Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2022/2023

Отборочный тур. ***Время выполнения заданий – 90 минут***

Вариант 1.

7 класс

7.1. У старшего брата путь до школы занимает 12 минут, а у младшего (по той же дороге) – 20 минут. Сколько минут пройдет с момента выхода из дома младшего брата до момента, когда его догонит старший, если он вышел на 5 минут позже младшего?

Ответ. Через 12,5 минут. **Решение.** Пусть S – расстояние от дома до школы. Так как младший брат проходит это расстояние за 20 минут, то за 5 минут он пройдет путь $\frac{5S}{20}=\frac{S}{4}$. После момента выхода из дома старшего брата скорость сближения братьев будет равна $\frac{S}{12}-\frac{S}{20}=\frac{S}{30}$. Для того, чтобы найти время с этого момента до встречи, разделим расстояние между ними на скорость сближения. Получим $\frac{S}{4}:\frac{S}{30}=7{,}5$ (минут). С учетом задержки на 5 минут, получаем ответ 12,5 минут (и поскольку это меньше 20 минут, старший брат успевает догнать младшего).

7.2. Длину прямоугольника увеличили на 12%, а ширину – на 15%. **а**) На сколько процентов площадь нового прямоугольника больше площади исходного? **б)** Найдите отношение длины к ширине исходного прямоугольника, если известно, что периметр нового прямоугольника на 13% больше периметра исходного.

Ответ. а) на 28,8%. **б**) 2:1. **Решение. а)** Пусть a и b – длина и ширина прямоугольника, соответственно. Тогда стороны нового прямоугольника равны $1{,}12a$ и $1{,}15b$, а его площадь $S = 1{,}12a \cdot 1{,}15b = 1{,}288ab$, что составляет 128,8% от площади исходного прямоугольника. Таким образом, площадь увеличилась на 28,8%. **б)** Из условия задачи следует равенство $2(1{,}12a + 1{,}15b)=2(1{,}13(a+b))$, из которого получаем $0{,}02b = 0{,}01a$. Следовательно, $a = 2b$.

7.3. Даны натуральные числа a и b. Можно ли утверждать, что они оканчиваются на одну и ту же цифру в десятичной записи, если известно, что числа $2a+b$ и $2b+a$ оканчиваются на одну и ту же цифру?

Ответ. Да, можно. **Решение.** Вычислим разность чисел $2a+b$ и $2b+a$, тогда получим, что $a-b$ делится на 10, т.е. a и b оканчиваются на одну и ту же цифру.

7.4. В спортзале по кругу в произвольном порядке встали 10 мальчиков и 10 девочек. Сможет ли тренер начертить мелом на полу 10 непересекающихся отрезков так, чтобы каждый из них соединял мальчика и девочку (при любом расположении ребят)?

Ответ. Сможет. **Решение.** Будем рассматривать такую модель задачи: на окружности отмечены 10 точек с буквой м (мальчики) и 10 точек с буквой д (девочки). Требуется провести 10 непересекающихся хорд, на концах каждой из которых разные буквы (м – д). Первую хорду проведем между парой соседних (по окружности) разных букв: очевидно, такая пара (даже две пары) существует. Далее выкинем мысленно эту пару из рассмотрения и будем считать, что на окружности 9 букв м и 9 букв д, т.е. сотрем на время первую хорду и её концы. С оставшимися 18 буквами поступаем точно так же, соединяя хордой соседние разные буквы. Заметим, что новая хорда не пересекает первую, т.к. между концами первой хорды букв нет. Далее аналогично выкидываем из рассмотрения уже построенные хорды и их концы и строим новую хорду между соседними оставшимися разными буквами. Последняя, 10-я хорда соединит единственную пару разных букв, после чего восстановим стертые ранее хорды.

8 класс

8.1. У старшего брата путь до школы занимает 12 минут, а у младшего (по той же дороге) – 20 минут. Сколько минут пройдет с момента выхода из дома младшего брата до момента, когда его догонит старший, если он вышел на 5 минут позже младшего?

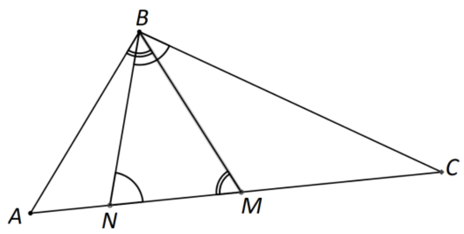
Ответ. Через 12,5 минут. **Решение.** См. задачу 7.1.

