем уравнения. Покажем, что других корней нет. Действительно, левая часть представляет собой разность двух показательных функций: у первой из них основание больше единицы, а у второй – меньше единицы (можно заметить, что произведение данных оснований равно единице). Значит, левая часть – это разность возрастающей и убывающей функций на всей числовой прямой, т.е. представляет собой строго возрастающую функцию, и поэтому она принимает значение, равное числу в правой части, в единственной точке $x = 1$.

11.3. Дан треугольник, у которого длины сторон – числа рациональные. Докажите, что рациональным числом является **а)** отношение R/r, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружности; **б)** значение $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\chi}{2}$, где α, β, χ – углы треугольника.

Решение. а) См. задачу 10.3. **б)** Преобразуем выражение, пользуясь тригонометрическими формулами и равенством $\alpha + \beta + \chi = \pi$:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\chi}{2} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2})\sin\frac{\chi}{2} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2})\cos\frac{\alpha+\beta}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) - 1) = \frac{1}{4}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\chi - 1).$$

Заметим, что из теоремы косинусов следует, что в случае рациональных сторон косинусы углов тоже рациональны. Отсюда получаем результат пункта б).

11.4. Дано несколько прямоугольных параллелепипедов в пространстве. Известно, что у каждой пары параллелепипедов есть хотя бы одна общая точка, а их рёбра соответственно параллельны. Обязательно ли все параллелепипеды имеют общую точку?

Ответ. Обязательно. **Решение.** Поскольку у параллелепипедов ребра соответственно параллельны, мы можем ввести декартову систему координат, направив оси вдоль трех ребер, смежных с одной вершиной (которая станет началом координат) выбранного параллелепипеда**.** В этой системе координат ребра всех параллелепипедов будут параллельны осям. Спроектировав на ось Оx данный i-ый параллелепипед (i = 1, 2, …, n), получим отрезок, который обозначим $[a_i, b_i]$. Любая пара таких отрезков имеет непустое пересечение (в противном случае соответствующая пара параллелепипедов не пересекается). Таким образом, приходим к такой задаче: на числовой прямой есть попарно пересекающиеся отрезки $[a_i, b_i]$, (i = 1, 2, …, n), и требуется доказать, что у них имеется общая точка. Пусть A –наибольшее значение среди левых концов отрезков, т.е. A = max{ $a_i \mid i = 1,2,\ldots,n$ } , и аналогично, пусть B – наименьшее значение среди правых концов отрезков.

Тогда $A \le B$, так как в противном случае $a_i > b_j$ для некоторых i и j, а значит, i-ый и j-ый отрезки не пересекаются. Отсюда следует, что любая точка отрезка $[A, B]$ будет общей для всех наших отрезков. Итак, пусть точка x^* принадлежит проекциям на ось Ox всех параллелепипедов. Точно так же мы можем найти общие точки y^* и z^* проекций на оси Oy и Oz. Тогда точка с координатами (x^*, y^*, z^*) будет принадлежать всем параллелепипедам. *Комментарий. Если вместо параллелепипедов с соответственно параллельными ребрами рассматривать произвольные выпуклые фигуры в пространстве, то по теореме Хелли у всех фигур будет гарантированно общая точка, если у любых четырех из них непустое пересечение.*

11.5. **а)** Докажите, что первые 11 натуральных чисел 1, 2, …, 11 нельзя переставить так, чтобы соседние числа отличались либо на 3, либо на 5. **б)** Можно ли сделать это для чисел 1, 2, …, 12?

Ответ. б) можно. **Решение.** См. задачу 10.5.