САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Задания заключительного этапа

2022/2023 учебный год

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2022/2023 учебный год.

Задания для 10-11 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

10–11 класс. Первый вариант

1. В каждой клетке таблицы 100×100 записано натуральное число. В каждой строке имеется по крайней мере 10 различных чисел, а в каждых четырех последовательных строках не более 15 различных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в таблице?

Ответ: 175

Решение. В одной строке не менее 10 различных чисел, поэтому в следующих трех строках вместе появляется не более 5 новых чисел. Стало быть, первые четыре строки содержат не более 15 различных чисел, а каждые следующие три строки дают не более 5 новых чисел и всего чисел не больше, чем $15 + 32 \cdot 5 = 175$.

Приведем пример на 175 чисел. Занумеруем строки числами от 1 до 100. В первой строке поставим числа от 1 до 10, а в строке с номерами от $3k - 1$ до $3k + 1$ поставим числа 1 до 5 и числа от $5k+6$ до $5k+10$. Тогда в каждой ствоке будет 5 уникальных чисел и еще числа от 1 до 5, т.е. ровно 10 различных чисел, а в каждых четырех строках будет ровно 15 различных чисел. Таким образом, в таблице будут числа от 1 до $5 \cdot 33 + 10 = 175$.

Замечание. Доказать, что количество различных чисел в таблице не превосходит 175 можно доказать и по индукции. А именно, доказать, что в любых $3n + 1$ подряд идущих строках расположено не более чем $5(n + 2)$ различных чисел. База $n = 1$ верна по условию. Установим переход от n к $n + 1$. Рассмотрим $3n + 4$ подряд идущие строки. Пусть в четвертой с конца строке имеется $k \geqslant 10$ различных чисел. Тогда в трех самых нижних строках не более чем $15 - k$ различных чисел. А в оставшихся $3n + 1$ строке по индукционному предположению не больше $5(n+2)$ чисел. Поэтому всего различных чисел будет более чем $5(n + 2) + 15 - k = 5(n + 5) - k \leqslant 5(n + 3)$.

2. Найдите все простые p, для которых числа $p + 1$ и $p^2 + 1$ являются удвоенными квадратами натуральных чисел.

Ответ: $p = 7$

Первое решение. Пусть $p+1 = 2x^2$ и $p^2+1 = 2y^2$, тогда $2(y^2-x^2) = p(p-1)$. Поэтому либо $y - x$, либо $y + x$ кратно p. Из неравенства $x < y < p$ следует, что $x + y = p$. Таким образом, имеем систему из двух уравнений $x + y = p$ и $2(y - x) = p - 1$, решая ее, находим $x = \frac{p+1}{4}$ и, значит, $p + 1 = 2\left(\frac{p+1}{4}\right)^2$. Следовательно, $p = 7$.

Второе решение. Пусть $p + 1 = 2x^2$ и $p^2 + 1 = 2y^2$, тогда $p(p - 1) = 2(y^2 - x^2) = 2(y - x)(y + x)$. Поэтому одно из чисел 2, $y - x$ и $y + x$ делится на p. Если 2 делится на p, то $p = 2$, что невозможно, поскольку $p + 1 = 3$ не является удвоенным квадратом. Если $y - x$ делится на p, то $y + x > y - x \geqslant p$ и, значит, $2(y - x)(y + x) \geqslant 2p^2 > p(p - 1)$, что невозможно. Следовательно, $y + x$ делится на p. Заметим, что $\frac{y^2}{x^2} = \frac{p^2+1}{p+1} > \frac{p^2-1}{p+1} = p - 1$. Тогда если $p \geqslant 11$, то $y^2 > 12x^2$, откуда $y > 3x$ и, значит, $2(y - x) > y + x \geqslant p$. Стало быть, $2(y - x)(y + x) > p^2 > p(p + 1)$, что также невозможно. Таким образом, осталось рассмотреть случаи $p = 3$, $p = 5$ и $p = 7$. В первых двух из них $p+1$ не является удвоенным квадратом, а $p = 7$ подходит.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не превосходит 4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt[4]{a(b + 2c)} + \sqrt[4]{b(c + 2d)} + \sqrt[4]{c(d + 2a)} + \sqrt[4]{d(a + 2b)}.$$

Ответ: $4\sqrt[4]{3}$

Первое решение. По неравенству о средних для четырех чисел имеем

$$\sqrt[4]{a(b + 2c)} = \frac{\sqrt[4]{3a(b + 2c) \cdot 3 \cdot 3}}{\sqrt[4]{3^3}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}} \cdot \frac{3a + b + 2c + 6}{4}.$$

Просуммируем это неравенство с тремя аналогичными и получим, что

$$\sqrt[4]{a(b+2c)}+\sqrt[4]{b(c+2d)}+\sqrt[4]{c(d+2a)}+\sqrt[4]{d(a+2b)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}\Big(\frac{3a+b+2c+6}{4}+\frac{3b+c+2d+6}{4}+\frac{3c+d+2a+6}{4}+\frac{3d+a+2b+6}{4}\Big)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}\cdot\frac{6(a+b+c+d)+24}{4}\leqslant\frac{12}{\sqrt[4]{3^3}}=4\sqrt[4]{3}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Второе решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c}$, $\sqrt[4]{d}$ и $\sqrt[4]{b+2c}$, $\sqrt[4]{c+2d}$, $\sqrt[4]{d+2a}$, $\sqrt[4]{a+2b}$ имеем

$$\big(\sqrt[4]{a(b+2c)}+\sqrt[4]{b(c+2d)}+\sqrt[4]{c(d+2a)}+\sqrt[4]{d(a+2b)}\big)^2\leqslant$$
$$\leqslant\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\big)\big(\sqrt{b+2c}+\sqrt{c+2d}+\sqrt{d+2a}+\sqrt{a+2b}\big).$$

А по неравенству Коши–Буняковского для наборов $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ и 1, 1, 1, 1 имеем

$$\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\big)^2\leqslant(a+b+c+d)(1+1+1+1)\leqslant 4^2,$$

поэтому $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\leqslant 4$. Аналогично по неравенству Коши–Буняковского для наборов $\sqrt{b+2c}$, $\sqrt{c+2d}$, $\sqrt{d+2a}$, $\sqrt{a+2b}$ и 1, 1, 1, 1 имеем

$$\big(\sqrt{b+2c}+\sqrt{c+2d}+\sqrt{d+2a}+\sqrt{a+2b}\big)^2\leqslant$$
$$\leqslant\big((b+2c)+(c+2d)+(d+2a)+(a+2b)\big)(1+1+1+1)=12(a+b+c+a)\leqslant 48,$$

поэтому $\sqrt{b+2c}+\sqrt{c+2d}+\sqrt{d+2a}+\sqrt{a+2b}\leqslant 4\sqrt{3}$. Следовательно,

$$\sqrt[4]{a(b+2c)}+\sqrt[4]{b(c+2d)}+\sqrt[4]{c(d+2a)}+\sqrt[4]{d(a+2b)}\leqslant\sqrt{4\cdot 4\sqrt{3}}=4\sqrt[4]{3}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Третье решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c}$, $\sqrt[4]{d}$ и $\sqrt[4]{b+2c}$, $\sqrt[4]{c+2d}$, $\sqrt[4]{d+2a}$, $\sqrt[4]{a+2b}$ имеем

$$\big(\sqrt[4]{a(b+2c)}+\sqrt[4]{b(c+2d)}+\sqrt[4]{c(d+2a)}+\sqrt[4]{d(a+2b)}\big)^2\leqslant$$
$$\leqslant\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\big)\big(\sqrt{b+2c}+\sqrt{c+2d}+\sqrt{d+2a}+\sqrt{a+2b}\big).$$

Оценим по-отдельности сомножители в правой части. По неравенству о средних для двух чисел $\sqrt{x}\leqslant\frac{1}{2}(x+1)$, поэтому

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\leqslant\frac{a+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{c+1}{2}+\frac{d+1}{2}=\frac{a+b+c+d+4}{2}\leqslant 4.$$

Аналогично по неравенству о средних для двух чисел

$$\sqrt{3}\sqrt{x+2y}=\sqrt{(x+2y)\cdot 3}\leqslant\frac{1}{2}(x+2y+3),$$

поэтому

$$\sqrt{b+2c}+\sqrt{c+2d}+\sqrt{d+2a}+\sqrt{a+2b}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{b+2c+3}{2\sqrt{3}}+\frac{c+2d+3}{2\sqrt{3}}+\frac{d+2a+3}{2\sqrt{3}}+\frac{a+2b+3}{2\sqrt{3}}=\frac{3(a+b+c+d)+12}{2\sqrt{3}}=4\sqrt{3}.$$

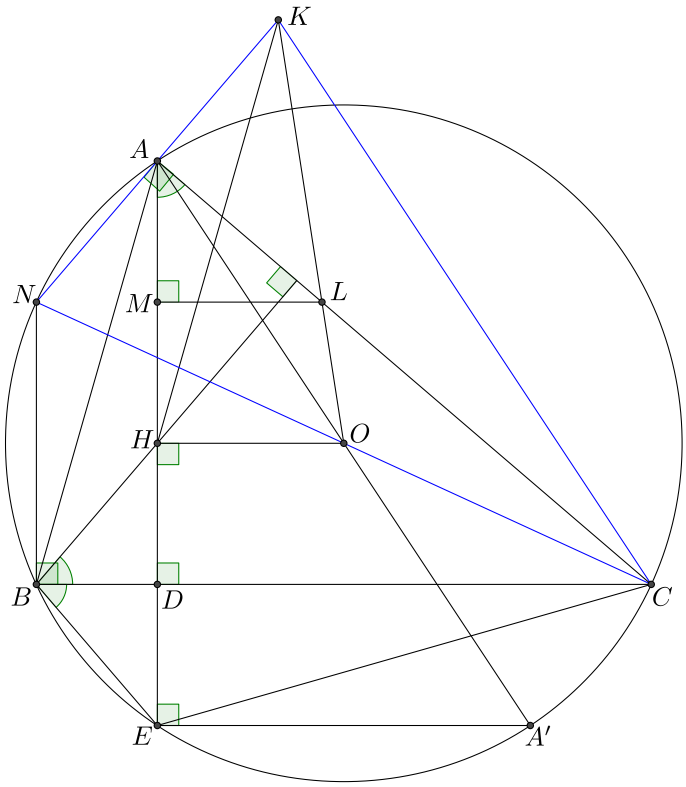
Следовательно,

$$\sqrt[4]{a(b+2c)}+\sqrt[4]{b(c+2d)}+\sqrt[4]{c(d+2a)}+\sqrt[4]{d(a+2b)}\leqslant\sqrt{4\cdot 4\sqrt{3}}=4\sqrt[4]{3}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, а H — точка пересечения его высот. Оказалось, что прямая OH параллельна стороне BC. На плоскости отметили такую точку K, что $ABHK$ — параллелограмм. Отрезки OK и AC пересеклись в точке L. В каком отношении перпендикуляр, опущенный из точки L на отрезок AH, делит AH?

Ответ: $1:1$

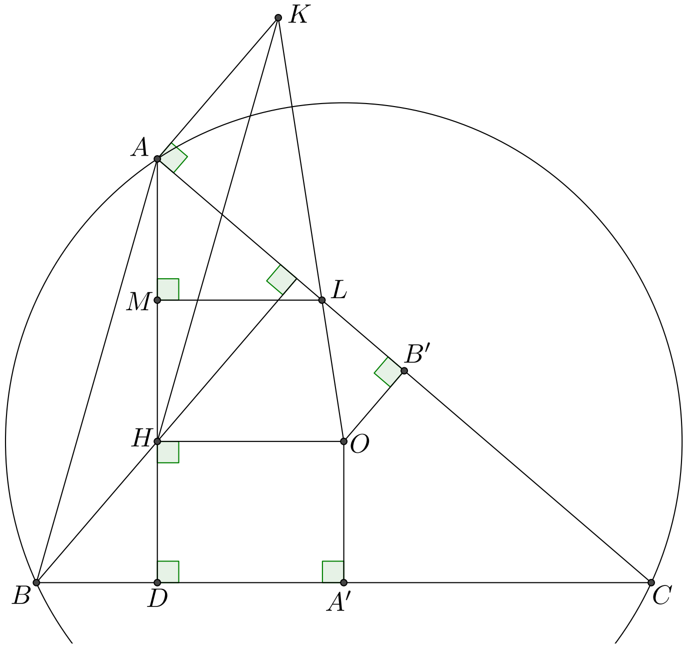


Первое решение. Пусть D — основание высоты из точки A, а точка E — пересечение этой высоты с описанной окружностью треугольника ABC, точка A' диаметрально противоположна точке A на этой окружности, а точка N — вторая точка пересечения прямой AK с этой окружностью. Из параллельности прямых OH и BC следует, что прямая OH перпендикулярна высоте AD. Поскольку AA' — диаметр окружности, $\angle AEA' = 90^\circ$ и, значит, прямые $A'E$ и OH параллельны. Стало быть, OH — средняя линия треугольника $AA'E$, поэтому $AH = HE$. Далее,

$$\angle CBE = \angle CAE = 90^\circ - \angle ACB = \angle CBH,$$

поэтому в треугольнике BEH отрезок BD является биссектрисой и высотой, а, значит, и медианой. Таким образом, $HD = DE$. Из равенств $AH = HE$ и $HD = DE$ получаем, что $AH : AD = 2 : 3$.

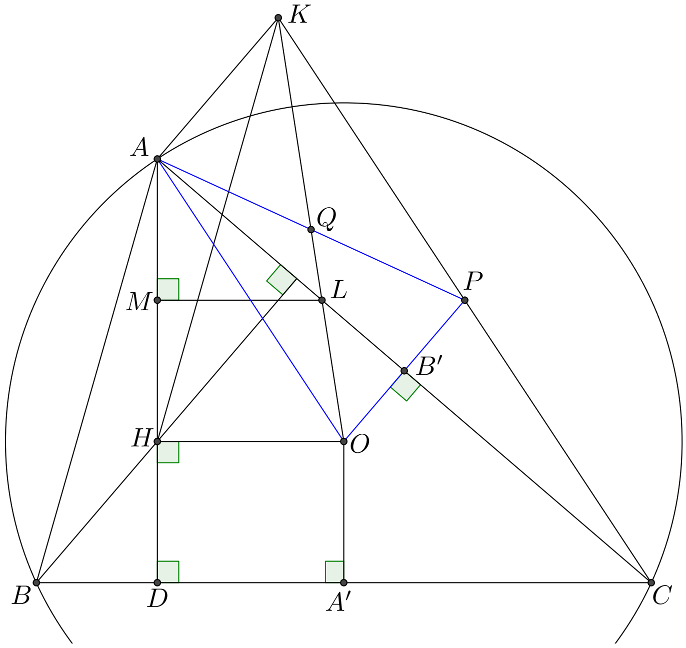
По условию прямые AK и BH параллельны, а прямая BH перпендикулярна прямой AC, поэтому $\angle NAC = 90^\circ$ и точки C и N диаметрально противоположны. Следовательно, $\angle NBC = 90^\circ$ и поэтому прямые NB и AH параллельны. Таким образом, четырехугольник $AHBN$ является параллелограммом. Стало быть, $AN = BH = AK$ и отрезок CA является медианой в треугольнике KCN. Но отрезок KO также является медианой в этом треугольнике. Следовательно, L — точка пересечения медиан этого треугольника и $AL : AC = 1 : 3$. Тогда по теореме Фалеса $AM : AD = 1 : 3$. Но мы уже знаем, что $AH : AD = 2 : 3$, поэтому $AM = MH$.



Второе решение. Заметим, что если точки A', B' и C' — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC, то треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. С другой стороны центр описанной окружности треугольника ABC является точкой пересечения высот треугольника $A'B'C'$. Следовательно, $AH = 2OA'$ и $BH = 2OB'$.

Пусть D — основание высоты из точки A, а M — основание перпендикуляра, опущенного из точки L на AH. Прямая OA' — серединный перпендикуляр к отрезку BC, поэтому она параллельна высоте AD. По условию прямые OH и BC параллельны, следовательно, $OHDA'$ — прямоугольник и $HD = OA' = \frac{1}{2}AH$.

В параллелограмме $ABHK$ противоположные стороны равны, поэтому $AK = BH = 2OB'$. Треугольники ALK и $B'LO$ подобны по двум углам ($\angle ALK = \angle B'LO$ как вертикальные, $\angle OB'L = 90^\circ = \angle KAL$) и их коэффициент подобия равен 2. Пусть $LB' = x$, тогда $AL = 2x$ и $CB' = AB' = 3x$, поскольку B' — середина стороны AC. Стало быть, $AL : AC = 2x : 6x = 1 : 3$ и $AM : AD = 1 : 3$, так как треугольники ALM и ACD подобны. Пусть $HD = y$, тогда $OA' = y$, $AH = 2y$ и $AD = AH + HD = 3y$. Следовательно, $AM = y$ и $MH = AH - AM = 2y - y = y$. Таким образом, $AM : MH = 1$.



Третье решение. Заметим, что если точки A', B' и C' — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC, то треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. С другой стороны центр описанной окружности треугольника ABC является точкой пересечения высот треугольника $A'B'C'$. Следовательно, $AH = 2OA'$ и $BH = 2OB'$.

Пусть D — основание высоты из точки A, M — основание перпендикуляра, опущенного из точки L на AH, P — середина отрезка AK. Прямая OA' — серединный перпендикуляр к отрезку BC, поэтому она параллельна высоте AD. По условию прямые OH и BC параллельны, следовательно, $OHDA'$ — прямоугольник и $HD = OA' = \frac{1}{2}AH$. Таким образом, $\frac{AH}{AD} = \frac{2}{3}$. По условию прямые AK и BH параллельны, а прямая BH перпендикулярна прямой AC, поэтому $\angle KAC = 90°$. По условию $ABHK$ параллелограмм, значит, $AK = BH$. Отрезок $B'P$ — средняя линия треугольника CAK, поэтому $B'P = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}BH = OB'$. Кроме того, OB' и PB' перпендикулярны AC, поэтому точки O, B' и P лежат на одной прямой. Таким образом, $OP = 2OB' = AK$ и OP параллельна AK. Стало быть, $AOPK$ — параллелограмм. Пусть Q — точка пересечения его диагоналей, тогда $AQ = QP$. Следовательно, AB' и OQ — медианы треугольника AOP, а L — точка их пересечения, поэтому $AL : AB' = 2 : 3$ и, значит, $AL : AC = 1 : 3$. Из подобия треугольников AML и ADC следует, что $\frac{AM}{AD} = \frac{AL}{AC} = \frac{1}{3}$. Тогда если $AM = x$, то $AD = 3x$ и $AH = 2x$, а, значит, $MH = x$ и $AM : MH = 1 : 1$.

5. В классе n мальчиков и n девочек ($n \geqslant 3$). Они расселись за круглым столом так, что никакие два мальчика и никакие две девочки не сидят рядом. У учителя есть $2n$ карточек, на них написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2n$, каждое по одному разу. Он так раздал каждому школьнику по одной карточке, что число у любой девочки больше числа у любого мальчика. Затем каждая девочка написала на листочке сумму чисел на трех карточках: ее собственной и сидящих рядом с ней мальчиков. При каких n все полученные n чисел могли оказаться равными?

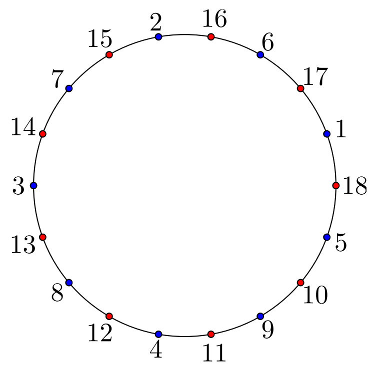
Ответ: при нечетных n

Решение. По условию мальчики получили карточки с числами от 1 до n, а девочки карточки с числами от $n+1$ до $2n$. Предположим, что у всех девочек на листочках оказалось написано число m. Тогда сумма всех чисел на листочках равна mn, с другой стороны она может быть получена следующим образом: надо сложить все числа, которые есть у девочек и добавить к ним удвоенную сумму всех чисел, которые есть у мальчиков.