8.2. В десятичной записи натурального числа N между второй и третьей цифрами справа вставили 0 и получили $9N$. Чему может равняться N? (укажите все возможные значения).

Ответ. 225; 450; 675. **Решение.** Пусть x – третья цифра справа числа N. Двузначное число, составленное из последних двух цифр числа N, обозначим через B, а число, полученное из N, если стереть его последние три цифры обозначим через A. Таким образом, $N = 1000A + 100x + B$. Новое число, полученное после того, как вставили цифру 0, будет равно $10000A + 1000x + B$. Из условий задачи получаем уравнение $10000A + 1000x + B = 9000A + 900x + 9B$, т.е. $1000A + 100x = 8B$. Если $A \neq 0$, то в левой части последнего уравнения стоит число не меньше 1000, а в правой – меньше 800. Значит, $A=0$ и уравнение упрощается: $25x = 2B$. Следовательно, B – двузначное число, кратное 25 (при $B=0$ число $N=0$ не является натуральным). Итак, возможно три варианта: либо $B=25$. либо $B=50$. либо $B=75$. Соответствующая цифра x равна 2 или 4 или 6.

8.3. Дан треугольник ABC. На стороне AC, наибольшей в треугольнике, отмечены точки M и N такие, что $AM=AB$ и $CN=CB$. Оказалось, что угол NBM в три раза меньше угла ABC. Найдите $\angle ABC$.

Ответ. 108°. **Решение.** Точка N лежит между A и M, т.к. $AM+CV=AB+BC > AC$. Пусть $\angle NBM = x$, тогда $\angle ABM + \angle NBC = \angle ABC + \angle NBM = 3x+x=4x$. По условию, треугольники ABM и NBC равнобедренные, и поэтому $\angle ABM + \angle NBC = \angle BMN + \angle BNM = 180° - \angle NBM = 180° - x$. Таким образом, имеем уравнение $4x = 180° - x$, отсюда, $x = 36°$ и $\angle ABC = 3x = 108°$.



8.4. В спортзале по кругу в произвольном порядке встали 10 мальчиков и 10 девочек. Сможет ли тренер начертить мелом на полу 10 непересекающихся отрезков так, чтобы каждый из них соединял мальчика и девочку (при любом расположении ребят)?

Ответ. Сможет. **Решение.** См. задачу 7.4.

9 класс

9.1. К восьмизначному числу 20222023 припишите слева и справа по цифре так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 72. (Укажите все возможные решения.)

Ответ. 3202220232. **Решение**. Поскольку $72 = 8 \cdot 9$, то требуется приписать цифры так, чтобы полученное число делилось и на 8, и на 9. Делимость на 8 определяется тремя последними цифрами: значит, к двузначному числу 23 надо приписать справа цифру, чтобы получилось трёхзначное число, кратное 8. Есть только одна цифра, а именно двойка, для которой это возможно (232:8 = 29). После этого первую цифру искомого числа определяем по признаку делимости на 9 (сумма цифр должна делиться на 9, поэтому к имеющейся сумме цифр, равной 15, надо добавить 3).

9.2. Число a является корнем квадратного уравнения $x^2 - x - 100 = 0$. Найдите значение $a^4 - 201a$.

Ответ. 10100**.** **Решение.** Возводя в квадрат выражение $a^2 = a + 100$, получим $a^4 = a^2 + 200a + 10000 = a + 100 + 200a + 10000 = 201a + 10100$. Отсюда получаем ответ.

9.3. Дан четырехугольник $ABCD$, около которого описана окружность радиуса R. Можно ли утверждать, что если $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2$, то хотя бы одна из диагоналей четырехугольника является диаметром описанной окружности?

Ответ: нет, нельзя. **Решение.** Для примера можно рассмотреть вписанный четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями, отличными от диаметров. К такому примеру можно придти, если ввести угловые величины дуг α, β, γ, δ, на которые разбивается окружность. Тогда $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4R^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\delta}{2}\right)$. В скобках число 2 получается не только при условии $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$, но и в том случае, когда $\alpha+\gamma=\beta+\delta= 180°$. Это соответствует случаю вписанного четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями, т.к. по свойству угла между хордами, прямой угол между диагоналями равен тогда $(\alpha+\gamma)/2 =(\beta+\delta)/2$. *Комментарий. К подобному примеру можно придти без тригонометрии: рассмотрим сначала четырехугольник ABCD,* *у которого диагональ AC является диаметром, а затем вместо точки A возьмем симметричную ей относительно диаметра, перпендикулярного BD, точку A'. Тогда четырехугольник A'BCD искомый.*

9.4. **а**) Даны натуральные числа a и b. Можно ли утверждать, что они имеют одинаковые остатки при делении на 10, если известно, что числа $3a+b$ и $3b+a$ имеют одинаковые остатки при делении на 10? **б**) Даны натуральные числа a, b и c. Известно, что у чисел $2a + b$, $2b + c$ и $2c + a$ остатки при делении на 10 одинаковые. Докажите, что у чисел a, b и c остатки при делении на 10 тоже одинаковые.

Ответ. **а**) нет, нельзя. **Решение.** **а**) Можно взять, например, $a = 1$ и $b = 6$, тогда оба числа $3a+b$ и $3b+a$ имеют остаток 9. **б**) Пусть $s = a + b + c$. Уменьшая каждое из чисел $2a + b$, $2b + c$ и $2c + a$ на s, получим числа $a - c$, $b - a$, $c - b$ (некоторые из них могут быть отрицательными), причём у этих чисел одинаковый остаток, скажем x, при делении на 10. Заметим, что сумма чисел $a - b$, $b - c$, $c - a$ равна нулю, а с другой стороны, сумма их остатков при делении на 10 равна $3x$. Значит, (поскольку 3 и 10 взаимно просты) $x = 0$. (*Комментарий. Напомним, что остаток при делении целого числа n на натуральное m – это такое неотрицательное целое r, меньшее m, для которого n – r делится на m.*)

10 класс

10.1. К восьмизначному числу 20222023 припишите слева и справа по цифре так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 72. (Укажите все возможные решения.)

Ответ. 3202220232. **Решение.** См. задачу 9.1.

10.2. Решите уравнение $\dfrac{(2x-1)^2}{x^3-2x^2+1}+\dfrac{4x-4x^2-1}{x^3-3x^2+2}=0$.

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=-1$. **Решение**. Перепишем уравнение в виде $\dfrac{(2x-1)^2}{x^3-2x^2+1}=\dfrac{(2x-1)^2}{x^3-3x^2+2}$. Значит, либо $2x-1=0$, либо $\dfrac{1}{x^3-2x^2+1}=\dfrac{1}{x^3-3x^2+2}$. Из первого уравнения x=1/2, и при этом значении знаменатели второго уравнения не равны 0, т.е. x=1/2– корень. Из второго уравнения следует: $x^3-2x^2+1=x^3-3x^2+2 \Leftrightarrow x^2=1$, т.е. $x=\pm1$. При $x=1$ знаменатель первой дроби обращается в нуль, значит, $x=1$ не является корнем. При $x=-1$ оба знаменателя отличны от нуля.

10.3. Дан четырехугольник $ABCD$, около которого описана окружность радиуса R. Можно ли утверждать, что если $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=8R^2$, то хотя бы одна из диагоналей четырехугольника является диаметром описанной окружности?

Ответ: нет, нельзя. **Решение.** См. задачу 9.3.

10.4. В клетчатом квадрате 25×25 в некоторые клетки поставлен знак "плюс". Докажите, что найдутся два (возможно, пересекающиеся) квадрата 3×3 с одинаковым расположением плюсов (т.е. при параллельном переносе плюсы должны совпасть).

Решение. Подсчитаем сначала количество квадратов 3×3 в клетчатом квадрате 25×25. Каждый такой квадрат однозначно определяется положением своей левой нижней вершины. Этой вершиной может быть любая узловая точка той части таблицы, которая останется, если из квадрата 25×25 отрезать сверху и справа каемку в 3 клетки: останется левый нижний квадрат размера 22×22. В таком квадрате $23^2=529$ узловых точек. Итак, имеется 529 квадратов 3×3. Различные варианты расположения плюсов (с точки зрения условий задачи) в квадрате 3×3 – это различные упорядоченные наборы из 9 элементов, каждый из которых может быть двух видов: "плюс" или пустая клетка. Поэтому различных вариантов будет $2^9=512$. Поскольку число квадратов (=529) больше числа вариантов (=512), получаем утверждение задачи.