Следовательно,

$$mn = 2\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=n+1}^{2n} j = \sum_{j=1}^{2n} j + \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}2n(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = n(2n+1) + n \cdot \frac{n+1}{2}.$$

Стало быть, $m = 2n+1+\frac{n+1}{2}$ и n — нечетно. Пусть $n = 2k-1$, тогда $m = 5k-1$. Для примера надо последовательно раздать карточки мальчикам от 1 до $2k-1$ идя через одного. Если теперь для каждой девочки посмотреть на сумму чисел, на карточках соседних с ней мальчиков, то по одному разу получатся все суммы от $k+1$ до $3k-1$. Дальше нужно дополнить их числами от $2k$ до $4k-2$ (раздав соответствующие карточки девочкам) так, чтобы все суммы стали равны $5k-1$. Пример раздачи карточек для $n = 9$ и $k = 5$ показан на рисунке.



10–11 класс. Второй вариант

1. В каждой клетке таблицы 75×75 записано натуральное число. В каждой строке имеется по крайней мере 15 различных чисел, а в каждых трех последовательных строках не более 25 различных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в таблице?

Ответ: 385

Решение. В одной строке не менее 15 различных чисел, поэтому в следующих двух строках вместе появляется не более 10 новых чисел. Стало быть, первые три строки содержат не более 25 различных чисел, а каждые следующие две строки дают не более 10 новых чисел и всего чисел не больше, чем $25 + 36 \cdot 10 = 385$.

Приведем пример на 385 чисел. Занумеруем строки числами от 1 до 75. В первой строке поставим числа от 1 до 15, а в строке с номером k поставим числа 1 до 10 и числа от $5k+6$ до $5k+10$. Тогда в каждой ствоке будет 5 уникальных чисел и еще числа от 1 до 10, т.е. ровно 15 различных чисел, а в каждых трех строках будет ровно 25 различных чисел.

Замечание. Доказать, что количество различных чисел в таблице не превосходит 385 можно доказать и по индукции. А именно, доказать, что в любых $2n+1$ подряд идущих строках расположено не более чем $5(2n+3)$ различных чисел. База $n = 1$ верна по условию. Установим переход от n к $n+1$. Рассмотрим $2n+3$ подряд идущих строк. Пусть в третьей с конца строке имеется $k \geqslant 15$ различных чисел. Тогда в двух самых нижних строках не более чем $25 - k$ различных чисел. А в оставшихся $2n + 1$ строке по индукционному предположению не больше $5(2n + 3)$ чисел. Поэтому всего различных чисел будет более чем $5(2n + 3) + 25 - k = 5(2n + 8) - k \leqslant 5(2n + 5)$.

2. Найдите все простые p, для которых числа $p + 7$ и $p^2 + 7$ являются удвоенными квадратами натуральных чисел.

Ответ: $p = 11$

Первое решение. Пусть $p + 7 = 2x^2$ и $p^2 + 7 = 2y^2$, тогда $2(y^2 - x^2) = p(p - 1)$. Поскольку p — нечетно, $p \geqslant 3$ и $2p^2 > p^2 + 7$. Следовательно, $x < y < p$. Поэтому либо $y-x$, либо $y+x$ кратно p. Из неравенства $2y^2 = p^2+7 < 2p^2$ следует, что $x < y < p$, поэтому $x + y = p$. Таким образом, имеем систему из двух уравнений $x + y = p$ и $2(y - x) = p - 1$, решая ее, находим $x = \frac{p+1}{4}$ и, значит, $p+7 = 2\left(\frac{p+1}{4}\right)^2$. Стало быть, $p^2 - 6p - 55 = 0$, откуда $p = 11$.

Второе решение. Пусть $p + 7 = 2x^2$ и $p^2 + 7 = 2y^2$, тогда $p(p - 1) = 2(y^2 - x^2) = 2(y - x)(y + x)$. Поэтому одно из чисел 2, $y - x$ и $y + x$ делится на p. Если 2 делится на p, то $p = 2$, что невозможно, поскольку $p + 7 = 9$ не является удвоенным квадратом. Если $y - x$ делится на p, то $y + x > y - x \geqslant p$ и, значит, $2(y - x)(y + x) \geqslant 2p^2 > p(p - 1)$, что невозможно. Следовательно, $y + x$ делится на p. Заметим, что $\frac{y^2}{x^2} = \frac{p^2+7}{p+7} > \frac{p^2-49}{p+7} = p - 7$. Тогда если $p \geqslant 17$, то $y^2 > 10x^2$, откуда $y > 3x$ и, значит, $2(y - x) > y + x \geqslant p$. Стало быть, $2(y - x)(y + x) > p^2 > p(p + 1)$, что также невозможно. Таким образом, осталось рассмотреть случаи $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$, $p = 11$ и $p = 13$. В последнем, а также в первых трех из них $p + 7$ не является удвоенным квадратом, а $p = 11$ подходит.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не превосходит 4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt[4]{a^2 + 3ab} + \sqrt[4]{b^2 + 3bc} + \sqrt[4]{c^2 + 3cd} + \sqrt[4]{d^2 + 3da}.$$

Ответ: $4\sqrt{2}$

Первое решение. По неравенству о средних для четырех чисел имеем

$$\sqrt[4]{a^2 + 3ab} = \frac{\sqrt[4]{4a \cdot (a + 3b) \cdot 4 \cdot 4}}{2\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{4a + (a + 3b) + 4 + 4}{4}.$$

Просуммируем это неравенство с тремя аналогичными и получим, что

$$\sqrt[4]{a^2+3ab}+\sqrt[4]{b^2+3bc}+\sqrt[4]{c^2+3cd}+\sqrt[4]{d^2+3da}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{5a+3b+8}{4}+\frac{5b+3c+8}{4}+\frac{5c+3d+8}{4}+\frac{5d+3a+8}{4}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{8(a+b+c+d)+32}{4}\leqslant\frac{16}{2\sqrt{2}}=4\sqrt{2}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Второе решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c}$, $\sqrt[4]{d}$ и $\sqrt[4]{a+3b}$, $\sqrt[4]{b+3c}$, $\sqrt[4]{c+3d}$, $\sqrt[4]{d+3a}$ имеем

$$\big(\sqrt[4]{a(a+3b)}+\sqrt[4]{b(b+3c)}+\sqrt[4]{c(c+3d)}+\sqrt[4]{d(d+3a)}\big)^2\leqslant$$
$$\leqslant\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\big)\big(\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3d}+\sqrt{d+3a}\big).$$

А по неравенству Коши–Буняковского для наборов $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ и 1, 1, 1, 1 имеем

$$\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\big)^2\leqslant(a+b+c+d)(1+1+1+1)\leqslant 4^2,$$

поэтому $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\leqslant 4$. Аналогично по неравенству Коши–Буняковского для наборов $\sqrt{a+3b}$, $\sqrt{b+3c}$, $\sqrt{c+3d}$, $\sqrt{d+3a}$ и 1, 1, 1, 1 имеем

$$\big(\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3d}+\sqrt{d+3a}\big)^2\leqslant$$
$$\leqslant\big((a+3b)+(b+3c)+(c+3d)+(d+3a)\big)(1+1+1+1)=16(a+b+c+a)\leqslant 64,$$

поэтому $\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3d}+\sqrt{d+3a}\leqslant 8$. Следовательно,

$$\sqrt[4]{a^2+3ab}+\sqrt[4]{b^2+3bc}+\sqrt[4]{c^2+3cd}+\sqrt[4]{d^2+3da}\leqslant\sqrt{4\cdot 8}=4\sqrt{2}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Третье решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c}$, $\sqrt[4]{d}$ и $\sqrt[4]{a+3b}$, $\sqrt[4]{b+3c}$, $\sqrt[4]{c+3d}$, $\sqrt[4]{d+3a}$ имеем

$$\big(\sqrt[4]{a(a+3b)}+\sqrt[4]{b(b+3c)}+\sqrt[4]{c(c+3d)}+\sqrt[4]{d(d+3a)}\big)^2\leqslant$$
$$\leqslant\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\big)\big(\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3d}+\sqrt{d+3a}\big).$$

Оценим по-отдельности сомножители в правой части. По неравенству о средних для двух чисел $\sqrt{x}\leqslant\frac{1}{2}(x+1)$, поэтому

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\leqslant\frac{a+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{c+1}{2}+\frac{d+1}{2}=\frac{a+b+c+d+4}{2}\leqslant 4.$$

Аналогично по неравенству о средних для двух чисел

$$2\sqrt{x+2y}=\sqrt{(x+2y)\cdot 4}\leqslant\frac{1}{2}(x+3y+4),$$

поэтому

$$\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3d}+\sqrt{d+3a}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a+3b+4}{4}+\frac{b+3c+4}{4}+\frac{c+3d+4}{4}+\frac{d+3a+4}{4}=\frac{4(a+b+c+d)+16}{4}=8.$$

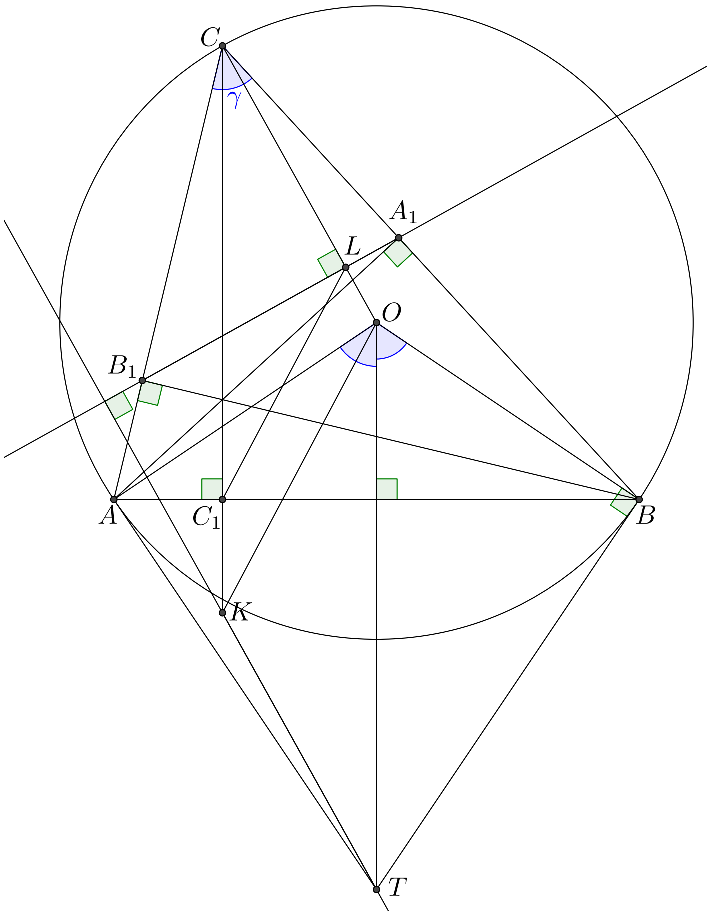
Следовательно,

$$\sqrt[4]{a^2+3ab}+\sqrt[4]{b^2+3bc}+\sqrt[4]{c^2+3cd}+\sqrt[4]{d^2+3da}\leqslant\sqrt{4\cdot 8}=4\sqrt{2}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

4. В остроугольном треугольнике ABC опущены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. На плоскости выбрана такая точка T, что прямые TA и TB являются касательными к описанной окружности треугольника ABC, точка O — центр этой окружности. Перпендикуляр, опущенный из точки T на прямую A_1B_1, пересекает прямую CC_1 в точке K, а проходящая через точку C_1 параллельная OK прямая пересекает отрезок CO в точке L. Найдите угол $\angle CLA_1$.

Ответ: 90°



Решение. Положим $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ACB = \gamma$. Треугольники AOT и BOT равны по трем сторонам, а вписанный угол $\angle ACB$ опирается на ту же дугу, что и центральный угол $\angle AOB$, поэтому $\gamma = \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle TOB$. Следовательно, $\frac{OB}{OT} = \cos\gamma$. Аналогично $\angle BOC = 2\angle BAC$ и из равнобедренности треугольника BOC следует, что $\angle BCO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC = 90^\circ - \angle BAC$. Поскольку $\angle AB_1B = 90^\circ = \angle AA_1B$, четырехугольник AB_1A_1B вписанный. Следовательно, $\angle BAC = \angle CA_1B_1$. Стало быть, $\angle BCO = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - \angle CA_1B_1$ и прямые A_1B_1 и CO перпендикулярны. Таким образом, прямые CO и TK параллельны, а, значит, четырехугольник $COTK$ является параллелограммом, в частности, $CK = OT$. Тогда по теореме Фалеса $\frac{CL}{CC_1} = \frac{CO}{CK} = \frac{OB}{OT} = \cos\gamma$. Стало быть,

$$CL = CC_1\cos\gamma = AC\sin\alpha\cos\gamma = CA_1\sin\alpha = CA_1\sin\angle CA_1B_1.$$

Таким образом, точка L — основание перпендикуляра, опущенного из C на прямую A_1B_1, значит, $\angle CLA_1 = 90^\circ$.

5. В классе n мальчиков и n девочек ($n \geqslant 3$). Они расселись за круглым столом так, что никакие два мальчика и никакие две девочки не сидят рядом. У учителя есть $2n$ карточек, на них написаны числа 1, 2, 3, …, $2n$, каждое по одному разу. Он так раздал каждому школьнику по одной карточке, что число у любой девочки больше числа у любого мальчика. Затем каждый мальчик написал на листочке сумму чисел на трех карточках:

его собственной и сидящих рядом с ним девочек. При каких n все полученные n чисел могли оказаться равными?

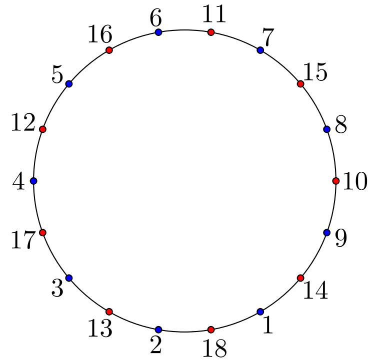
Ответ: при нечетных n

Решение. По условию мальчики получили карточки с числами от 1 до n, а девочки карточки с числами от $n+1$ до $2n$. Предположим, что у всех мальчиков на листочках оказалось написано число m. Тогда сумма всех чисел на листочках равна mn, с другой стороны она может быть получена следующим образом: надо сложить все числа, которые есть у мальчиков и добавить к ним удвоенную сумму всех чисел, которые есть у девочек.

Следовательно,

$$mn = \sum_{j=1}^{n} j + 2\sum_{j=n+1}^{2n} j = 2\sum_{j=1}^{2n} j - \sum_{j=1}^{n} j = 2n(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) = 2n(2n+1) - n \cdot \frac{n+1}{2}.$$

Стало быть, $m = 4n + 2 - \frac{n+1}{2}$ и n — нечетно. Пусть $n = 2k-1$, тогда $m = 7k-2$. Для примера надо последовательно раздать карточки девочкам от $2k$ до $4k-2$, идя через одну. Если теперь для каждого мальчика посмотреть на сумму чисел, имеющихся у сидящих рядом с ним девочек, то по одному разу получатся все суммы от $5k-1$ до $7k-3$. Дальше нужно дополнить их числами от 1 до $2k-1$ (раздав соответствующие карточки мальчикам) так, чтобы все суммы стали равны $7k-2$. Пример раздачи карточек для $n=9$ и $k=5$ показан на рисунке.

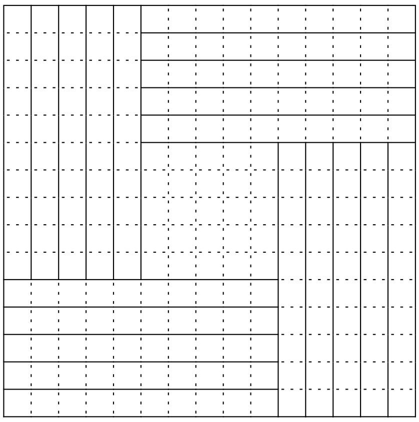


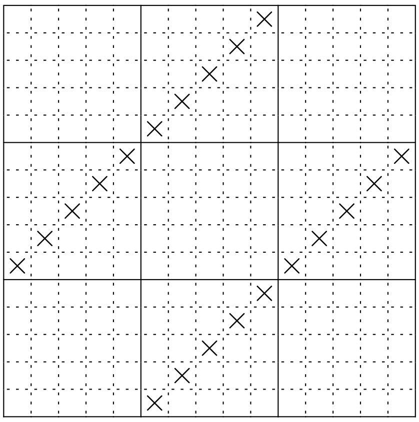
10–11 класс. Третий вариант

1. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице 15×15 так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске 1×10 была хотя бы одна отмеченная клетка.

Ответ: 20

Решение. Разрежем таблицу 15×15 без центрального квадрата 5×5 на 20 прямоугольников 1×10 (см. левый рисунок). Следовательно, придется отметить не менее 20 клеток. Пример на 20 клеток: отмечены все клетки двух параллельных диагоналей длины 10 (см. правый рисунок).





2. Найдите все такие тройки простых чисел p, q и r, что $\dfrac{p}{q} = \dfrac{4}{r+1} + 1$.
Ответ: $(7, 3, 2)$; $(5, 3, 5)$; $(3, 2, 7)$.

Первое решение. Перепишем соотношение в виде

$$4q = (p - q)(r + 1). \qquad (*)$$

Если $q = 2$, то оно принимает вид $8 = (p-2)(r+1)$. Тогда $p-2$ является степенью двойки и, значит, $p = 3$ и $r = 7$. Если $r = 2$, то соотношение $(*)$ принимает вид $4q = 3(p - q)$, откуда $q = 3$ и $p = 7$. Будем дальше считать, что q и r — нечетные простые числа. Но тогда и p нечетно, поскольку иначе левая часть $(*)$ отрицательна. Следовательно, $r+1 \geqslant 4$ и $p - q$ — четные числа, поэтому $p - q = 2$ и $r + 1 = 2q$. Если $q = 3$, то $p = 5$ и $r = 5$. Если же $q > 3$, то поскольку p и q не делятся на 3 и $p = q + 2$, q имеет вид $3k + 2$, но тогда $r = 2q - 1 = 6k + 3$, что невозможно.

Второе решение. Из условия следует, что $p > q$. Домножим на знаменатели и перепишем соотношение в виде $5q - p = (p - q)r$. Отсюда, в частности, получаем, что $5q - p$ делится на $p - q$. Следовательно, $4q = (5q - p) + (p - q)$ также делится на $p - q$. С другой стороны $4p = (5q - p) + 5(p - q)$ также делится на $p - q$. Таким образом, на $p - q$ делится и наибольший общий делитель чисел $4p$ и $4q$, но этот делитель равен 4. Стало быть возможны лишь три случая: $p - q = 1$, $p - q = 2$ и $p - q = 4$. Отметим сразу, что во втором и третьем случаях $p \geqslant q + 2 \geqslant 4$ и, в частности, p не делится на три.

Первый случай возможен только когда $p = 3$ и $q = 2$, а тогда $r = 7$ и это первое решение.

Во втором случае $p - q = 2$ и тогда $r = \frac{1}{2}(5q - p) = 2q - 1 = 2p - 5$. Если r дает остаток 1 от деления на три, то p будет кратно трем, что невозможно. Если r дает остаток 2 от деления на три, то q будет кратно трем и, значит, $q = 3$, $p = 5$ и $r = 5$, что дает второе решение.