11 класс

11.1. На доске написано 30-значное число 22…211…100…0, содержащее 10 двоек, 10 единиц и 10 нулей. Можно ли переставить цифры в этом числе так, чтобы получился квадрат натурального числа?

Ответ. Нельзя. **Решение**. Обозначим данное число через N и предположим, от противного, что $N=n^2$ для некоторого натурального n. Сумма цифр числа N равна $2\cdot10 + 1\cdot10 = 30$. Из признаков делимости на 3 и на 9 следует, что N делится на 3, но не делится на 9. При перестановках цифр сумма цифр не меняется, и поэтому n обязано делиться на 3, но тогда n^2 делилось бы на 9. Противоречие.

11.2. Решите уравнение $\arccos\frac{x+1}{2} = 2\operatorname{arctg} x$.

<u>Ответ</u>: $x = \sqrt{2} - 1$. **<u>Решение</u>.** Возьмем косинус от обеих частей и воспользуемся формулой $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

В результате получим $\frac{x+1}{2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Корни этого уравнения $x_1 = -1$; $x_{2,3} = \pm\sqrt{2} - 1$. Проверка для $x = -1$ и для $x = -\sqrt{2} - 1$ показывает, что $\arccos\frac{x+1}{2}$ и $\operatorname{arctg} x$ принимают значения в разных четвертях, т.е. эти корни посторонние. Корень же $x = \sqrt{2} - 1$ истинный, т.к. $\arccos(\sqrt{2}/2)$ и $2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)$ лежат в промежутке $(0, \pi/2)$ (поскольку $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) < \operatorname{arctg} 1 < \pi/4$), где косинус изменяется монотонно.

11.3. На координатной плоскости начертили параболу – график приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами. Она касается оси Ox. Докажите, что на этой параболе можно отметить такую точку с целыми координатами (a, b), что график $y = x^2 + ax + b$ тоже касается оси Ox.

<u>Решение</u>. Пусть $x^2 + px + q$ – данный трёхчлен. Тогда $p^2 - 4q = 0$ по условию касания графика оси Ox (это условие равносильно тому, что дискриминант трёхчлена равен нулю). Заметим, что точка с координатами $(-p, q)$ лежит на графике трёхчлена, т.к. $(-p)^2 + p(-p) + q = q$. Эта точка имеет целые координаты, а дискриминант трёхчлена $y = x^2 + (-p)x + q$, т.е. $(-p)^2 - 4q$, равен нулю.

11.4. В клетчатом квадрате 25×25 в некоторые клетки поставлен знак "плюс". Докажите, что найдутся два (возможно, пересекающиеся) квадрата 3×3 с одинаковым расположением плюсов (т.е. при параллельном переносе плюсы должны совпасть).

<u>Решение</u>. См. задачу 10.4.

Вариант 2

7 класс

7.1. Два автомобиля едут по шоссе со скоростью 80 км/ч и с интервалом 10 м. У знака ограничения скорости машины мгновенно снижают скорость до 60 км/ч. С каким интервалом они будут двигаться после знака ограничения?

Ответ. 7,5 м**.** **Решение.** Пусть v (м/час) – скорость машин до знака, u (м/час) – скорость машин после знака. Вторая машина проедет знак позже первой на $10/v$ (час). За это время первая машина проедет $10u/v$ (метров) = 10·6/8 = 7,5 метров. Этот интервал и будет сохраняться после знака. *Комментарий. Как следует из решения, результат зависит лишь от отношения u/v, поэтому переводить скорости в другие единицы измерения необязательно.*

7.2. Даны два равнобедренных треугольника, у которых периметры одинаковы. Основание второго треугольника на 15% больше основания первого, а боковая сторона второго треугольника на 5% меньше боковой стороны первого. Найдите отношение сторон первого треугольника.

Ответ. Основание относится к боковой стороне как 2:3. **Решение.** Пусть a и b – длина основания и боковой стороны, соответственно, первого треугольника. Тогда его периметр равен $a + 2b$. Основание и боковая сторона второго треугольника равны, соответственно, $1{,}15a$ и $0,95b$, а его периметр равен $1{,}15a + 1{,}9b$. В силу равенства периметров имеем $a + 2b = 1{,}15a + 1,9b$. Отсюда $0{,}1b = 0,15a$. Итак, a:b = 2:3.

7.3. Имеется семь гирек, о которых известно, что если убрать любую их них, то оставшиеся шесть гирек можно разложить на три группы, равные по весу. Обязательно ли все семь гирек одного веса?

Ответ. Необязательно. **Решение.** Можно привести такой пример: пусть веса гирек {1, 1, 1, 1, 4, 4, 4} (в граммах). Тогда, если убрать гирьку в 1 г, то на три группы разложим так: 1+4=1+4=1+4, а если убрать 4 г, то 1+1+1+1=4=4.

7.4. Даны три различных числа a, b и c, среди которых есть число, большее 2022. Может ли оказаться так, что числа a^2-b^2, b^2-c^2 и c^2-a^2 представляют собой три последовательных целых числа?

Ответ. Может. **Решение.** Сумма чисел a^2-b^2, b^2-c^2 и c^2-a^2 равна нулю и поэтому при условии, что это последовательные целые числа, они должны быть равны (–1), 0 и 1. Из равенства $b^2-c^2=0$ следует, что либо $b=c$, либо $b=-c$, но поскольку числа a, b и c должны быть различными, возможен лишь второй случай. Итак, пусть $b=-c$. Тогда из трёх уравнений $a^2-b^2=-1$, $b^2-c^2=0$ и $c^2-a^2=1$ второе и третье автоматически следуют из первого. Если в уравнении $(b-a)(b+a)=1$ второй множитель взять достаточно большим, например, 10000, тогда первый будет равен 0, 0001 и мы будем иметь два уравнения $b+a=10000$ и $b-a=0{,}0001$. Отсюда $2b=10000{,}0001$ *и* $2a=9999{,}9999$. Поскольку $b > 2022$, то полученные числа a, b и $c = -b$ удовлетворяют условиям.

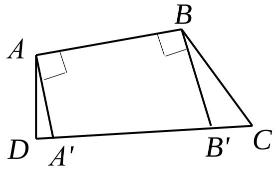
8 класс

8.1. Два автомобиля едут по шоссе со скоростью 80 км/ч и с интервалом 10 м. У знака ограничения скорости машины мгновенно снижают скорость до 60 км/ч. С каким интервалом они будут двигаться после знака ограничения?

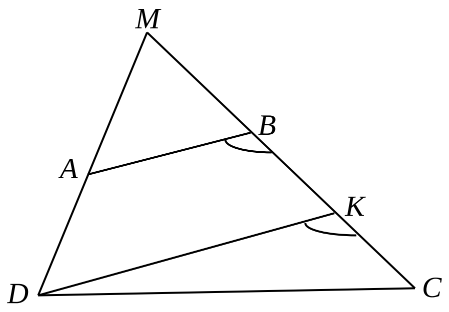
Ответ. 7,5 м**.** **Решение.** См. задачу 7.1.

8.2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Можно ли утверждать, что $AB < CD$, если **а**) углы A и B тупые; **б)** угол A больше угла D, а угол B больше угла C?

Ответ. а) можно; **б)** можно. **Решение. а)** Ниже из решения пункта **б)** следует и пункт **а)**, но для пункта **а)** можно привести более простое решение. Восставим перпендикуляры к прямой AB из точек A и B до пересечения с прямой DC. Пусть A' и B' – точки пересечения. Таким образом, отрезок AB есть проекция отрезка $A'B'$ на прямую AB. Поскольку углы A и B тупые, построенные перпендикуляры пройдут внутри углов DAB и CBA и попадут внутрь отрезка DC. Значит, $DC > A'B' \geq AB$ (т.к. длина проекции не превосходит длины проектируемого отрезка).



б) Углы A, B, C, D обозначим через $\alpha, \beta, \chi, \delta$, соответственно, Поскольку $\alpha+\beta+\chi+\delta=360°$ и $\chi+\delta<\alpha+\beta$, то $\chi+\delta<180°$ и значит, прямые DA и CB пересекаются в точке, скажем, M, лежащей в той же полуплоскости (относительно прямой DC), что и четырехугольник $ABCD$. Рассмотрим ΔDMC. На его сторонах DM и CM лежат точки A и B. Если $AB||DC$, то утверждение задачи очевидно, т.к. ΔAMB