В третьем случае $p - q = 4$ и тогда $r = \frac{1}{4}(5q - p) = q - 1 = p - 5$. Если r дает остаток 1 от деления на три, то p будет кратно трем, что невозможно. Если r дает остаток 2 от деления на три, то q будет кратно трем и, значит, $q = 3$, $p = 7$ и $r = 2$, что является третьим решением.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не превосходит 4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt[4]{a^2(a+b)}+\sqrt[4]{b^2(b+c)}+\sqrt[4]{c^2(c+d)}+\sqrt[4]{d^2(d+a)}.$$

Ответ: $4\sqrt[4]{2}$

Первое решение. По неравенству о средних для четырех чисел имеем

$$\sqrt[4]{a^2(a+b)}=\frac{\sqrt[4]{2a\cdot 2a\cdot(a+b)\cdot 2}}{\sqrt[4]{8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\cdot\frac{2a+2a+(a+b)+2}{4}=\frac{5a+b+2}{4\sqrt[4]{8}}.$$

Просуммируем это неравенство с тремя аналогичными и получим, что

$$\begin{aligned}&\sqrt[4]{a^2(a+b)}+\sqrt[4]{b^2(b+c)}+\sqrt[4]{c^2(c+d)}+\sqrt[4]{d^2(d+a)}\leqslant\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\Big(\frac{5a+b+2}{4}+\frac{5b+c+2}{4}+\frac{5c+d+2}{4}+\frac{5d+a+2}{4}\Big)=\\&=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\cdot\frac{6(a+b+c+d)+8}{4}\leqslant\frac{8}{\sqrt[4]{8}}=4\sqrt[4]{2}.\end{aligned}$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Второе решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ и $\sqrt[4]{a+b}$, $\sqrt[4]{b+c}$, $\sqrt[4]{c+d}$, $\sqrt[4]{d+a}$ имеем

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt[4]{a^2(a+b)}+\sqrt[4]{b^2(b+c)}+\sqrt[4]{c^2(c+d)}+\sqrt[4]{d^2(d+a)}\big)^2\leqslant\\&\leqslant\big(a+b+c+d\big)\big(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}\big)\leqslant 4\big(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}\big).\end{aligned}$$

А по неравенству Коши–Буняковского для наборов $\sqrt{a+b}$, $\sqrt{b+c}$, $\sqrt{c+d}$, $\sqrt{d+a}$ и 1, 1, 1, 1 имеем

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}\big)^2\leqslant\\&\qquad\leqslant\big((a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)\big)(1+1+1+1)=8(a+b+c+d)\leqslant 32,\end{aligned}$$

поэтому $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}\leqslant 4\sqrt{2}$. Таким образом,

$$\sqrt[4]{a^2(a+b)}+\sqrt[4]{b^2(b+c)}+\sqrt[4]{c^2(c+d)}+\sqrt[4]{d^2(d+a)}\leqslant\sqrt{4\cdot 4\sqrt{2}}=4\sqrt[4]{2}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Третье решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ и $\sqrt[4]{a+b}$, $\sqrt[4]{b+c}$, $\sqrt[4]{c+d}$, $\sqrt[4]{d+a}$ имеем

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt[4]{a^2(a+b)}+\sqrt[4]{b^2(b+c)}+\sqrt[4]{c^2(c+d)}+\sqrt[4]{d^2(d+a)}\big)^2\leqslant\\&\leqslant\big(a+b+c+d\big)\big(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}\big)\leqslant 4\big(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}\big).\end{aligned}$$

По неравенству о средних для двух чисел $\sqrt{2}\sqrt{x+y}=\sqrt{2(x+y)}\leqslant\frac{1}{2}(x+y+2)$, поэтому

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}&\leqslant\frac{a+b+2}{2\sqrt{2}}+\frac{b+c+2}{2\sqrt{2}}+\frac{c+d+2}{2\sqrt{2}}+\frac{d+a+2}{2\sqrt{2}}=\\&=\frac{2(a+b+c+d)+8}{2\sqrt{2}}\leqslant 4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

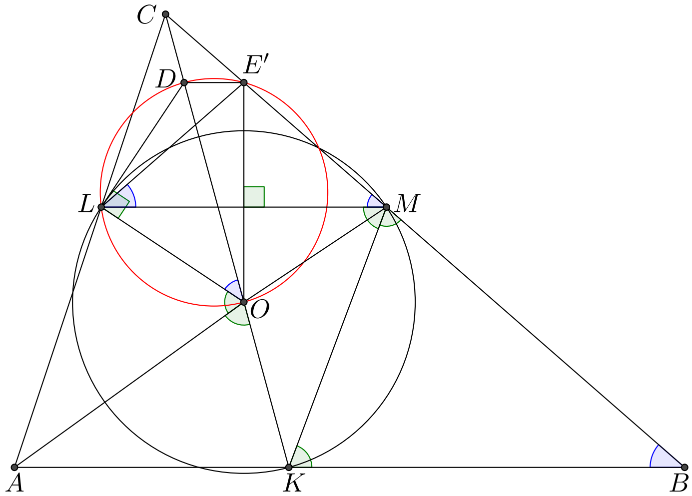
Следовательно,

$$\sqrt[4]{a^2(a+b)}+\sqrt[4]{b^2(b+c)}+\sqrt[4]{c^2(c+d)}+\sqrt[4]{d^2(d+a)}\leqslant\sqrt{4\cdot 4\sqrt{2}}=4\sqrt[4]{2}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

4. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K, а на сторонах AC и BC выбраны соответственно такие точки L и M, что $AK = AL$ и $BK = BM$. Оказалось, что прямые LM и AB параллельны. Касательная в точке L к описанной окружности треугольника KLM пересекает отрезок CK в точке D, а проходящая через D прямая, параллельная стороне AB, пересекает сторону BC в точке E. Найдите угол $\angle DEO$, где O — центр описанной окружности треугольника KLM.

Ответ: $\angle DEO = 90°$



Первое решение. По условию $OK = OL = OM$ и треугольники AKO и ALO равны по трем сторонам, значит, $\angle AOK = \angle AOL = \angle KML$, последнее поскольку $\angle KML$ — вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, что и центральный угол $\angle KOL$. Из параллельности прямых AB и LM и равнобедренности треугольника KBM следует, что $\angle KML = \angle MKB = \angle KMB$. Таким образом,

$$\angle KOL = 2\angle AOK = 2\angle KML = \angle KML + \angle KMB = \angle BML = 180° - \angle CML = 180° - \angle B.$$

Аналогично $\angle KOM = 180° - \angle A$. Следовательно,

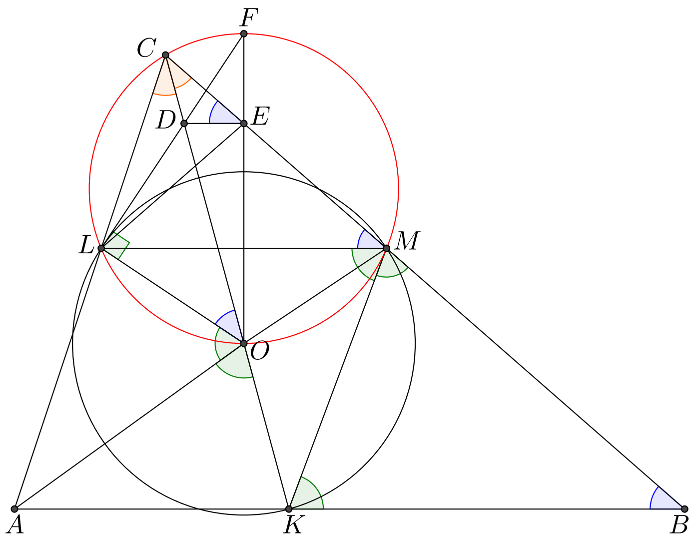
$$\angle LOM = 360° - \angle KOL - \angle KOM = \angle A + \angle B = 180° - \angle C.$$

Стало быть, четырехугольник $CLOM$ вписанный и $\angle COL = \angle CML$. Таким образом,

$$\angle COK = \angle COL + \angle KOL = \angle CML + (180° - \angle CML) = 180°$$

и, значит, точка O лежит на прямой CK.

Пусть E' — точка пересечения высоты равнобедренного треугольника LOM с прямой BC. Тогда она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку LM и, в частности, $\angle E'LM = \angle E'ML = \angle B$. Следовательно, $\angle LE'O = 90° - \angle B$. С другой стороны $\angle LDO = 90° - \angle LOD = 90° - \angle B$. Таким образом, четырехугольник $OLDE'$ является вписанным, значит, $\angle DE'O = 180° - \angle DLO = 90°$. Таким образом, DE' параллельно LM и поэтому точки E и E' совпадают.



Второе решение. По условию треугольники KAL и KBM равнобедренные, значит, серединные перпендикуляры к отрезкам KL и KM, точкой пересечения которых является точка O, являются биссектрисами углов $\angle A$ и $\angle B$. Следовательно, точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC и, значит, CO — биссектриса угла $\angle C$. Из параллельности прямых AB и LM и равнобедренности треугольника KBM следует, что $\angle KML = \angle MKB = \angle KMB$. Поэтому MK – биссектриса внешнего угла треугольника CLM. Аналогично LK также является биссектрисой внешнего угла треугольника CLM. Следовательно, K — центр вневписанной окружности треугольника CLM. Поэтому точка K лежит и на биссектрисе угла $\angle LCM$, т. е. на прямой CO.

Поскольку $\angle KOL$ центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный угол $\angle KML$, $\angle KOL = 2\angle KML$. Следовательно,

$$\angle COL = 180^\circ - \angle KOL = 180^\circ - 2\angle KML = 180^\circ - \angle BML = \angle CML.$$

Таким образом, треугольники CLO и CDE подобны по двум углам. Стало быть, $\frac{CO}{CE} = \frac{CL}{CD}$, а тогда треугольники CLD и COE подобны по углам и отношениям прилежащих к ним сторонам. Сделаем поворотную гомотетию на угол $\angle ACO$ с центром в точке C, при которой точка O переходит в точку L. Тогда треугольник COE перейдет в треугольник CLD и, в частности, прямая OE перейдет в прямую LD. Следовательно, угол между этими прямыми равен $\angle ACO$. Обозначим их точку пересечения через F, тогда $\angle LFO = \angle LCO$ и, значит, четырехугольник $CLOF$ вписанный. Следовательно, $\angle FCO = \angle FLO = 90^\circ$. Аналогично, $\angle DCE = \angle DFE$ и, значит, четырехугольник $CDEF$ вписанный. Поэтому $\angle DEF = \angle DCF = 90^\circ$ и, значит, $\angle DEF = 90^\circ$.

5. За круглым столом сидит $n-1$ школьник ($n \geqslant 4$). У учителя есть n карточек, на них написаны числа 1, 2, 3, …, n, каждое по одному разу. Он раздал каждому школьнику по одной карточке и одну карточку оставил себе. Для каждой пары сидящих рядом школьников посчитали сумму чисел на их карточках и записали на доске, потом на доску дописали сумму чисел на карточке у учителя и одного из школьников. При каких n выписанные на доску n чисел могли давать различные остатки от деления на n?

Ответ: при четных n

Решение. Поскольку мы интересуемся исключительно остатками от деления на n, для удобства заменим карточку с числом n на карточку с числом 0. Предположим, что существует подходящий способ раздать карточки. Занумеруем школьников по кругу числами от 0 до $n-2$ (начиная со школьника, число которого суммируется с числом учителя) и обозначим через a_k число, которое написано на карточке k-го школьника, а число учителя пусть будет a_{n-1}. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}.$$

С другой стороны суммы

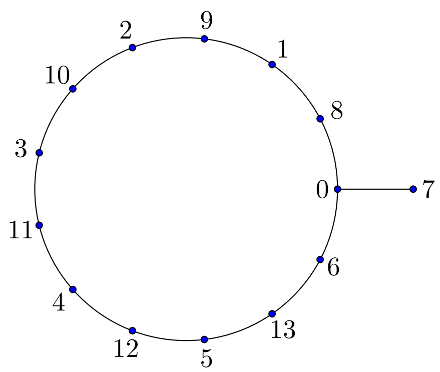
$$a_{n-1}+a_0, \quad a_0+a_1, \quad a_1+a_2, \quad a_2+a_3, \ \ldots, \ a_{n-3}+a_{n-2}, \quad a_{n-2}+a_0$$

дают различные остатки от деления на $n+1$, поэтому их остатки — это числа $0, 1, \ldots, n$, выписанные в некотором порядке. Следовательно,

$$(a_{n-1}+a_0)+(a_0+a_1)+(a_1+a_2)+\ldots+(a_{n-3}+a_{n-2})+(a_{n-2}+a_0) = \\ = (a_0-a_{n-1})+2\sum_{k=0}^{n-1} a_k = (a_0-a_{n-1})+(n-1)n \qquad (*)$$

дает тот же остаток от деления на n, что и сумма $0+1+2+\ldots+(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n$. Если $n-1$ — четное число, то $\frac{1}{2}(n-1)n$ делится на n, поэтому сумма $(*)$ также должна делиться на n. Но в этом случае числа a_0 и a_{n-1} дают одинаковые остатки от деления на n, что невозможно. Следовательно, n — четно. Если же $n=2k$, то числа a_0 и a_{n-1} должны давать одинаковые остатки от деления на k.

Предъявим удовлетворяющую условию раздачу карточек для $n=2k$. Учитель оставит себе карточку с числом k, т. е. $a_{2k-1}=k$, а ученику с карточкой которого будет суммироваться k, выдаст карточку с числом 0. Карточки с числами от 1 до $k-1$ раздадим в порядке возрастания чисел двигаясь по часовой стрелке через одного школьника. Таким образом, $a_0=0$, $a_2=1$, $a_4=2$, $\ldots$, $a_{2k-2}=k-1$. Карточки с числами от $k+1$ до $2k-1$ раздадим в порядке возрастания чисел продолжая двигаться по часовой стрелке через одного школьника. Таким образом, $a_1=k+1$, $a_3=k+2$, $a_5=k+3$, $\ldots$, $a_{2k-3}=2k-1$. Пример раздачи карточек для $n=14$ и $k=7$ показан на рисунке.

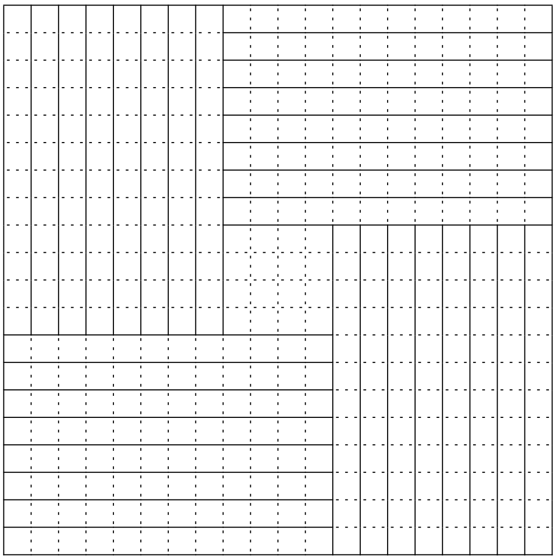


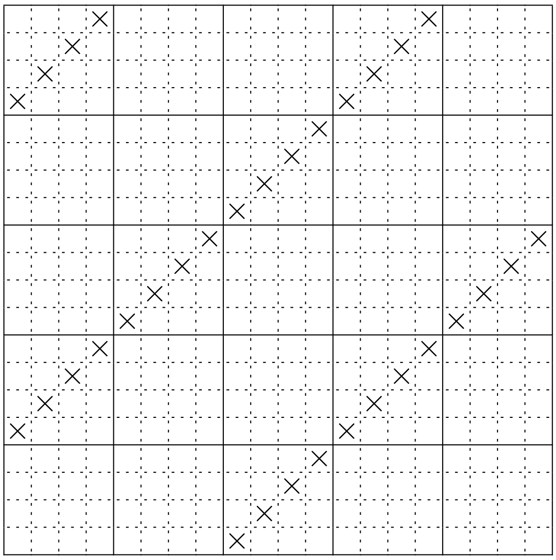
10–11 класс. Четвертый вариант

1. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице 20×20 так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске 1×12 была хотя бы одна отмеченная клетка.

Ответ: 32

Решение. Разрежем таблицу 20×20 без центрального квадрата 4×4 на 32 прямоугольника 1×12 (см. левый рисунок). Следовательно, придется отметить не менее 32 клеток. Пример на 32 клетки: отмечены все клетки трех параллельных диагоналей длин 4, 16 и 12 (см. правый рисунок).





2. Найдите все такие тройки простых чисел p, q и r, что $\dfrac{p}{q} = \dfrac{8}{r-1} + 1$.

Ответ: $(7, 3, 7)$; $(5, 3, 13)$; $(3, 2, 17)$.

Первое решение. Перепишем соотношение в виде

$$8q = (p-q)(r-1). \qquad (*)$$

Если $q = 2$, то оно принимает вид $16 = (p-2)(r-1)$. Тогда $p-2$ является степенью двойки и, значит, $p = 3$ и $r = 17$. Если $r = 2$, то то соотношение $(*)$ принимает вид $8q = p - q$, откуда $p = 9q$, что невозможно. Будем дальше считать, что q и r — нечетные простые числа. Но тогда простое число p также нечетно, поскольку иначе левая часть $(*)$ отрицательна. Следовательно, $r-1$ и $p-q$ — четные числа, поэтому $p-q = 2$ и $r-1 = 4q$ или $p-q = 4$ и $r-1 = 2q$. Если $q = 3$, то в первом случае $p = 5$ и $r = 13$, а во втором случае $p = r = 7$. Таким образом, можно считать, что $q > 3$. Рассмотрим первый случай. Поскольку p и q не делятся на 3 и $p = q+2$, q имеет вид $3k+2$, но тогда $r = 4q+1 = 12k+9$, что невозможно. Рассмотрим второй случай. Поскольку p и q не делятся на 3 и $p = q+4$, q имеет вид $3k+1$, но тогда $r = 2q+1 = 6k+3$, что также невозможно.

Второе решение. Из условия следует, что $p > q$. Домножим на знаменатели и перепишем соотношение в виде $7q + p = (p-q)r$. Отсюда, в частности, получаем, что $7q+p$ делится на $p-q$. Следовательно, $8q = (7q+p) - (p-q)$ также делится на $p-q$. С другой стороны $8p = (7q+p) + 7(p-q)$ также делится на $p-q$. Таким образом, на $p-q$ делится и наибольший общий делитель чисел $8p$ и $8q$, но этот делитель равен 8. Стало быть возможны лишь три случая: $p-q = 1$, $p-q = 2$, $p-q = 4$ и $p-q = 8$. Отметим сразу, что в последних трех случаях $p \geqslant q+2 \geqslant 4$ и, в частности, p не делится на три.

Первый случай возможен только когда $p = 3$ и $q = 2$, а тогда $r = 17$ и это первое решение.

Во втором случае $p-q=2$ и тогда $r=\frac{1}{2}(7q+p)=4q+1=4p-7$. Если r дает остаток 2 от деления на три, то p будет кратно трем, что невозможно. Если r дает остаток 1 от деления на три, то q будет кратно трем и, значит, $q=3$, $p=5$ и $r=5$, что дает второе решение.

В третьем случае $p-q=4$ и тогда $r=\frac{1}{4}(7q+p)=2q+1=2p-7$. Если r дает остаток 2 от деления на три, то p будет кратно трем, что невозможно. Если r дает остаток 1 от деления на три, то q будет кратно трем и, значит, $q=3$, $p=7$ и $r=7$, что является третьим решением.