подобен ΔDMC с коэффициентом подобия меньше единицы. Если же отрезки *AB* и *DC* не параллельны, то $\alpha+\delta\neq 180°$, $\beta+\chi\neq 180°$ и поэтому верно хотя бы одно из строгих неравенств: $\delta>180°-\alpha$ или $\gamma>180°-\beta$ (иначе сложение неравенств $\alpha+\delta<180°$ и $\beta+\chi<180°$ приводит к противоречию с равенством $\alpha+\beta+\chi+\delta=360°$). Пусть, для определенности, $\delta>180°-\alpha$. Проведем через точку *D* луч, параллельный *AB* (в той же полуплоскости относительно прямой *DA*, где лежит *ABCD*.), Тогда он пройдет внутри угла *ADC* и пересечет отрезок *BC* в некоторой внутренней точке, скажем, *K*. Значит, треугольники *AMB* и *DMK* подобны, поэтому *AB* < *DK*. Но в ΔDKC угол *DKC* равен β (по свойству параллельных *AB* и *DK*, пересеченных прямой *MC*). Следовательно, в ΔDKC против угла *DKC*, большего, чем угол *C*, лежит сторона *DC* > *DK*. Итак, *DC* > *DK* > *AB*.

8.3. Имеется 10 гирек, о которых известно, что если убрать любую их них, то оставшиеся 9 гирек можно разложить на три группы, равные по весу. Обязательно ли все 10 гирек одного веса?

Ответ. Не обязательно. **Решение.** Можно привести такой пример: пусть есть семь гирек по 1 г и три гирьки по 7 г. Тогда, если убрать гирьку 1 г, то разложим так: 1+1+7 = 1+1+7 = 1+1+7, а если убрать 7 г, то 1+1+1+1+1+1+1 = 7 = 7.

8.4. Даны три различных числа *a*, *b* и *c*, среди которых есть число, большее 2022. Может ли оказаться так, что числа a^2-b^2, b^2-c^2 и c^2-a^2 представляют собой три последовательных целых числа?

Ответ: может. **Решение.** См. задачу 7.4.

9 класс

9.1. Докажите неравенство $|a-1|\leq a^2-a+1$.

Решение. При $a\geq 1$ неравенство принимает вид $a-1\leq a^2-a+1 \Leftrightarrow (a-1)^2+1\geq 0$. При $a<1$ неравенство запишется так: $-a+1\leq a^2-a+1 \Leftrightarrow a^2\geq 0$. В обоих случаях получили верные (очевидные) неравенства, и таким образом, при всех *a* исходное неравенство выполняется..

9.2. Дан выпуклый четырехугольник *ABCD*. Можно ли утверждать, что *AB* < *CD*, если **а**) углы *A* и *B* тупые; **б)** угол *A* больше угла *D*, а угол *B* больше угла *C*?

Ответ. а) можно; б) можно**. Решение.** См. задачу 8.2.

9.3. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр натурального числа *n* (в десятичной записи). Существует ли такое *n*, что $n\cdot s(n)=20222022$?

Ответ. Не существует. **Решение.** По признаку делимости на 3 и на 9 числа n и $s(n)$ либо оба делятся на 3 (на 9), либо оба не делятся на 3 (соответственно, на 9). Рассмотрим сначала первый случай, когда n и $s(n)$ делятся на 3. Тогда произведение $n\cdot s(n)$ делится на 9. Во втором случае n и $s(n)$ не делятся на 3, и тогда произведение $n\cdot s(n)$ не делится на 3. Однако число 20222022 делится на 3, но не делится на 9, т.к. сумма цифр этого числа равна 12. Значит, такого n не существует.

9.4. В некоторые клетки квадратной таблицы 8×8 поставили знак "плюс". Докажите, что найдутся два (возможно, пересекающиеся) квадрата 4×4, в которых одинаковое количество плюсов.

Решение. Подсчитаем сначала количество квадратов 4×4 в таблице 8×8. Каждый такой квадрат однозначно определяется положением своей левой нижней вершины. Этой вершиной может быть любая узловая точка той части таблицы, которая останется, если из таблицы 8×8 отрезать сверху и справа каемку в 4 клетки: останется левый нижний квадрат размера 4×4. В таком квадрате $5^2=25$ узловых точек. Итак, имеется 25 квадратов 4×4. Различных вариантов (по количеству плюсов) заполнения квадрата 4×4 имеется всего 17 (число плюсов – от 0 до 16). Поскольку 25>17, найдутся хотя бы два квадрата 4×4 с одинаковым количеством плюсов.

10 класс

10.1. Решите неравенство $|x^2-x|\leq 2x^2-3x+1$.

Ответ. $x \le 1/3$; $x \ge 1$. **Решение.** Если $x^2 - x > 0$, т.е. при $x > 1$ или $x < 0$, неравенство примет вид $x^2 - 2x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$, и значит при $x > 1$ или $x < 0$ исходное неравенство верно. Если же $x^2 - x \le 0$, т.е. при $0 \le x \le 1$, неравество запишется так: $3x^2 - 4x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1/3)(x-1) \ge 0 \Leftrightarrow x \le 1/3$ или $x \ge 1$. Учитывая область $0 \le x \le 1$, получаем ответ.

10.2. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр натурального числа n (в десятичной записи). Существует ли такое n, что $n \cdot s(n) = 20222022$?

Ответ. Не существует. **Решение.** См. задачу 9.3.

10.3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром O. Докажите, что отношение длины CO к сумме катетов $AC + CB$ есть величина постоянная для всех прямоугольных треугольников и найдите это отношение.

Ответ: $\sqrt{2}/2$. **Решение.** Пусть $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Тогда по теореме косинусов в треугольнике ACO имеем $CO^2 = c^2\cos^2\alpha + c^2/2 - \sqrt{2}c^2\cos\alpha\cos(\alpha + 45°) = c^2/2 + c^2\cos\alpha\sin\alpha = c^2(1 + 2\sin\alpha\cos\alpha)/2$. Отсюда $CO^2 = c^2(\sin\alpha + \cos\alpha)^2/2$ и поскольку $AC + CB = c(\sin\alpha + \cos\alpha)$, получаем ответ.

10.4. В некоторые клетки квадратной таблицы 8×8 поставили знак "плюс". Докажите, что найдутся два (возможно, пересекающиеся) квадрата 4×4, в которых одинаковое количество плюсов.

Решение. См. задачу 9.4.

11 класс

11.1. Решите неравенство $|x^2 - x| \le 2x^2 - 3x + 1$.

Ответ: $x \le 1/3$; $x \ge 1$. **Решение.** См. задачу 10.1.

11.2. Решите уравнение $2\cos(\pi x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Ответ. $x = -1$. **Решение.** Левая часть уравнения по модулю не больше двух, а правая часть по модулю не меньше двух: для правой части это следует из элементарных неравенств, например (при $x > 0$), – из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, и при $x < 0$ оно верно для модуля в силу нечетности функции $y = x+1/x$; к тому же выводу можно также придти, исследуя с помощью производной множество значений этой функции. Значение, равное 2 (по модулю) достигается только при $x = 1$ или $x = -1$. Проверив эти числа, получаем, что подходит только $x = -1$.

11.3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром O. Докажите, что отношение длины CO к сумме катетов $AC + CB$ есть величина постоянная для всех прямоугольных треугольников и найдите это отношение.

Ответ: $\sqrt{2}/2$. **Решение.** См. задачу 10.3.

11.4. Докажите, что число $2^{2022} + 1$ **а)** делится на 65; **б)** может быть представлено в виде произведения четырех натуральных чисел, отличных от 1.

Решение. а) Обозначим данное число через N. Разложение 2022 на простые множители даёт $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. Поэтому $N = (4^{3\cdot})^{337} + 1$. Как известно, сумма нечетных степеней двух чисел раскладывается на множители: $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$. Поэтому $N = (4^{3\cdot})^{337} + 1$ делится на $(4^{3\cdot} + 1) = 65$. **б)** Представим N как сумму кубов: $N = (4^{337\cdot})^3 + 1 = (4^{337} + 1)(4^{674} - 4^{337} + 1)$. В силу пункта **а)** произведение двух данных скобок делится на 65 = 5 13. Очевидно, каждая из скобок больше 65. Выделим в них множители 5 и 13 и разделим N на 65, тогда частное будет произведением двух натуральных чисел (больших 65), а вместе с множителями 5 и 13 число N будет представлено в виде произведения четырех натуральных чисел, отличных от 1. *Комментарий. Для пункта **а)** можно предложить другое решение: поскольку* $2^6 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 65)$, *то после возведения этого сравнения в степень 337, получим результат. В пункте **б)** для числа N можно предложить другой способ разложения:* $2^{2022} + 1 = (2^{2022} + 2 \cdot 2^{1011} + 1) - 2^{1012} = (2^{1011} + 1)^2 - (2^{506})^2 = (2^{1011} - 2^{506} + 1)(2^{1011} + 2^{506} + 1)$.