В четвертом случае $p-q=8$ и тогда $r=\frac{1}{8}(7q+p)=q+1=p-7$. Если r дает остаток 2 от деления на три, то p будет кратно трем, что невозможно. Если r дает остаток 1 от деления на три, то q будет кратно трем и, значит, $q=3$ и $r=4$, что невозможно.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не превосходит 4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt[4]{2a^2+a^2b}+\sqrt[4]{2b^2+b^2c}+\sqrt[4]{2c^2+c^2d}+\sqrt[4]{2d^2+d^2a}.$$

Ответ: $4\sqrt[4]{3}$

Первое решение. По неравенству о средних для четырех чисел имеем

$$\sqrt[4]{2a^2+a^2b}=\frac{\sqrt[4]{3a\cdot 3a\cdot(2+b)\cdot 3}}{\sqrt[4]{27}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\cdot\frac{3a+3a+(2+b)+3}{4}=\frac{6a+b+5}{4\sqrt[4]{27}}.$$

Просуммируем это неравенство с тремя аналогичными и получим, что

$$\begin{aligned}&\sqrt[4]{2a^2+a^2b}+\sqrt[4]{2b^2+b^2c}+\sqrt[4]{2c^2+c^2d}+\sqrt[4]{2d^2+d^2a}\leqslant\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\Big(\frac{6a+b+5}{4}+\frac{6b+c+5}{4}+\frac{6c+d+5}{4}+\frac{6d+a+5}{4}\Big)=\\&=\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\cdot\frac{7(a+b+c+d)+20}{4}\leqslant\frac{12}{\sqrt[4]{27}}=4\sqrt[4]{3}.\end{aligned}$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Второе решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ и $\sqrt[4]{2+b}$, $\sqrt[4]{2+c}$, $\sqrt[4]{2+d}$, $\sqrt[4]{2+a}$ имеем

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt[4]{2a^2+a^2b}+\sqrt[4]{2b^2+b^2c}+\sqrt[4]{2c^2+c^2d}+\sqrt[4]{2d^2+d^2a}\big)^2\leqslant\\&\leqslant(a+b+c+d)\big(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d}\big)\leqslant 4\big(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d}\big).\end{aligned}$$

А по неравенству Коши–Буняковского для наборов $\sqrt{2+a}$, $\sqrt{2+b}$, $\sqrt{2+c}$, $\sqrt{2+d}$ и 1, 1, 1, 1 имеем

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d}\big)^2\leqslant\\&\leqslant\big((2+a)+(2+b)+(2+c)+(2+d)\big)(1+1+1+1)=4(a+b+c+d+8)\leqslant 48,\end{aligned}$$

поэтому $\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d}\leqslant 4\sqrt{3}$. Таким образом,

$$\sqrt[4]{2a^2+a^2b}+\sqrt[4]{2b^2+b^2c}+\sqrt[4]{2c^2+c^2d}+\sqrt[4]{2d^2+d^2a}\leqslant\sqrt{4\cdot 4\sqrt{3}}=4\sqrt[4]{3}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Третье решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ и $\sqrt[4]{2+b}$, $\sqrt[4]{2+c}$, $\sqrt[4]{2+d}$, $\sqrt[4]{2+a}$ имеем

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt[4]{2a^2+a^2b}+\sqrt[4]{2b^2+b^2c}+\sqrt[4]{2c^2+c^2d}+\sqrt[4]{2d^2+d^2a}\big)^2\leqslant\\&\leqslant(a+b+c+d)\big(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d}\big)\leqslant 4\big(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d}\big).\end{aligned}$$

По неравенству о средних для двух чисел $\sqrt{3}\sqrt{2+x} = \sqrt{3(2+x)} \leqslant \frac{1}{2}(2+x+3) = \frac{1}{2}(x+5)$, поэтому

$$\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d} \leqslant \frac{a+5}{2\sqrt{3}}+\frac{b+5}{2\sqrt{3}}+\frac{c+5}{2\sqrt{3}}+\frac{d+5}{2\sqrt{3}} = \\ = \frac{(a+b+c+d)+20}{2\sqrt{3}} \leqslant 4\sqrt{3}.$$

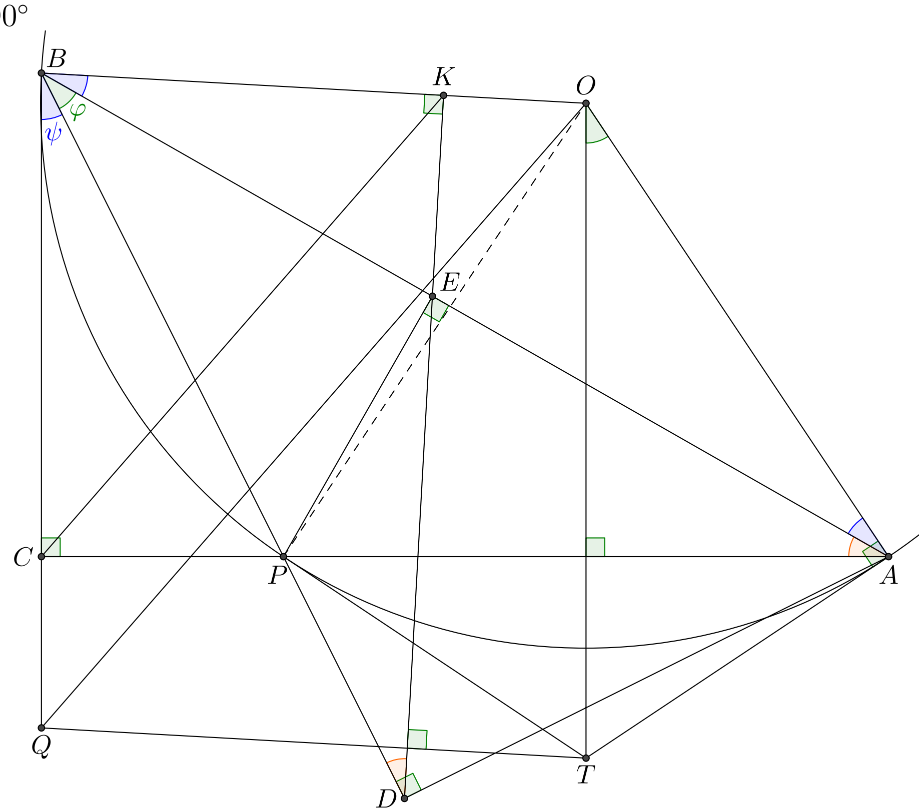
Следовательно,

$$\sqrt[4]{2a^2+a^2b}+\sqrt[4]{2b^2+b^2c}+\sqrt[4]{2c^2+c^2d}+\sqrt[4]{2d^2+d^2a} \leqslant \sqrt{4\cdot 4\sqrt{3}} = 4\sqrt[4]{3}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

4. На катете AC прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB отмечена точка P. Точка D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую BP, а точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону AB. На плоскости выбрана такая точка T, что прямые TA и TP являются касательными к описанной окружности треугольника PAB, точка O — центр этой окружности. Перпендикуляр, опущенный из точки T на прямую DE, пересекает прямую BC в точке Q, а проходящая через точку C параллельная OQ прямая пересекает отрезок BO в точке K. Найдите угол $\angle OKE$.

Ответ: $90°$



Решение. Положим $\angle ABP = \varphi$ и $\angle CBP = \psi$. Треугольники AOT и POT равны по трем сторонам, а вписанный угол $\angle ABP$ опирается на ту же дугу, что и центральный угол $\angle AOP$, поэтому $\gamma = \angle ABP = \frac{1}{2}\angle AOP = \angle AOT$. Следовательно, $\frac{OA}{OT} = \cos\varphi$. Центральный угол $\angle AOB$ опирается на меньшую дугу AB, а вписанный угол $\angle APB$ опирается на большую дугу AB, поэтому $\angle APB + \frac{1}{2}\angle AOB = 180°$. Из равнобедренности треугольника AOB следует, что

$$\angle ABO = 90° - \frac{1}{2}\angle AOB = 90° - (180° - \angle APB) = \angle APB - 90° = \angle PBC = \psi.$$

Поскольку $\angle ADP = 90^\circ = \angle AEP$, четырехугольник $ADPE$ вписанный, в частности, $\angle EAP = \angle EDP = \angle BDE$. Следовательно,

$$\angle BDE + \angle DBO = \angle BDE + \angle DBA + \angle ABO = \angle EAP + \angle AOT + \angle BAO = 90^\circ$$

и, значит, прямые DE и BO перпендикулярны, а прямые BO и QT параллельны. Точки O и T лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AP, поэтому прямые AP и OT перпендикулярны. Следовательно, прямые BC и OT параллельны и четырехугольник $BOTQ$ является параллелограммом, в частности, $BQ = OT$. По теореме Фалеса для параллельных прямых CK и OQ имеем $\frac{BK}{BC} = \frac{BO}{BQ} = \frac{OA}{OT} = \cos\varphi$. Стало быть,

$$BK = BC\cos\varphi = BP\cos\psi\cos\varphi = BE\cos\psi = BE\cos\angle EBK.$$

Таким образом, точка K — основание перпендикуляра, опущенного из E на прямую BO, значит, $\angle BKE = 90^\circ$.

5. В математическом кружке занимается m мальчиков и n девочек. У преподавателя есть mn карточек, на них написаны числа 1, 2, 3, $\ldots$, mn, каждое по одному разу. Он раздает кружковцам по одной карточке (пока не закончатся карточки или кружковцы). В итоге у каждого кружковца на руках будет одна карточка или ни одной, если кому-то не хватило карточки. Для каждой пары мальчик–девочка посчитали сумму чисел на их карточках и выписали ее доску. При каких m и n числа на доске могут давать различные остатки от деления на mn?

Ответ: при $n = 1$ или при $m = 1$

Решение. Можно считать, что $m \leqslant n$. Если $m = 1$, то надо всем девочкам выдать по карточке, тогда мальчику ничего не достанется и такая раздача карточек удовлетворяет условию.

Пусть $m \geqslant 2$. В этом случае $mn \geqslant m + n$, поэтому каждый кружковец получит ровно одну карточку. Предположим, что существует требуемая раздача карточек. Пусть девочки получили карточки с числами a_1, a_2, $\ldots$, a_n, а мальчики получили карточки с числами b_1, b_2, $\ldots$, b_m, причем все эти числа различны. Поскольку суммы вида $a_i + b_j$ дают различные остатки от деления на mn и этих сумм в точности mn штук, они по одному разу дают всевозможные остатки от деления на mn. Заметим, что разности $a_i - b_j$ дают различные остатки от деления на mn и, значит, они дают всевозможные остатки от деления на mn. Действительно, если для каких-то индексов разности $a_i - b_j$ и $a_k - b_\ell$ дают одинаковые остатки от деления на mn, то $(a_i - b_j) - (a_k - b_\ell) = (a_i + b_\ell) - (a_k + b_j)$ делится на mn и, значит, суммы $a_i + b_\ell$ и $a_k + b_j$ дают одинаковые остатки от деления на mn, что невозможно. Итак, разности $a_i - b_j$ дают дают всевозможные остатки от деления на mn, но тогда среди этих остатков встречается ноль и, значит, для некоторых индексов $a_i = b_j$. Противоречие.

10–11 класс. Пятый вариант

1. В каждой клетке таблицы $n \times n$ записано целое число. Оказалось, что для всех k от 1 до n сумма чисел, стоящих в k-ом столбце, либо на один меньше, либо на два больше суммы чисел, стоящих в k-й строке. При каких n такое возможно?

Ответ: при n, делящихся на три

Решение. Пусть количество строк, сумма чисел в которых на один меньше, чем в столбцах с тем же номером, равно m. Тогда количество строк, сумма чисел в которых на два больше, чем в столбцах с тем же номером, равно $n - m$. Следовательно, сумма всех чисел, подсчитанная по строкам, на $2(n-m)-m$ отличается от суммы чисел, подсчитанной по столбцам. Стало быть, $2n = 3m$ и, значит, n делится на три.

Приведем пример нужной расстановки для n делящихся на три. При k от 1 до $n/3$ поставим единицы клетках, расположенных в пересечении строк с номерами $2k-1$ и $2k$ со столбцом с номером $n-k+1$, а остальные клетки заполним нулями. Описанная расстановка чисел для $n = 9$ приведена на рисунке, в пустых клетках стоят нули.

								1
								1
							1	
							1	
						1		
						1		

2. Найдите все тройки натуральных чисел a, b и c, для которых числа a^2+1 и b^2+1 — простые и $(a^2+1)(b^2+1) = c^2+1$.

Ответ: $(1,2,3)$ и $(2,1,3)$.

Решение. Можно считать, что $a \geqslant b$. Тогда $c^2+1 = (a^2+1)(b^2+1) \leqslant (a^2+1)^2$, поэтому $c^2 < (a^2+1)^2$ и, значит, $c < a^2+1$. С другой стороны,

$$(c+a)(c-a) = (c^2+1) - (a^2+1) = b^2(a^2+1)$$

делится на a^2+1. Но $c - a < a^2+1$ и $c + a < 2(a^2+1)$, следовательно, $c + a = a^2+1$ и $c - a = b^2$. Поскольку $a = b = 1$ не удовлетворяют условиям задачи, простое число a^2+1 является нечетным. Таким образом, $c = a^2 - a + 1$ также нечетно и, значит, число c^2+1 четно. Но оно является произведением двух простых чисел a^2+1 и b^2+1, поэтому $b^2+1 = 2$ и $b = 1$. Стало быть, $c - a = 1$, откуда $a + 1 = c = a^2 - a + 1$ и, значит, $a = 2$. Легко видеть, что тройка $a = 2$, $b = 1$ и $c = 3$ удовлетворяет условию задачи.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не меньше 8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} + \frac{b^4}{(b+c)(b+d)(b+a)} + \frac{c^4}{(c+d)(c+a)(c+b)} + \frac{d^4}{(d+a)(d+b)(d+c)}.$$

Ответ: 1

Первое решение. По неравенству о средних для четырех чисел имеем

$$\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} + \frac{a+b}{16} + \frac{a+c}{16} + \frac{a+d}{16} \geqslant$$
$$\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} \cdot \frac{a+b}{16} \cdot \frac{a+c}{16} \cdot \frac{a+d}{16}} = \frac{a}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} \geqslant \frac{a}{2} - \Big(\frac{a+b}{16} + \frac{a+c}{16} + \frac{a+d}{16}\Big) = \frac{5a}{16} - \frac{b+c+d}{16}.$$

Просуммируем это неравенство с тремя аналогичными и получим, что

$$\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} + \frac{b^4}{(b+c)(b+d)(b+a)} + \frac{c^4}{(c+d)(c+a)(c+b)} + \frac{d^4}{(d+a)(d+b)(d+c)} \geqslant$$
$$\geqslant \Big(\frac{5a}{16} - \frac{b+c+d}{16}\Big) + \Big(\frac{5b}{16} - \frac{c+d+a}{16}\Big) + \Big(\frac{5c}{16} - \frac{d+a+b}{16}\Big) + \Big(\frac{5d}{16} - \frac{a+b+c}{16}\Big) =$$
$$= \frac{2(a+b+c+d)}{16} \geqslant 1.$$

Если $a = b = c = d = 2$, то сумма дробей из условия задачи равна 1, поэтому наименьшее значение выражения равно 1.

Второе решение. Положим для краткости

$$K = \frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} + \frac{b^4}{(b+c)(b+d)(b+a)} + \frac{c^4}{(c+d)(c+a)(c+b)} + \frac{d^4}{(d+a)(d+b)(d+c)}$$

По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел

$$\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)},\quad \frac{b^4}{(b+c)(b+d)(b+a)},\quad \frac{c^4}{(c+d)(c+a)(c+b)},\quad \frac{d^4}{(d+a)(d+b)(d+c)} \quad \text{и}$$
$$a+d,\quad b+a,\quad c+b,\quad d+c$$

имеем

$$\big(2(a+b+c+d)\big)K = \big((a+d)+(b+a)+(c+b)+(d+c)\big)K \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{a^2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(b+c)(b+d)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(c+d)(c+a)}} + \frac{d^2}{\sqrt{(d+a)(d+b)}}\right)^2$$

Обозначим последнее выражение в скобках через L и оценим его по неравенству Коши–Буняковского для наборов

$$\frac{a^2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}},\quad \frac{b^2}{\sqrt{(b+c)(b+d)}},\quad \frac{c^2}{\sqrt{(c+d)(c+a)}},\quad \frac{d^2}{\sqrt{(d+a)(d+b)}} \quad \text{и}$$
$$\sqrt{(a+b)(a+c)},\quad \sqrt{(b+c)(b+d)},\quad \sqrt{(c+d)(c+a)},\quad \sqrt{(d+a)(d+b)}.$$

Тогда $LM \geqslant (a+b+c+d)^2$, где

$$M = \sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(b+c)(b+d)} + \sqrt{(c+d)(c+a)} + \sqrt{(d+a)(d+b)}$$

Таким образом,

$$K \geqslant \frac{L^2}{2(a+b+c+d)} \geqslant \frac{(a+b+c+d)^4}{2(a+b+c+d)M^2} = \frac{(a+b+c+d)^3}{2M^2}.$$

Наконец, по неравенству о средних для двух чисел $\sqrt{(x+y)(x+z)} \leqslant \frac{(x+y)+(x+z)}{2}$, поэтому

$$M \leqslant \frac{2a+b+c}{2} + \frac{2b+c+d}{2} + \frac{2c+d+a}{2} + \frac{2d+a+b}{2} = 2(a+b+c+d).$$

Стало быть,

$$K \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b+c+d)^3}{\big(2(a+b+c+d)\big)^2} = \frac{a+b+c+d}{8} \geqslant 1.$$

Если $a = b = c = d = 2$, то $K = 1$, поэтому наименьшее значение K равно 1.

Третье решение. Положим для краткости

$$K = \frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} + \frac{b^4}{(b+c)(b+d)(b+a)} + \frac{c^4}{(c+d)(c+a)(c+b)} + \frac{d^4}{(d+a)(d+b)(d+c)}$$

По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел

$$\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)},\ \frac{b^4}{(b+c)(b+d)(b+a)},\ \frac{c^4}{(c+d)(c+a)(c+b)},\ \frac{d^4}{(d+a)(d+b)(d+c)} \text{ и}$$
$$(a+c)(a+d),\quad (b+d)(b+a),\quad (c+a)(c+b),\quad (d+b)(d+c)$$

имеем

$$(a+b+c+d)^2K = \big((a+c)(a+d)+(b+d)(b+a)+(c+a)(c+b)+(d+b)(d+c)\big)K \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{a^2}{\sqrt{a+b}} + \frac{b^2}{\sqrt{b+c}} + \frac{c^2}{\sqrt{c+d}} + \frac{d^2}{\sqrt{d+a}}\right)^2$$

Обозначим последнее выражение в скобках через L и оценим его по неравенству Коши–Буняковского для наборов

$$\frac{a^2}{\sqrt{a+b}},\quad \frac{b^2}{\sqrt{b+c}},\quad \frac{c^2}{\sqrt{c+d}},\quad \frac{d^2}{\sqrt{d+a}} \quad \text{и} \quad \sqrt{a+b},\quad \sqrt{b+c},\quad \sqrt{c+d},\quad \sqrt{d+a}.$$

Тогда $LM \geqslant (a+b+c+d)^2$, где $M = \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}$. Таким образом,

$$K \geqslant \frac{L^2}{(a+b+c+d)^2} \geqslant \frac{1}{(a+b+c+d)^2}\cdot\frac{(a+b+c+d)^4}{M^2} = \left(\frac{a+b+c+d}{M}\right)^2.$$

По неравенству о средних для двух чисел $2\sqrt{x+y} \leqslant \frac{x+y+4}{2}$, поэтому

$$M \leqslant \frac{a+b+4}{4} + \frac{b+c+4}{4} + \frac{c+d+4}{4} + \frac{d+a+4}{4} = \frac{2s+16}{4},$$

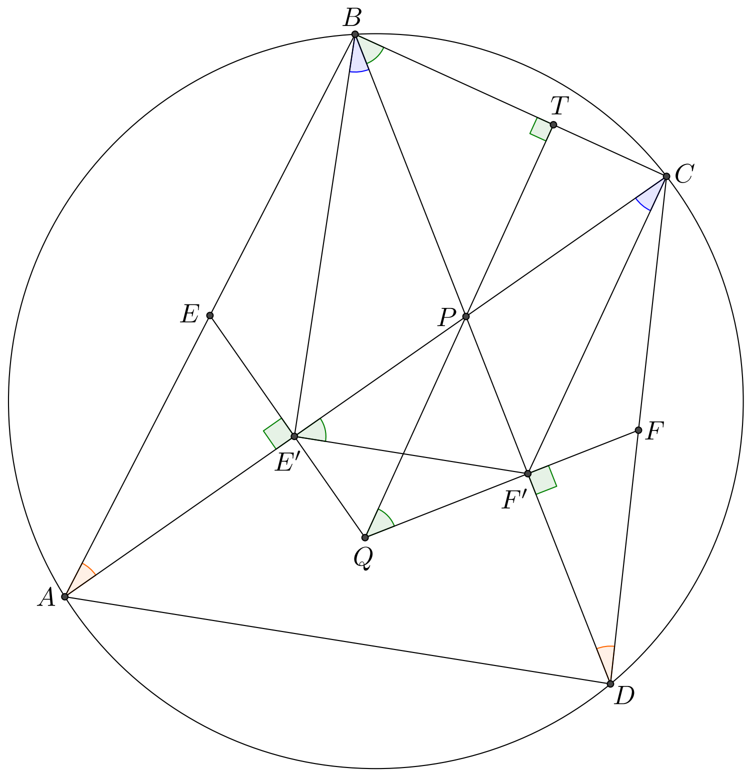
где $s = a+b+c+d \geqslant 8$. Итак, мы доказали, что

$$K \geqslant \left(\frac{s}{M}\right)^2 \geqslant \left(\frac{4s}{2s+16}\right)^2.$$

Осталось заметить, что $4s = 2s+2s \geqslant 2s+16$, поэтому последнее выражение не меньше 1. Если же $a=b=c=d=2$, то $K=1$, поэтому наименьшее значение K равно 1.

4. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, причем треугольник APD — остроугольный. Точки E и F — середины сторон AB и CD соответственно. Из точки E провели перпендикуляр к прямой AC, а из точки F провели перпендикуляр к прямой BD, эти перпендикуляры пересеклись в точке Q. Найдите угол между прямыми PQ и BC.

Ответ: 90°

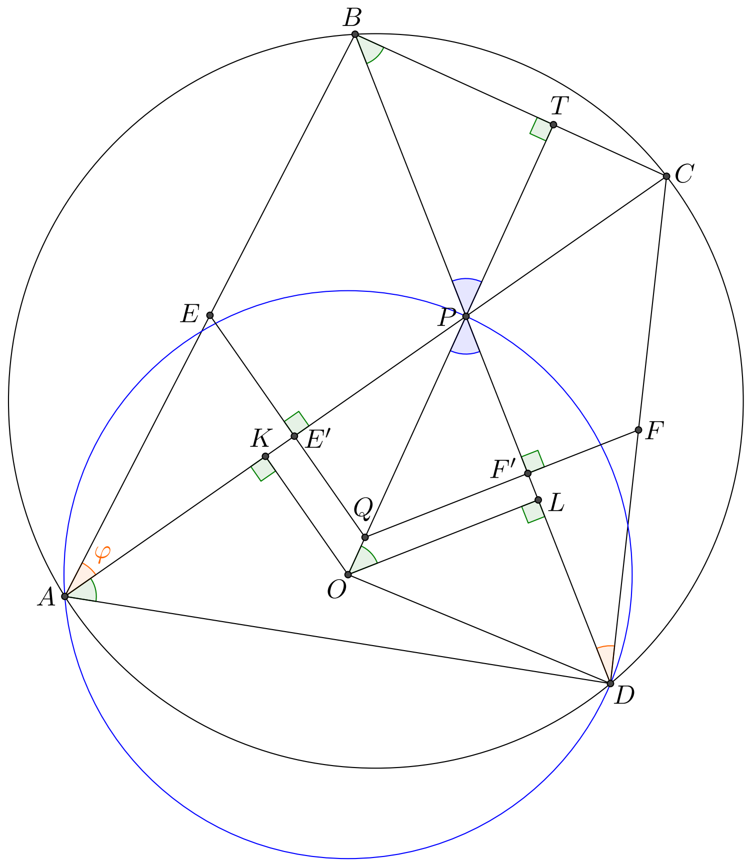


Первое решение. Пусть E' и F' — точки пересечения EQ с AP и FQ с DP соответственно, а T — точка пересечения прямых PQ и BC. Поскольку углы $\angle BAC$ и $\angle BDC$ опираются на одну дугу, они равны. Следовательно, прямоугольные треугольники $AE'E$ и $BF'F$ подобны. Тогда, $\frac{EE'}{FF'} = \frac{AE}{DF} = \frac{BE}{CF}$, последнее поскольку точки E и F — середины отрезков AB и CD. Кроме того $\angle BEE' = \angle CFF'$, поэтому треугольники BEE' и CFF' подобны и, в частности, $\angle ABE' = \angle DCF'$. Углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ опираются на одну дугу и поэтому равны. Таким образом, $\angle E'BF' = \angle ABD - \angle ABE' = \angle ACD - \angle DCF' = \angle E'CF'$. Следовательно, четырехугольник $BE'F'C$ вписанный и

$$\angle PBT = \angle CBF' = \angle CE'F' = \angle PEF' = \angle PQF'$$

(последнее равенство углов следует из вписанности четырехугольника $PE'QF'$). Осталось посчитать углы:

$$\angle PTB = 180^\circ - \angle PBT - \angle BPT = 180^\circ - \angle PQF' - \angle QPF' = 90^\circ.$$



Второе решение. Пусть E' и F' — точки пересечения EQ с AP и FQ с DP соответственно, точки K и L — середины отрезков AP и DP, а T — точка пересечения прямых PQ и BC. Пусть O — центр описанной окружности треугольника APD, тогда OK и OL — серединные перпендикуляры к отрезкам AP и DP соответственно. Положим для краткости $\angle BAP = \varphi$. Тогда $\angle CDP = \varphi$, поскольку углы $\angle BAP$ и $\angle CDP$ опираются на одну дугу. Следовательно, треугольники BAP и CDP подобны по двум углам и, значит,

$$\frac{AP}{DP} = \frac{AB}{CD} = \frac{AE}{DF} = \frac{AE\cos\varphi}{DF\cos\varphi} = \frac{AE'}{DF'}.$$

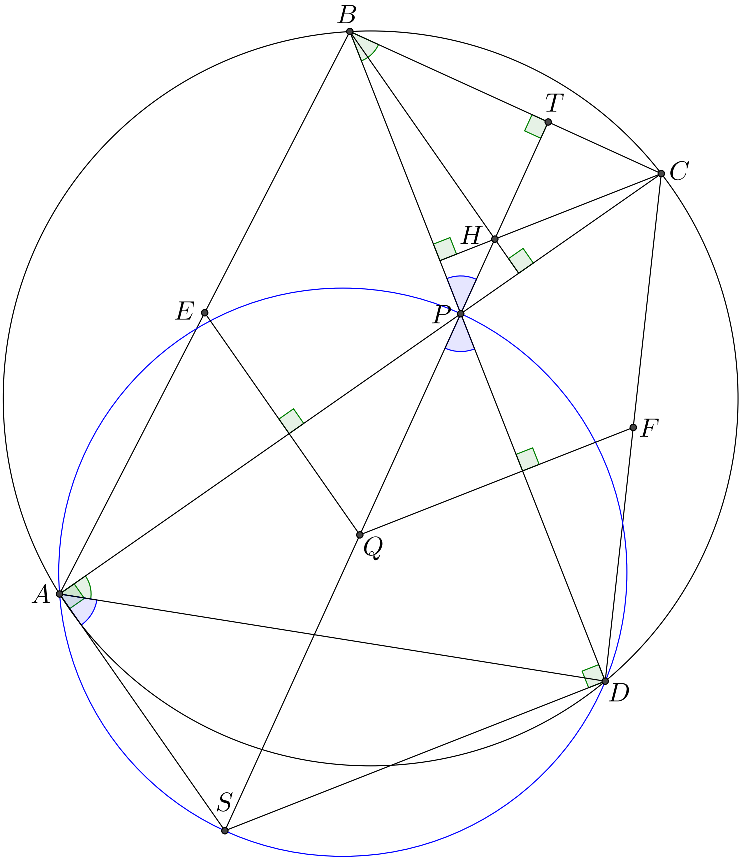
Таким образом,

$$\frac{PE'}{PF'} = \frac{AP - AE'}{DP - DF'} = \frac{AP}{DP} = \frac{PK}{PL}.$$

Пусть прямые KO и PQ пересекаются в точке K', а прямые LO и PQ пересекаются в точке L'. Тогда треугольники $PE'Q$ и PKK' подобны с коэффициентом $\frac{PE'}{PK} = \frac{PF'}{PL}$, с таким же коэффициентом подобия подобны и треугольники $PF'Q$ и PLL'. Следовательно, $PK' = PL'$ и, значит, точки K', L' и O совпадают. Таким образом, прямая PQ проходит через точку O. Осталось посчитать углы:

$$\angle PTB = 180^\circ - \angle CBD - \angle BPT = 180^\circ - \angle CAD - \angle OPD = 180^\circ - \angle POL - \angle OPD = 90^\circ.$$

В предпоследнем равенстве использовалось то, что центральный угол $\angle POD$ с одной стороны равен удвоенному вписанному углу $\angle CAD$, а с другой стороны равен удвоенному углу $\angle POL$.



Третье решение. Проведем из точки P прямую ℓ, перпендикулярную стороне BC, пусть T — ее точка пересечения с BC. Через точки A и D проведем прямые, перпендикулярные к диагоналям AC и BD соответственно. Пусть S их точка пересечения. Поскольку $\angle PAS = 90^\circ = \angle PDS$, точки A, P, D и S лежат на окружности с диаметром PS. Тогда (равенство $\angle DAP = \angle DBC$ следует из вписанности четырехугольника $ABCD$)

$$\angle DPS = \angle DAS = 90^\circ - \angle DAP = 90^\circ - \angle DBC = \angle BPT.$$

Следовательно, точка S лежит на прямой ℓ.

Пусть H — точка пересечения высот треугольника PBC. Ясно, что она также лежит на прямой ℓ. Тогда прямые AS, BH и EQ параллельны, и поскольку $AE = EB$, прямая EQ является средней линией трапеции $ABHS$. Следовательно, EQ пересекает прямую ℓ в середине отрезка SH. Аналогично прямая FQ также пересекает прямую ℓ в середине отрезка SH. Но тогда прямые EQ, FQ и ℓ пересекаются в середине отрезка SH и эта точка является точкой Q. Стало быть Q также лежит на прямой ℓ. В частности, прямые PQ и BC пересекаются под прямым углом.

5. В классе $n \geqslant 3$ школьников. У учителя есть $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ карточек, на них написаны числа $1, 2, 3, \ldots, m$, каждое по одному разу. Он раздал каждому школьнику по одной карточке. Для каждой пары школьников посчитали сумму чисел на их карточках и все полученные числа записали на доске. Оказалось, что числа на доске дают различные остатки от деления на m. Докажите, что если m четно, то n является квадратом натурального числа.

Решение. Занумеруем школьников числами от 1 до n. Пусть a_j — число, написанное на карточке у j-го школьника. Тогда все попарные суммы $a_i + a_j$ дают различные остатки от деления на $m = \frac{1}{2}n(n-1)$. Пусть k из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются четными, а $n-k$ чисел нечетными. Тогда среди сумм $a_i + a_j$ нечетными будут в точности те, в которых складываются четное и нечетное числа. Таким образом, нечетных сумм будет в точности $k(n-k)$ штук. Поскольку m четно, это количество должно быть равно $\frac{1}{2}m$. Поэтому

$$2k(n-k) = m = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Тогда k является решением квадратного уравнения

$$4k^2 - 4nk + n(n-1) = 0.$$

Следовательно, его дискриминант

$$(4n)^2 - 4 \cdot 4 \cdot n(n-1) = 16n$$

является точным квадратом. Но тогда число n также является точным квадратом.

10–11 класс. Шестой вариант

1. В каждой клетке таблицы $n \times n$ записано натуральное число. Оказалось, что для всех k от 1 до n сумма чисел, стоящих в k-ом столбце, на единицу отличается от суммы чисел, стоящих в k-й строке. При каких n такое возможно?

Ответ: при четных n

Решение. Если n нечётно, то в таблице сумма всех чисел, подсчитанная по строкам, на нечётное число отличается от суммы чисел, подсчитанной по столбцам. Но это невозможно. В таблице с чётным n можно заполнить двойками верхнюю половину диагонали таблицы, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, а остальные клетки заполнить единицами. Описанная расстановка чисел для $n = 10$ приведена на рисунке.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	2	1	1	1
1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

2. Найдите все тройки натуральных чисел a, b и c, для которых числа $a^2 - 23$ и $b^2 - 23$ — простые и $(a^2 - 23)(b^2 - 23) = c^2 - 23$.

Ответ: $(5, 6, 7)$ и $(6, 5, 7)$.

Решение. Заметим, что $a, b \geqslant 5$. Если $a = b = 5$, то $c^2-23 = (a^2-23)(b^2-23) = 2\cdot 2 = 4$, что невозможно. Поэтому можно считать, что $a \geqslant b$ и $a \geqslant 6$. Тогда

$$c^2 - 23 = (a^2 - 23)(b^2 - 23) \leqslant (a^2 - 23)^2.$$

С другой стороны, $(c + a)(c - a) = (c^2 - 23) - (a^2 - 23)$ делится на $a^2 - 23$. Если $c - a$ делится на $a^2 - 23$, то $c - a \geqslant a^2 - 23$ и $c + a > c - a \geqslant a^2 - 23$, а, значит,

$$(a^2 - 23)^2 < (c + a)(c - a) = (c^2 - 23) - (a^2 - 23) \leqslant (a^2 - 23)^2,$$

что невозможно. Следовательно, $c + a$ делится на $a^2 - 23$. Если $c + a \geqslant 2(a^2 - 23)$, то

$$c \geqslant 2a^2 - a - 46 \geqslant a^2 + 6a - a - 46 = a^2 + 5a - 46 \geqslant a^2 + 5 \cdot 6 - 46 = a^2 - 16$$

и, значит,

$$a^4 - 46a^2 + 529 = (a^2 - 23)^2 \geqslant c^2 - 23 \geqslant (a^2 - 16)^2 - 23 = a^4 - 32a^2 + 233.$$

Таким образом, $296 \geqslant 14a^2 \geqslant 14 \cdot 6^2 = 504$, что невозможно. Следовательно, $c + a = a^2 - 23$ и $c - a = b^2 - 24$. Поскольку $a \geqslant 6$, простое число $a^2 - 23$ не меньше чем 13 и поэтому является нечетным. Таким образом, $c = a^2 - a - 23$ также нечетно и, значит, число $c^2 - 23$ четно. Но оно является произведением двух простых чисел $a^2 - 23$ и $b^2 - 23$, поэтому $b^2 - 23 = 2$ и $b = 5$. Стало быть, $c - a = b^2 - 24 = 1$, откуда $a + 1 = c = a^2 - a - 23$ и, значит, $a = 6$. Легко видеть, что тройка $a = 6$, $b = 5$ и $c = 7$ удовлетворяет условию задачи.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)}+\frac{b^8}{(b^2+c)(b^2+d)(b^2+a)}+\frac{c^8}{(c^2+d)(c^2+a)(c^2+b)}+\frac{d^8}{(d^2+a)(d^2+b)(d^2+c)}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Первое решение. По неравенству о средних для четырех чисел имеем

$$\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)}+\frac{a^2+b}{16}+\frac{a^2+c}{16}+\frac{a^2+d}{16}\geqslant$$
$$\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)}\cdot\frac{a^2+b}{16}\cdot\frac{a^2+c}{16}\cdot\frac{a^2+d}{16}}=\frac{a^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)}\geqslant\frac{a^2}{2}-\Big(\frac{a^2+b}{16}+\frac{a^2+c}{16}+\frac{a^2+d}{16}\Big)=\frac{5a^2}{16}-\frac{b+c+d}{16}.$$

Просуммируем это неравенство с тремя аналогичными и получим, что

$$\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)}+\frac{b^8}{(b^2+c)(b^2+d)(b^2+a)}+\frac{c^8}{(c^2+d)(c^2+a)(c^2+b)}+\frac{d^8}{(d^2+a)(d^2+b)(d^2+c)}\geqslant$$
$$\geqslant\Big(\frac{5a^2}{16}-\frac{b+c+d}{16}\Big)+\Big(\frac{5b^2}{16}-\frac{c+d+a}{16}\Big)+\Big(\frac{5c^2}{16}-\frac{d+a+b}{16}\Big)+\Big(\frac{5d^2}{16}-\frac{a+b+c}{16}\Big)=$$
$$=\frac{5(a^2+b^2+c^2+d^2)}{16}-\frac{3(a+b+c+d)}{16}=\frac{5(a^2+b^2+c^2+d^2)}{16}-\frac{3}{4}\geqslant\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство верно, поскольку $4(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant(a+b+c+d)^2=16$, что проверяется, например, непосредственным раскрытием скобок.

Если $a=b=c=d=1$, то сумма дробей из условия задачи равна $\frac{1}{2}$, поэтому наименьшее значение выражения равно $\frac{1}{2}$.

Второе решение. Положим для краткости

$$K=\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)}+\frac{b^8}{(b^2+c)(b^2+d)(b^2+a)}+\frac{c^8}{(c^2+d)(c^2+a)(c^2+b)}+\frac{d^8}{(d^2+a)(d^2+b)(d^2+c)}$$

По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел

$$\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)},\quad\frac{b^8}{(b^2+c)(b^2+d)(b^2+a)},\quad\frac{c^8}{(c^2+d)(c^2+a)(c^2+b)},\quad\frac{d^8}{(d^2+a)(d^2+b)(d^2+c)}\quad\text{и}$$
$$a^2+d,\quad b^2+a,\quad c^2+b,\quad d^2+c$$

имеем

$$\big(a^2+b^2+c^2+d^2+4\big)K=\big((a^2+d)+(b^2+a)+(c^2+b)+(d^2+c)\big)K\geqslant$$
$$\geqslant\left(\frac{a^4}{\sqrt{(a^2+b)(a^2+c)}}+\frac{b^4}{\sqrt{(b^2+c)(b^2+d)}}+\frac{c^4}{\sqrt{(c^2+d)(c^2+a)}}+\frac{d^4}{\sqrt{(d^2+a)(d^2+b)}}\right)^2$$

Обозначим последнее выражение в скобках через L и оценим его по неравенству Коши–Буняковского для наборов

$$\frac{a^4}{\sqrt{(a^2+b)(a^2+c)}},\quad\frac{b^4}{\sqrt{(b^2+c)(b^2+d)}},\quad\frac{c^4}{\sqrt{(c^2+d)(c^2+a)}},\quad\frac{d^4}{\sqrt{(d^2+a)(d^2+b)}}\quad\text{и}$$
$$\sqrt{(a^2+b)(a^2+c)},\quad\sqrt{(b^2+c)(b^2+d)},\quad\sqrt{(c^2+d)(c^2+a)},\quad\sqrt{(d^2+a)(d^2+b)}.$$

Тогда $LM \geqslant \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$, где

$$M = \sqrt{(a^2+b)(a^2+c)} + \sqrt{(b^2+c)(b^2+d)} + \sqrt{(c^2+d)(c^2+a)} + \sqrt{(d^2+a)(d^2+b)}.$$

Таким образом,

$$K \geqslant \frac{L^2}{a^2+b^2+c^2+d^2+4} \geqslant \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2+4} \cdot \frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4}{M^2}.$$

Наконец, по неравенству о средних для двух чисел $\sqrt{(x^2+y)(x^2+z)} \leqslant \frac{(x^2+y)+(x^2+z)}{2}$, поэтому

$$M \leqslant \frac{2a^2+b+c}{2} + \frac{2b^2+c+d}{2} + \frac{2c^2+d+a}{2} + \frac{2d^2+a+b}{2} = a^2+b^2+c^2+d^2+4.$$

Стало быть,

$$K \geqslant \frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4}{(a^2+b^2+c^2+d^2+4)^3} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{\left(1+\frac{4}{a^2+b^2+c^2+d^2}\right)^3} = . \qquad (*)$$

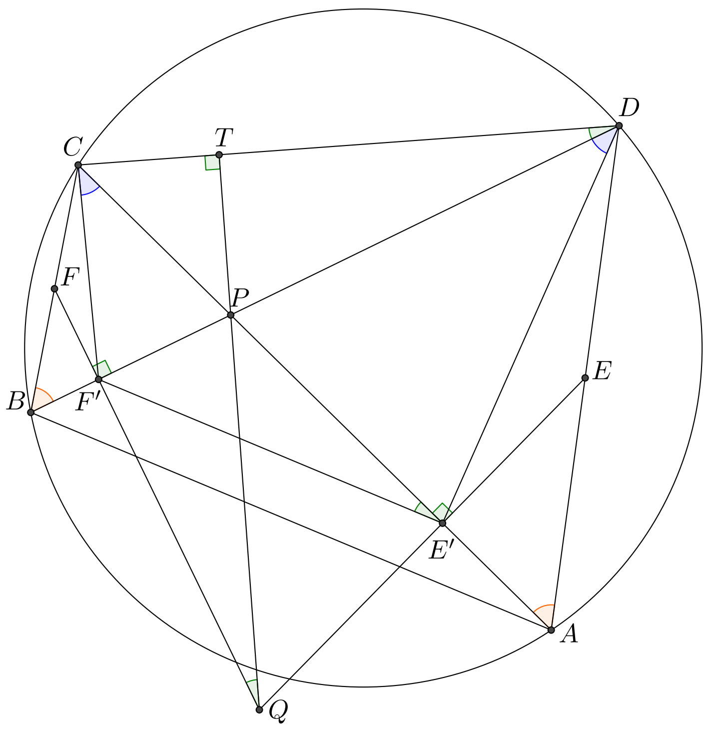
Осталось заметить, что по неравенству Коши–Буняковского для наборов a, b, c, d и 1, 1, 1, 1

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqslant (a+b+c+d)^2 = 16,$$

поэтому $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 4$. Следовательно, числитель в правой части $(*)$ не меньше, чем 4, а знаменатель не больше, чем 2^3, поэтому $K \geqslant \frac{1}{2}$. Если же $a=b=c=d=1$, то $K=\frac{1}{2}$, поэтому наименьшее значение K равно $\frac{1}{2}$.

4. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, причем угол APB — тупой. Точки E и F — середины сторон AD и BC соответственно. Из точки E провели перпендикуляр к прямой AC, а из точки F провели перпендикуляр к прямой BD, эти перпендикуляры пересеклись в точке Q. Найдите угол между прямыми PQ и CD.

Ответ: 90°

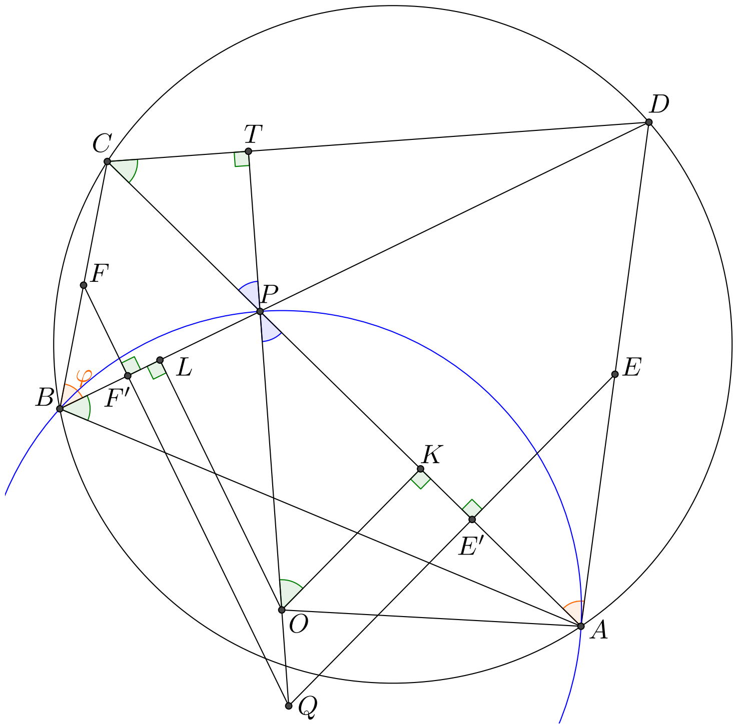


Первое решение. Пусть E' и F' — точки пересечения EQ с AP и FQ с BP соответственно, а T — точка пересечения прямых PQ и CD. Поскольку углы $\angle CAD$ и $\angle CBD$ опираются на одну дугу, они равны. Следовательно, прямоугольные треугольники $AE'E$ и $DF'F$ подобны. Тогда, $\frac{EE'}{FF'} = \frac{AE}{BF} = \frac{DE}{CF}$, последнее поскольку точки E и F — середины отрезков AD и BC. Кроме того $\angle DEE' = \angle CFF'$, поэтому треугольники DEE' и CFF' подобны и, в частности, $\angle ADE' = \angle BCF'$. Углы $\angle ACB$ и $\angle ADB$ опираются на одну дугу и поэтому равны. Таким образом, $\angle E'BF' = \angle ABD - \angle ABE' = \angle ACD - \angle DCF' = \angle E'CF'$. Следовательно, четырехугольник $BE'F'C$ вписанный и

$$\angle TDP = \angle CDF' = \angle CE'F' = \angle PE'F' = \angle PQF'$$

(последнее равенство углов следует из вписанности четырехугольника $PE'QF'$). Осталось посчитать углы:

$$\angle PTD = 180^\circ - \angle TDP - \angle DPT = 180^\circ - \angle PQF' - \angle QPF' = 90^\circ.$$



Второе решение. Пусть E' и F' — точки пересечения EQ с AP и FQ с BP соответственно, точки K и L — середины отрезков AP и BP, а T — точка пересечения прямых PQ и CD. Пусть O — центр описанной окружности треугольника APB, тогда OK и OL — серединные перпендикуляры к отрезкам AP и BP соответственно. Положим для краткости $\angle DAP = \varphi$. Тогда $\angle CBP = \varphi$, поскольку углы $\angle DAP$ и $\angle CBP$ опираются на одну дугу. Следовательно, треугольники CBP и DAP подобны по двум углам и, значит,

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AD}{BC} = \frac{AE}{BF} = \frac{AE\cos\varphi}{BF\cos\varphi} = \frac{AE'}{BF'}.$$

Таким образом,

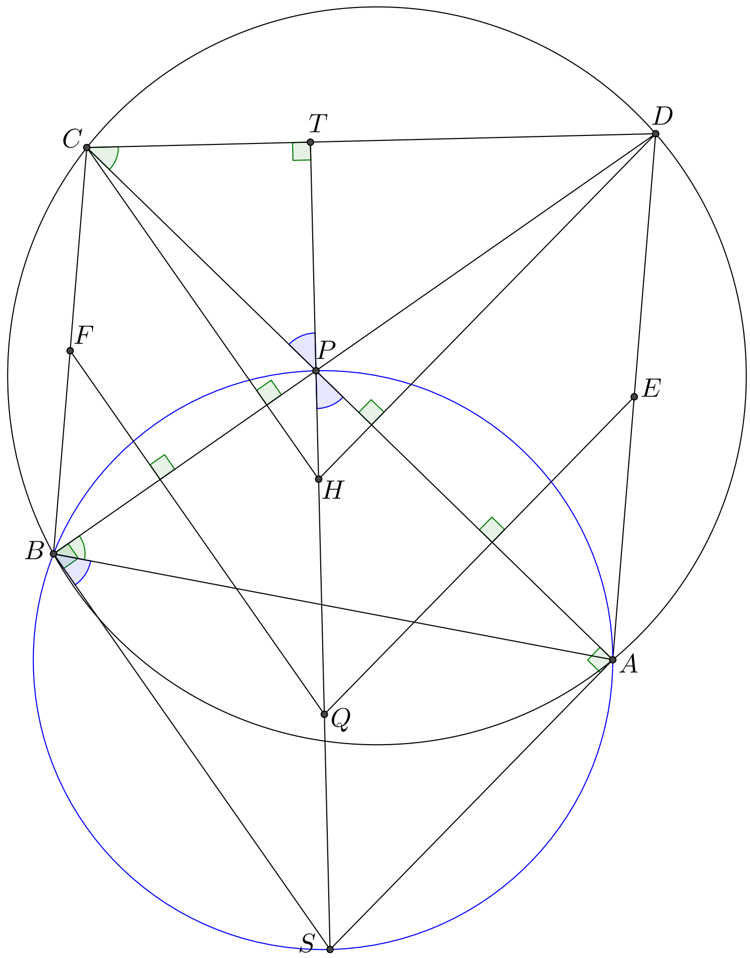
$$\frac{PE'}{PF'} = \frac{AP - AE'}{BP - BF'} = \frac{AP}{BP} = \frac{PK}{PL}.$$

Пусть прямые KO и PQ пересекаются в точке K', а прямые LO и PQ пересекаются в точке L'. Тогда треугольники $PE'Q$ и PKK' подобны с коэффициентом $\frac{PE'}{PK} = \frac{PF'}{PL}$, с таким же коэффициентом подобия подобны и треугольники $PF'Q$ и PLL'. Следовательно,

$PK' = PL'$ и, значит, точки K', L' и O совпадают. Таким образом, прямая PQ проходит через точку O. Осталось посчитать углы:

$$\angle PTC = 180^\circ - \angle ACB - \angle CPT = 180^\circ - \angle ABD - \angle APO = 180^\circ - \angle POK - \angle APO = 90^\circ.$$

В предпоследнем равенстве использовалось то, что центральный угол $\angle AOP$ с одной стороны равен удвоенному вписанному углу $\angle ABD$, а с другой стороны равен удвоенному углу $\angle POK$.



Третье решение. Проведем из точки P прямую ℓ, перпендикулярную стороне CD, пусть T — ее точка пересечения с CD. Через точки A и B проведем прямые, перпендикулярные к диагоналям AC и BD соответственно. Пусть S их точка пересечения. Поскольку $\angle PAS = 90^\circ = \angle PBS$, точки A, P, B и S лежат на окружности с диаметром PS. Тогда (равенство $\angle ABP = \angle ACD$ следует из вписанности четырехугольника $ABCD$)

$$\angle APS = \angle ABS = 90^\circ - \angle ABP = 90^\circ - \angle ACD = \angle CPT.$$

Следовательно, точка S лежит на прямой ℓ.

Пусть H — точка пересечения высот треугольника CPD. Ясно, что она также лежит на прямой ℓ. Тогда прямые AS, DH и EQ параллельны, и поскольку $AE = ED$, прямая EQ является средней линией трапеции $ADHS$. Следовательно, EQ пересекает прямую ℓ в середине отрезка SH. Аналогично прямая FQ также пересекает прямую ℓ в середине отрезка SH. Но тогда прямые EQ, FQ и ℓ пересекаются в середине отрезка SH и эта точка является точкой Q. Стало быть Q также лежит на прямой ℓ. В частности, прямые PQ и CD пересекаются под прямым углом.

5. В классе $n \geqslant 3$ школьников. У учителя есть $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ карточек, на них написаны числа 1, 2, 3, $\ldots$, m, каждое по одному разу. Он раздал каждому школьнику по одной карточке. Для каждой пары школьников посчитали сумму чисел на их карточках и все полученные числа записали на доске. Оказалось, что числа на доске дают различные остатки от деления на m. Докажите, что если m нечетно, то $n-2$ является квадратом натурального числа.

Решение. Занумеруем школьников числами от 1 до n. Пусть a_j — число, написанное на карточке у j-го школьника. Тогда все попарные суммы $a_i + a_j$ дают различные остатки от деления на $m = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Рассмотрим остатки от деления на m у попарных разностей $a_i - a_j$ при различных i и j. Всего таких остатков $n(n-1)$, причем среди них нет нулевого остатка. Предположим, что для каких-то индексов они совпадают. Тогда $a_i - a_j \equiv a_k - a_\ell \pmod{m}$ и поэтому $a_i + a_\ell \equiv a_j + a_k \pmod{m}$. Такое возможно только когда $i = \ell$ или $j = k$. Если, например, $i = \ell$, то

$$2a_i \equiv a_j + a_k \pmod{m}, \qquad (*)$$

причем $j \neq k$, поскольку m — нечетно. Сравнение $(*)$ возможно не более чем в n случаях, поскольку индекс i может принимать лишь n значений, а суммы вида $a_j + a_k$ принимают каждый остаток от деления на m ровно один раз. Одному сравнению $(*)$ соответствует два совпадения остатков разностей: у $a_i - a_j$ и $a_k - a_i$, а также у $a_j - a_i$ и $a_i - a_k$.

Поскольку попарных разностей $n(n-1)$, а ненулевых остатков от деления на m всего $m - 1 = \frac{1}{2}n(n-1) - 1$ и не более чем $2n$ из них встречается два раза, имеем неравенство $\frac{1}{2}n(n-1) - 1 + 2n \geqslant n(n-1)$ и, значит, $n(n-1) \leqslant 4n - 2 < 4n$. Таким образом, $n < 5$. Стало быть, $n = 3$ и тогда $n - 2$ — точный квадрат.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2022/2023 учебный год

Задания для 8-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

8–9 класс. Первый вариант

1. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет ровно один корень, квадратный трехчлен $2f(2x-3) - f(3x+1)$ также имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$.

Ответ: -11.

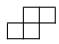
Решение. Поскольку от деления всех коэффициентов трехчлена $f(x)$ на a не меняются ни его корни, ни корни трехчлена $g(x) = 2f(2x-3) - f(3x+1)$, можно считать, что $a = 1$. Квадратный трехчлен имеет ровно один корень тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Поэтому $b^2 = 4c$ и, значит, $f(x) = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$. Тогда

$$g(x) = 2f(2x-3) - f(3x+1) = 2(2x-3)^2 + 2b(2x-3) + \frac{b^2}{2} - \left((3x+1)^2 + b(3x+1) + \frac{b^2}{4}\right) =$$
$$= -x^2 + (b-30)x + \left(17 - 7b + \frac{b^2}{4}\right).$$

Следовательно,

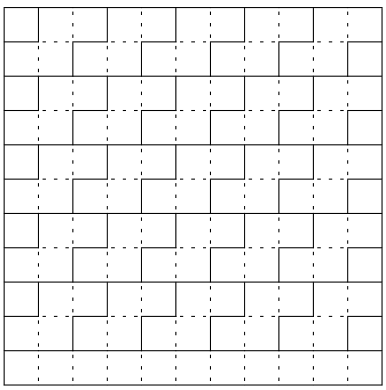
$$0 = (b-30)^2 + 4\left(17 - 7b + \frac{b^2}{4}\right) = 2b^2 - 88b + 968 = 2(b-22)^2.$$

Таким образом, дискриминант трехчлена $g(x)$ равен 0 только при $b = 22$, значит, $f(x) = x^2 + 22x + 121$ и его единственный корень равен -11.

2. В клетках квадрата 11×11 расставлены нули и единицы таким образом, что в любой фигурке из четырех клеток вида  сумма чисел нечетна. (Фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое наименьшее количество единиц может быть в такой расстановке?

Ответ: 25

Решение. Разместим в квадрате 25 фигурок, не имеющих общих клеток (см. левый рисунок). В каждой из них располагается хотя бы одна единица, поэтому всего единиц не меньше 25. Подходящая расстановка 25 единиц: во всех клетках с четными координатами (см. правый рисунок).



0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

3. Натуральные числа a и b таковы, что числа ab и $(a+1)(b+1)$ — являются квадратами некоторых натуральных чисел. Докажите, что для некоторого натурального числа $n > 1$ число $(a+n)(b+n)$ также является квадратом некоторого натурального числа.

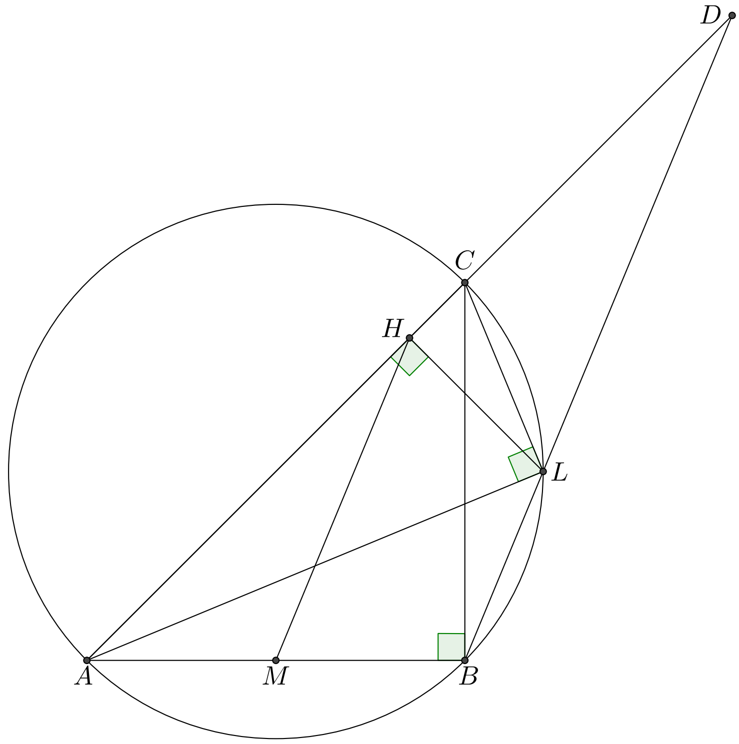
Решение. Возьмем $n = ab$, тогда

$$(a+n)(b+n) = (a+ab)(b+ab) = ab \cdot (a+1)(b+1),$$

что есть произведение двух точных квадратов.

4. Точка M — середина катета AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом $\angle B$. Биссектриса угла $\angle A$ пересекает описанную окружность треугольника в точке L. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из L на прямую AC. Найдите угол $\angle AMH$.

Ответ: $112{,}5^\circ$



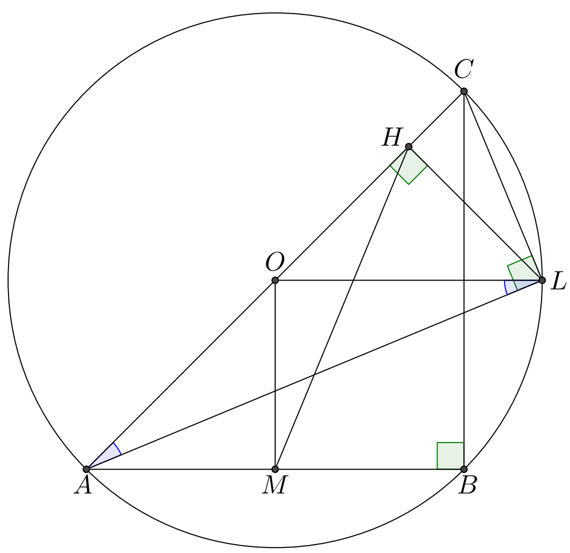
Первое решение. Пусть D — точка пересечения прямых AC и BL. Поскольку четырехугольник $ABLC$ вписанный, $\angle ALB = \angle ACB = 45^\circ$ и $\angle ALC = \angle ABC = 90^\circ$. Кроме того $\angle DAL = \frac{1}{2}\angle BAC = 22{,}5^\circ$. Тогда

$$\angle ADL = \angle ALB - \angle DAL = 45^\circ - 22{,}5^\circ = 22{,}5^\circ.$$

Следовательно, треугольник ALD равнобедренный и его высота LH является медианой. Таким образом, $AH = HD$ и отрезок HM — средняя линия в треугольнике ABD, в частности, прямые HM и BD параллельны и, значит, $\angle AMH = \angle ABL$.

Поскольку AL — биссектриса угла $\angle BAC$, а четырехугольник $ABLC$ вписанный, $\angle CBL = \angle CAL = 22,5^\circ$. Следовательно,

$$\angle AMH = \angle ABL = \angle ABC + \angle CBL = 90^\circ + 22{,}5^\circ = 112{,}5^\circ.$$



Второе решение. Пусть O — середина гипотенузы AC, тогда это центр описанной окружности треугольника ABC и, значит, $CO = LO$. Следовательно, треугольник AOL равнобедренный и $\angle OLA = \angle OAL = \frac{1}{2}\angle BAC = 22{,}5^\circ$. Угол $\angle LOH$ является внешним углом для треугольника AOL, поэтому $\angle LOH = \angle OLA + \angle OAL = 22{,}5^\circ + 22{,}5^\circ = 45^\circ$. Таким образом, треугольник LHO равнобедренный и прямоугольный. Отрезок MO является средней линией треугольника ABC и, значит, он параллелен стороне BC. Стало быть, треугольник AMO равнобедренный и прямоугольный. Следовательно, треугольники AMO и LHO равны по двум углам и стороне ($AO = LO$), а тогда $MO = OH$ и треугольник MOH равнобедренный со внешним углом, равным 45°. Поэтому углы при его основании равны по $22{,}5^\circ$. Осталось заметить, что $\angle AMH = \angle AMO + \angle OMH = 90^\circ + 22{,}5^\circ = 112{,}5^\circ$.

5. Сумма положительных чисел a, b и c равна трем. Докажите неравенство

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Решение. С помощью раскрытия скобок несложно проверить, что $3(ab + bc + ca) \leqslant (a + b + c)^2 = 9$. Следовательно,

$$c^2 + 3 \geqslant c^2 + ab + bc + ca = (c + a)(c + b).$$

Поэтому по неравенству о средних для двух чисел

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leqslant \frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{ab}{c+a} + \frac{ab}{c+b}\Big).$$

Стало быть,

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{ab}{c+a} + \frac{ab}{c+b} + \frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} + \frac{ca}{b+a} + \frac{ca}{b+c}\Big) = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}.$$

6. На плоскости проведены $2n + 1$ синяя и $n - 1$ красная прямая, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди частей, на которые они разбивают плоскость, найдется не менее $4n + 2$ частей, ограниченных только синими прямыми.

Решение. По индукции несложно проверить, что $2n+1$ синяя прямая делит плоскость на $(2n + 1)(n + 1) + 1 = 2n^2 + 3n + 2$ частей. Каждая красная прямая пересекает не более $2n + 2$ области с синими границами. Поэтому после проведения первой красной прямой останется не менее $(2n^2+3n+2)-(2n+2) = 2n^2+n$ областей с синими границами. Каждая последующая красная прямая портит не более $2n + 1$ синюю область. Действительно, она пересекает не более $2n + 2$ областей с синими границами, но область, в которой лежит точка ее пересечения с первой красной прямой, уже учтена, поэтому она портит не более $2n+1$ новых синих областей. Следовательно, останутся нетронутыми не менее $(2n^2+n) - (2n + 1)(n - 2) = 4n + 2$ областей с синими границами.

8–9 класс. Второй вариант

1. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет ровно один корень, квадратный трехчлен $f(3x+2) - 2f(2x-1)$ также имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$.

Ответ: -7.

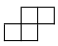
Решение. Поскольку от деления всех коэффициентов трехчлена $f(x)$ на a не меняются ни его корни, ни корни трехчлена $g(x) = f(3x + 2) - 2f(2x - 1)$, можно считать, что $a = 1$. Квадратный трехчлен имеет ровно один корень тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Поэтому $b^2 = 4c$ и, значит, $f(x) = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$. Тогда

$$g(x) = f(3x+2) - 2f(2x-1) = (3x+3)^2 + b(3x+2) + \frac{b^2}{2} - \Big((2x-1)^2 + b(2x-1) + \frac{b^2}{4}\Big) = \\ = x^2 + (20 - b)x + \Big(2 + 4b - \frac{b^2}{4}\Big).$$

Следовательно,

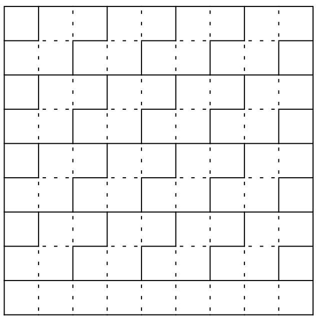
$$0 = (20 - b)^2 - 4\Big(2 + 4b - \frac{b^2}{4}\Big) = 2b^2 - 56b + 392 = 2(b - 14)^2.$$

Таким образом, дискриминант трехчлена $g(x)$ равен 0 только при $b = 14$, значит, $f(x) = x^2 + 14x + 49$ и его единственный корень равен -7.

2. В клетках квадрата 9×9 расставлены нули и единицы таким образом, что в любой фигурке из четырех клеток вида  сумма чисел нечетна. (Фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое наибольшее количество единиц может быть в такой расстановке?

Ответ: 65

Решение. Разместим в квадрате 16 фигурок, не имеющих общих клеток (см. левый рисунок). В каждой из них располагается хотя бы один ноль, поэтому всего нулей не меньше 16, а единиц не больше чем $81 - 16 = 65$. Подходящая расстановка 65 единиц: во всех клетках с четными координатами ставим нули, а в остальных клетках единицы (см. правый рисунок).



1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Натуральные числа a и b таковы, что числа ab и $(2a+1)(2b+1)$ — являются квадратами некоторых натуральных чисел. Докажите, что для некоторого четного числа $n > 2$ число $(a + n)(b + n)$ также является квадратом некоторого натурального числа.

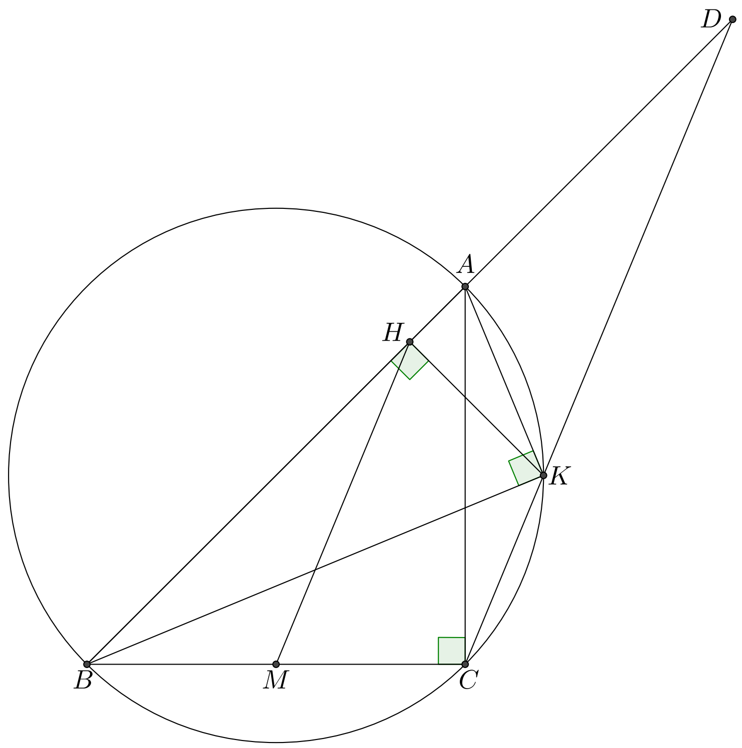
Решение. Возьмем $n = 2ab$, тогда

$$(a + n)(b + n) = (a + 2ab)(b + 2ab) = ab \cdot (2a + 1)(2b + 1),$$

что есть произведение двух точных квадратов.

4. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Точка M — середина стороны BC. На меньшей дуге AC описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из K на прямую AB. Найдите угол $\angle CAK$, если известно, что $KH = BM$ и прямые MH и CK параллельны.

Ответ: $22,5^\circ$

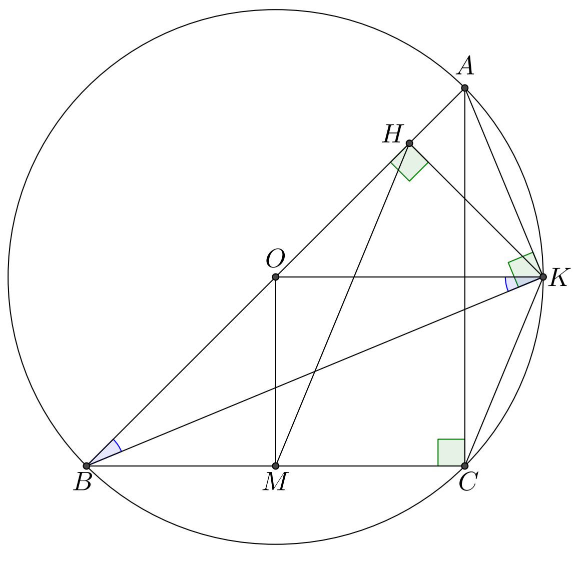


Первое решение. Пусть D — точка пересечения прямых AB и CK. Поскольку четырехугольник $ABCK$ вписанный, $\angle AKD = \angle ABC = 45^\circ$ и $\angle AKB = \angle ACB = 90^\circ$. Прямые HM и CD параллельны, поэтому отрезок HM является средней линией треугольника CBD и, значит, точка H — середина отрезка BD. Тогда в треугольнике KBD медиана совпадает с высотой и сам треугольник является равнобедренным. Следовательно,

$$\angle KBD = \angle BDK = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BKD) = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ - 45^\circ) = 22,5^\circ.$$

Стало быть,

$$\angle CAK = \angle CBK = 45^\circ - \angle KBD = 45^\circ - 22,5^\circ = 22,5^\circ.$$



Второе решение. Пусть O — середина гипотенузы AB, тогда это центр описанной окружности треугольника ABC и, значит, $AO = BO = KO$. Тогда OM — средняя линия треугольника ABC и, в частности, OM параллельно AC и, значит, $\angle OMB = \angle ACB = 90°$. Следовательно, треугольники OMB и OHK равны по двум сторонам и углу между ними ($BO = KO$, $\angle OMB = 90° = \angle OHK$ и $BM = KH$), а тогда $\angle KOA = \angle OBM = 45°$. Таким образом, треугольник AOK равнобедренный с углом при вершине, равным $45°$, поэтому $\angle KAO = 90° - \frac{45°}{2} = 67{,}5°$. Осталось заметить, что

$$\angle CAK = \angle KAO - \angle CAO = 67{,}5° - 45{,}5° = 22{,}5°.$$

5. Положительных числа a, b и c удовлетворяют условию $ab + bc + ca = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Первое решение. По неравенству о средних для двух чисел

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} = \sqrt{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+c}} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\Big).$$

Следовательно,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b}\Big) = \frac{3}{2}.$$

Второе решение. Преобразуем онду дробь:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} = \frac{a\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+b}\sqrt{b+c}\sqrt{c+a}}.$$

Таким образом, надо доказать неравенство

$$\frac{3}{2} \geqslant \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} = \frac{a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\sqrt{b+c}\sqrt{c+a}}.$$

Положим $x = \sqrt{b+c}$, $y = \sqrt{c+a}$ и $z = \sqrt{a+b}$. Тогда $a = \frac{1}{2}(y^2+z^2-x^2)$, $b = \frac{1}{2}(z^2+x^2-y^2)$ и $c = \frac{1}{2}(x^2+y^2-z^2)$. В новых обозначениях доказываемое неравенство примет вид

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \geqslant \frac{1}{xyz}\Big(\frac{1}{2}(y^2+z^2-x^2)\cdot x + \frac{1}{2}(z^2+x^2-y^2)\cdot y + \frac{1}{2}(x^2+y^2-z^2)\cdot z\Big) = \\ = \frac{x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y - x^3 - y^3 - z^3}{2xyz} \end{aligned}$$

или, что тоже самое,

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - x^2y - x^2z - y^2x - y^2z - z^2x - z^2y + 3xyz = \\ = x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Но это неравенство Шура.

6. На плоскости проведены $2n$ красных и n синих прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди частей, на которые они разбивают плоскость, найдется не менее n частей, ограниченных только красными прямыми.

Решение. По индукции несложно проверить, что $2n$ красных прямых делят плоскость на $2n^2+n+1$ частей. Каждая синяя прямая пересекает не более $2n+1$ область с красными границами. Поэтому после проведения первой синей прямой останется не менее $(2n^2+n+1)-(2n+1) = 2n^2-n$ областей с красными границами. Каждая последующая синяя прямая портит не более $2n$ красных областей. Действительно, она пересекает не более $2n+1$ область с красными границами, но область, в которой лежит точка ее пересечения с первой синей прямой, уже учтена, поэтому она портит не более $2n$ новых красных областей. Следовательно, останутся нетронутыми не менее $(2n^2-n)-2n(n-1) = n$ областей с красными границами.

8–9 класс. Третий вариант

1. Дан квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 - ax + 1$. Известно, что $|f(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in [0,1]$. Какое наибольшее значение может принимать a?

Ответ: 8

Решение. Несложно проверить, что $a = 8$ подходит. Действительно, $|2x - 1| \leqslant 1$ при $x \in [0,1]$, поэтому $f(x) = 8x^2 - 8x + 1 = 2(2x-1)^2 - 1 \leqslant 1$, а неравенство $f(x) \geqslant -1$ справедливо вообще при всех x.

Предположим, что $a > 8$. Тогда

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} - \frac{a}{2} + 1 = 1 - \frac{a}{4} = \frac{4-a}{4} < -1,$$

что невозможно по условию.

2. В каждой клетке квадрата 15×15 стоит натуральное число, не превосходящее 4, причем сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна 7. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 417

Решение. Заметим, что сумма чисел в двух соседних клетках не больше пяти, поскольку в противном случае сумма чисел в содержащем эти две клетки квадрате 2×2 будет не меньше восьми, что невозможно по условию.

Разобьем таблицу на 49 квадратов 2×2 и уголок ширины 1. Уголок разобьем на угловую клетку и 14 доминошек 1×2. Сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна 7, сумма чисел в каждой доминошке не превосходит 5, число в угловой клетке не больше 4, поэтому сумма всех чисел в таблице не превосходит $49 \cdot 7 + 14 \cdot 5 + 4 = 417$.

Пример. Пронумеруем горизонтали и вертикали таблицы числами от 1 до 15 слева направо и снизу вверх. В клетки, находящиеся на пересечениях нечетных горизонталей и вертикалей, поместим четверки, в остальные клетки поместим единицы (см. рисунок). Сумма всех чисел равна $64 \cdot 4 + (225 - 64) \cdot 1 = 417$.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Даны натуральные числа a и b. Оказалось, что для любого натурального числа n числа $a + n$ и $b + n$ не являются взаимно простыми. Докажите, что $a = b$.

Первое решение. Возьмем какое-нибудь простое число $p > a$ и положим $n = p - a$. Тогда $a + n = p$ — простое число и по условию $b + n$ должно делиться на p, в частности, $b + n \geqslant p = a + n$. Таким образом, $b \geqslant a$. Аналогично получаем, что $a \geqslant b$ и, значит, $a = b$.

Второе решение. Предположим, что $a < b$ и положим $n = (b-a-1)a+1 \geqslant 1$. Тогда у чисел $a+n$ и $b+n$ есть общий делитель $d > 1$. Следовательно, $b-a = (b+n)-(a+n)$ также делится на d. Но $a+n = (b-a)a+1$, поэтому на d делится и $1 = \big((b-a)a+1\big) - (b-a)a$, что невозможно.

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right).$$

Решение. Пусть $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ и $z = \frac{c}{a}$, тогда надо доказать, что

$$(x+y+z)^2 \geqslant \frac{3}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Заметим, что

$$x^2+y^2+z^2+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = (x+y+z)^2,$$

поэтому доказываемое неравенство можно записать в виде

$$x^2+y^2+z^2+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant \frac{3}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

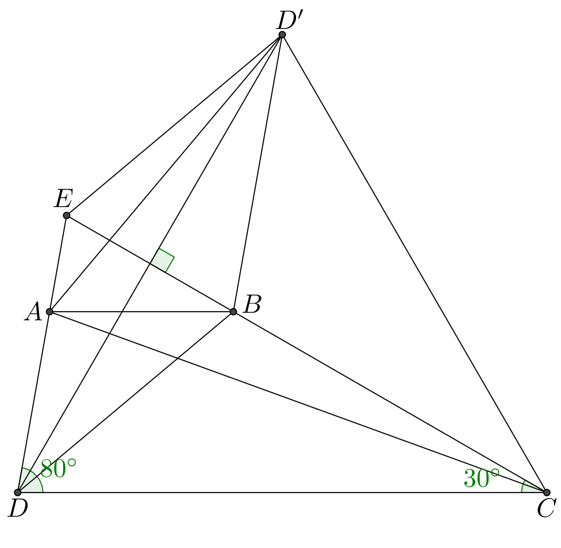
Домножим на 2 и приведем подобные слагаемые, останется неравенство

$$2(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant 3(x+y+z).$$

Последнее есть сумма трех неравенств вида $2x^2 + \frac{1}{x} \geqslant 3x$, что проверяется, например, группировкой $2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(2x+1) \geqslant 0$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD, углами $\angle C = 30^\circ$ и $\angle D = 80^\circ$. Найдите $\angle ACB$, если известно, что DB — биссектриса угла $\angle D$.

Ответ: 10°



Пусть E — точка пересечения прямых AD и BC, а D' — точка, симметричная точке D относительно прямой BC. Тогда $CD = CD'$ и $\angle DCD' = 2\angle BCD = 60^\circ$. Следовательно, треугольник DCD' равносторонний и $DD' = CD$. В силу симметрии $DE = D'E$ и треугольник DED' равнобедренный. Поэтому $\angle ED'D = \angle EDD' = \angle ADC - \angle CDD' = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.

По теореме Фалеса $\frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC}$, а по свойству биссектрисы $\frac{EB}{BC} = \frac{ED}{DC} = \frac{ED'}{DD'}$. Следовательно, $\frac{EA}{AD} = \frac{ED'}{DD'}$ и $D'A$ — биссектриса угла $\angle ED'D$ и, значит, $\angle AD'D = \angle AD'E = 10^\circ$. Стало быть, $\angle AD'C = \angle AD'D + \angle DD'C = 10^\circ + 60^\circ = 70^\circ = \angle AEC$. Таким образом, четырехугольник $AED'C$ вписанный и $\angle ACB = \angle ACE = \angle AD'E = 10^\circ$.

6. На плоскости проведены $n > 2$ прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Они разбивают плоскость на части. Докажите, что количество частей, ограниченных ровно тремя прямыми, по крайней мере на 4 больше количества частей, ограниченных более чем четырьмя прямыми.

Решение. Обозначим через a_k количество частей, ограниченных k прямыми. Отметим, что $a_2 \leqslant n$. Действительно, ограничение ровно двумя прямыми означает, что граница части представляет собой два луча, каждый луч может быть границей не более двух таких областей, поэтому общее количество таких областей не больше, чем половина от общго количества лучей.

По индукции несложно показать, что общее количество частей равно $\frac{1}{2}(n^2 + n) + 1$. Поэтому

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n) + 1.$$

Заметим далее, что каждая прямая разделяется точками пересечения с остальными прямыми на n кусков, каждый из них является стороной для двух частей плоскости. Просуммировав количества сторон у всех частей, получим

$$2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \ldots + na_n = 2n^2.$$

Умножим первое равенство на 4 и вычтем из него второе равенство, получим

$$2a_2 + a_3 - a_5 - 2a_6 - \ldots - (n-4)a_n = 2n + 4.$$

Следовательно,

$$a_3 = 4 + 2(n - a_2) + a_5 + 2a_6 + \ldots + (n-4)a_n \geqslant 4 + a_5 + a_6 + \ldots + a_n.$$

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2022/2023 учебный год

Задания для 6-7 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

6–7 класс. Первый вариант

1. Натуральные числа x и y не делятся на 59, а число $3x + 28y$ — делится. Докажите, что $5x + 16y$ не делится на 59.

Решение. Допустим, что $5x + 16y$ делится на 59. Тогда число

$$3 \cdot (3x + 28y) + 10 \cdot (5x + 16y) = 59x + 244y$$

тоже делится на 59. Следовательно, $244y$ делится на 59. А так как 244 и 59 взаимно просты, то и y делится на 59, чего не может быть по условию.

Можно было подобрать и другие равенства, например $5 \cdot (3x+28y) - 3 \cdot (5x+16y) = 92y$, или вообще запустить алгоритм Евклида.

2. В мешке лежит 21 обычный кубик, на гранях каждого написаны числа от 1 до 6. Все кубики пронумерованы. Зритель берет из мешка 3 кубика, показывает их фокуснику и один кубик кладет в карман. Фокусник кладет два оставшихся кубика на стол. Зритель записывает числа на верхних гранях кубиков (в каком именно порядке — он выбирает сам) и сообщает их второму фокуснику. А тот называет номер кубика в кармане у зрителя. Как заранее договориться фокусникам, чтобы фокус удался?

Решение. Зритель сообщает второму фокуснику два числа, каждое от 1 до 6, причем порядок, в котором сообщаются числа, не несет никакой информации. Всего существует 21 пара таких чисел:

11	12	13	14	15	16
	22	23	24	25	26
		33	34	35	36
			44	45	46
				55	56
					66

Фокусники должны заранее пронумеровать эти пары числами от 1 до 21, и когда первый фокусник увидит номер кубика, который зритель кладет в карман, он должен выложить с помощью кубиков соответствующую пару чисел.

3. Можно ли в вершинах куба расставить 8 различных чисел из диапазона от 1 до 220 так, чтобы числа в соседних вершинах имели общий делитель больше 1, а в несоседних не имели бы?

Ответ: нет.

Решение. Для каждых двух чисел, соединенных ребром, напишем на этом ребре их общий простой делитель (любой, если есть выбор). Тогда на разных ребрах будут написаны разные простые числа. Действительно, если бы на двух ребрах оказалось написано число p, то любые два числа в вершинах этих ребер делятся на p и поэтому должны быть соединены ребром, в частности найдутся три вершины, попарно соединенные ребрами. Но этого не может быть, потому что никакие три ребра куба не образуют треугольник.

Наименьшие 12 простых чисел — это 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Значит, на одном из ребер куба должно быть написано число $p \geqslant 37$. Пусть A — любая из двух вершин этого ребра. Из нее выходит еще два ребра, произведение чисел на них не меньше $2 \cdot 3 = 6$, значит, число, написанное в A, не меньше $6 \cdot 37 = 222$. Противоречие.

4. На схеме лабиринта на рис. 1 каждый отрезок (звено) — это коридор, а кружочек — небольшая комната. В некоторых комнатах стоят маяки, они жужжат — каждый своим голосом. Находясь в любой комнате, робот слышит сигнал каждого маяка и по затуханию определяет расстояние до него, т. е. количество звеньев на кратчайшем пути к маяку. Например, если маяк находится в комнате A (в шахматных обозначениях это комната в4), а робот в комнате B (это комната г4), расстояние между ними — 7 звеньев. Схема лабиринта у робота есть и маяки на ней указаны. Для какого наименьшего числа маяков робот, оказавшись в любой комнате, сможет на слух однозначно определить, где он находится?

а) Укажите, как можно расставить такое количество маяков. Почему робот сумеет по ним определить свою комнату?

б) Докажите, что нельзя обойтись меньшим числом маяков.

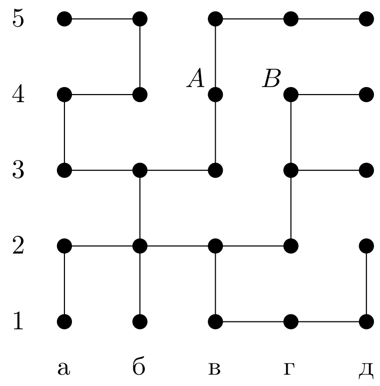


Рис. 1: Лабиринт

Ответ: наименьшее число маяков равно 3, например, их можно поставить в комнаты а1, д3, а5.

Решение.

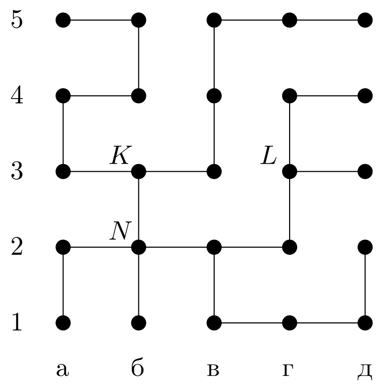


Рис. 2: Части лабиринта

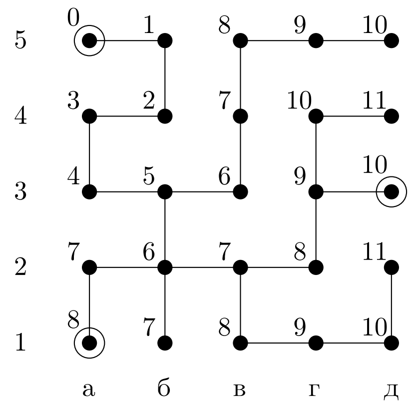


Рис. 3: Расстояния до маяка а5

б) Оценка. Докажем, что двух маяков не хватит. Рассмотрим три части нашего лабиринта (рис. 2): часть $\mathcal{K}$ — это комната K и два длинных тупиковых коридора, которые выходят из нее влево и вправо, часть $\mathcal{L}$ — это комната L и два тупиковых коридора, которые выходят из нее вверх и вправо, часть $\mathcal{N}$ — это комната N и два тупиковых коридора, которые выходят из нее влево и вниз. Если маяков не больше 2, то в какой-то из этих частей нет маяка. Пусть для примера это будет часть $\mathcal{K}$, сигналы от маяков приходят в эту часть по звену, входящему в комнату K снизу. Тогда робот, находясь в комнате а3, будет слышать такие же сигналы, как и в комнате в3, и поэтому не сможет различить, в которой из этих двух комнат находится. Аналогично подбираются неразличимые комнаты в других частях, если те не содержат маяка.

а) Пример. Проверим, что маяки в комнатах а1, д3, а5 позволят роботу сориентироваться в этом лабиринте. Здесь проще выполнить перебор вариантов, чем придумывать какие-то общие соображения. На рисунке 3 мы отметили расстояния от всех комнат до маяка а5. Как видим, комнаты с расстояниями от 0 до 5 определены однозначно. Комнаты с расстоянием 6 находятся на разном расстоянии от маяка д3. Аналогично комнаты с расстоянием 8, 9, 10, 11. Что касается четырех комнат с расстоянием 7, две из них — в2 и в4 — находятся на расстоянии 3 и 7 от маяка д3 и тем самым однозначно задаются расстояниями до а5 и до д3. У других двух комнат — а2 и б1 — расстояние до д3 равно 5, но они находятся на разном расстоянии от а1.

5. В узлах клетчатой решетки по спирали расставляют числа 1, 2, 3... Потом в центре каждой клетки пишут сумму чисел в ее узлах (см. рис. 4). Верно ли, что в центрах клеток бесконечно много раз встретятся числа, делящиеся на 52?

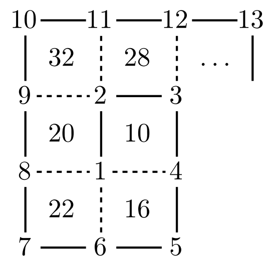


Рис. 4: Числа по спирали

Ответ: да, верно.

Решение. Клетки плоскости образуют спираль, состоящую из прямолинейных «коридоров», поворачивающих под прямыми углами.

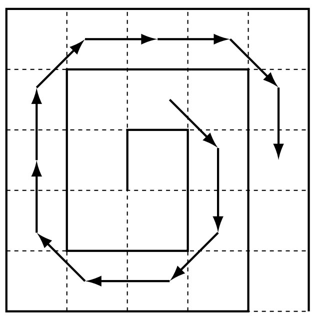


Рис. 5: Движемся по спирали

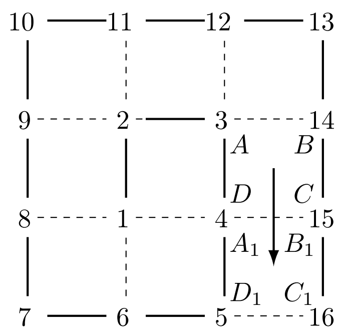


Рис. 6: Вертикальный шаг

Лемма. Если двигаться по маршруту, показанному стрелками на рис. 5, числа в клетках возрастают: при каждом вертикальном или горизонтальном перемещении по стрелке на рис. 5 число в клетке увеличивается на 4, а при диагональном перемещении — на 8.

Доказательство. Это сразу следует из правила расстановки чисел по спирали. Например рассмотрим первый вертикальный шаг из клетки $ABCD$ в клетку $A_1B_1C_1D_1$, см. рис. 6 (остальные вертикальные и горизонтальные шаги аналогичны). В наших обозначениях D и A_1 — это один и тот же узел, C и B_1 — тоже, зато удобно сравнивать числа в узлах клеток. Тогда число в узле A_1 на 1 больше, чем число в узле A, число в узле B_1 на 1 больше, чем число в узле B и т. д. В результате сумма чисел в узлах нижней клетки на 4 больше, чем в узлах верхней. Аналогичное явление наблюдается при выполнении диагонального шага.

Поскольку в первой клетке маршрута, указанного на рис. 5, стоит число, делящееся на 4 (это число 28, см. рисунок к условию задачи), все числа в клетках маршрута делятся на 4.

Пройдем далеко по спирали, чтобы очередной прямолинейный коридор спирали содержал больше 15 клеток. Тогда в неугловых клетках стоят последовательные кратные 4 и этих чисел не меньше 13, значит, среди них заведомо найдется число, делящееся на 52. Таким образом, в каждом длинном прямолинейном коридоре спирали найдется число, кратное 52.

6–7 класс. Второй вариант

1. Натуральные числа x и y не делятся на 61, а число $7x + 34y$ — делится. Докажите, что $5x + 16y$ не делится на 61.

Решение. Допустим, что $5x + 16y$ делится на 61. Тогда число

$$3 \cdot (7x + 34y) + 8 \cdot (5x + 16y) = 61x + 230y$$

тоже делится на 61. Следовательно, $230y$ делится на 61. А так как 230 и 61 взаимно просты, то и y делится на 61, чего не может быть по условию.

Можно было подобрать и другие равенства, например $5 \cdot (7x+34) - 7 \cdot (5x+16y) = 58y$, или вообще запустить алгоритм Евклида.

2. В коробке лежит 23 обычных кубика, на гранях каждого написаны числа от 1 до 6. Зритель берет из коробки несколько кубиков (можно даже все, но обязательно не меньше трех кубиков), показывает их фокуснику, два кубика отдает фокуснику, а остальные кубики кладет в карман. Фокусник кладет два оставшихся кубика на стол. Зритель записывает числа на верхних гранях кубиков (в каком именно порядке — он выбирает сам) и сообщает их второму фокуснику. А тот называет, сколько кубиков лежит в кармане у зрителя. Как заранее договориться фокусникам, чтобы фокус удался?

Решение. Зритель сообщает второму фокуснику два числа, каждое от 1 до 6, причем порядок, в котором сообщаются числа, не несет никакой информации. Всего существует 21 пара таких чисел:

11	12	13	14	15	16
	22	23	24	25	26
		33	34	35	36
			44	45	46
				55	56
					66

Количество кубиков в кармане зрителя — это число от 1 до 21. Фокусники должны заранее пронумеровать эти пары числами от 1 до 21, и когда первый фокусник увидит, сколько кубиков зритель кладет в карман, он должен выложить с помощью кубиков соответствующую пару чисел.

3. Можно ли в вершинах куба расставить 8 различных нечетных чисел из диапазона от 1 до 600 так, чтобы числа в соседних вершинах имели общий делитель больше 1, а в несоседних не имели бы?

Ответ: нет.

Решение. Для каждых двух чисел, соединенных ребром, напишем на этом ребре их общий простой делитель (любой, если есть выбор). Тогда на разных ребрах будут написаны разные простые числа. Действительно, если бы на двух ребрах оказалось написано число p, то любые два числа в вершинах этих ребер делятся на p и поэтому должны быть соединены ребром, в частности, найдутся три ребра, попарно соединенные ребрами. Но этого не может быть, потому что никакие три ребра куба не образуют треугольник.

Наименьшие 12 нечетных простых чисел — это 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41. Значит, на одном из ребер куба должно быть написано число $p \geqslant 41$. Пусть A — любая из двух вершин этого ребра. Из нее выходит еще два ребра, произведение чисел на них не меньше $3 \cdot 5 = 15$, значит, число, написанное в A, не меньше $15 \cdot 41 = 615$. Противоречие.

4. На схеме лабиринта на рис. 7 каждый отрезок (звено) — это коридор, а кружочек — небольшая комната. В некоторых комнатах стоят маяки, они жужжат — каждый своим голосом. Находясь в любой комнате, робот слышит сигнал каждого маяка и по затуханию определяет расстояние до него, т. е. количество звеньев на кратчайшем пути к маяку. Например, если маяк находится в комнате A (в шахматных обозначениях это комната в4), а робот в комнате B (это комната г4), расстояние между ними — 5 звеньев. Схема лабиринта у робота есть и маяки на ней указаны. Для какого наименьшего числа маяков робот, оказавшись в любой комнате, сможет на слух однозначно определить, где он находится?

а) Укажите, как можно расставить такое количество маяков. Почему робот сумеет по ним определить свою комнату?

б) Докажите, что нельзя обойтись меньшим числом маяков.

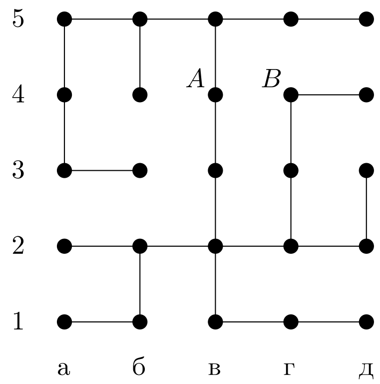


Рис. 7: Лабиринт

Ответ: наименьшее число маяков равно 3, например, их можно поставить в комнаты а1, б3, д4.

Решение.

б) Оценка. Докажем, что двух маяков не хватит. Рассмотрим три части нашего лабиринта (рис. 8): часть $\mathcal{K}$ — это комната K, длинный тупиковый коридор, который выходит из нее влево, и тупиковый коридор вниз, часть $\mathcal{L}$ — это комната L и два тупиковых коридора, которые выходят из нее вверх и вправо, часть $\mathcal{N}$ — это комната N и два тупиковых коридора, которые выходят из нее влево и вниз. Если маяков не больше 2, то в какой-то из этих частей нет маяка. Пусть для примера это будет часть $\mathcal{K}$, сигналы от маяков приходят в эту часть по звену, входящему в комнату K справа. Тогда робот, находясь в комнате а5, будет слышать такие же сигналы, как и в комнате б4, и поэтому не сможет различить,

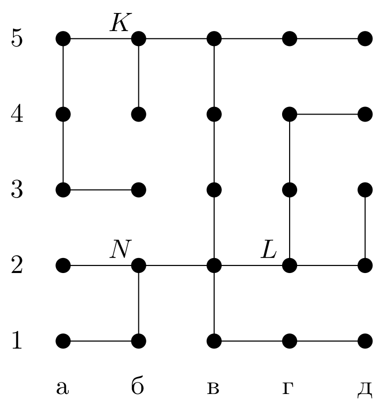


Рис. 8: Части лабиринта

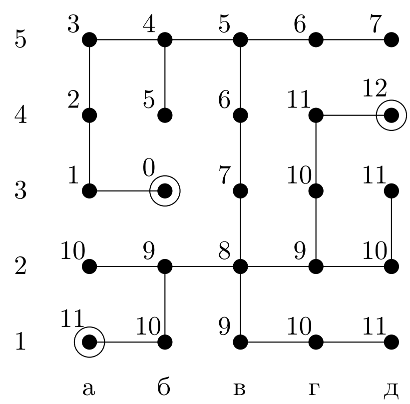


Рис. 9: Расстояния до маяка б3

в которой из этих двух комнат находится. Аналогично подбираются неразличимые комнаты в других частях, если те не содержат маяка.

а) Пример. Проверим, что маяки в комнатах а1, б3, д4 позволят роботу сориентироваться в этом лабиринте. Здесь проще выполнить перебор вариантов, чем придумывать какие-то общие соображения. На рисунке 9 мы отметили расстояния от всех комнат до маяка б3. Как видим, комнаты с расстояниями 0, 1, 2, 3, 4, 8 и 12 определены однозначно. Комнаты с расстоянием 5 находятся на разном расстоянии от маяка а1. Аналогично комнаты с расстоянием 6 и 7. Имеется три комнаты с расстоянием 9: одна из них — б2 — находится на расстоянии 2 от маяка а1, а остальные две — на расстоянии 4 от а1, но они имеют разные расстояния до д4. Две комнаты с расстоянием 10 — д2 и г3 — находятся на расстояниях 4 и 2 от маяка д4, а три другие — б1, а2 и г1 — на расстоянии 6 от д4, но на разных расстояниях от а1. Наконец, две комнаты с расстоянием 11 — д3 и г4 — находятся на расстояниях 5 и 1 от маяка д4, а две другие — а1 и д1 — на расстоянии 7 от д4, но на разных расстояниях от а1.

5. В узлах клетчатой решетки по спирали расставляют числа 0, 1, 2, 3... Потом в центре каждой клетки пишут сумму чисел в ее узлах (см. рис. 10). Верно ли, что в центрах клеток бесконечно много раз встретятся числа, делящиеся на 68? Верно ли, что в центрах клеток числа не повторяются?

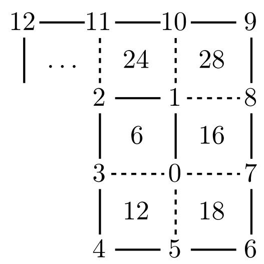


Рис. 10: Числа по спирали

Ответ: да, верно.

Решение. Клетки плоскости образуют спираль, состоящую из прямолинейных «коридоров», поворачивающих под прямыми углами.

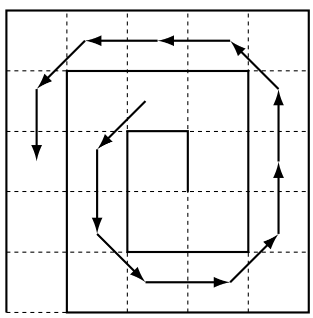


Рис. 11: Движемся по спирали

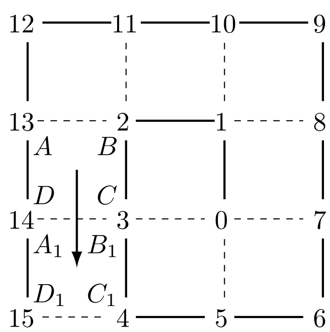


Рис. 12: Вертикальный шаг

Л е м м а. Если двигаться по маршруту, показанному стрелками на рис. 11, числа в клетках возрастают: при каждом вертикальном или горизонтальном перемещении по стрелке на рис. 11 число в клетке увеличивается на 4, а при диагональном перемещении — на 8.

Доказательство. Это сразу следует из правила расстановки чисел по спирали. Например рассмотрим первый вертикальный шаг из клетки $ABCD$ в клетку $A_1B_1C_1D_1$, см. рис. 12 (остальные вертикальные и горизонтальные шаги аналогичны). В наших обозначениях D и A_1 — это один и тот же узел, C и B_1 — тоже, зато удобно сравнивать числа в узлах клеток. Тогда число в узле A_1 на 1 больше, чем число в узле A, число в узле B_1 на 1 больше, чем число в узле B и т. д. В результате сумма чисел в узлах нижней клетки на 4 больше, чем в узлах верхней. Аналогичное явление наблюдается при выполнении диагонального шага.

Поскольку в первой клетке маршрута, указанного на рис. 11, стоит число, делящееся на 4 (это число 24, см. рисунок к условию задачи), все числа в клетках маршрута делятся на 4. Пройдем далеко по спирали, чтобы очередной прямолинейный коридор спирали содержал больше 19 клеток. Тогда в неугловых клетках стоят последовательные кратные 4 и этих чисел не меньше 17, значит, среди них заведомо найдется число, делящееся на 68. Таким образом, в каждом длинном прямолинейном коридоре спирали найдется число, кратное 68.

6–7 класс. Третий вариант

1. Натуральные числа x и y не делятся на 67, а число $7x + 32y$ — делится. Докажите, что $10x + 17y + 1$ не делится на 67.

Решение. По условию число $11(7x+32y) = 77x+352y$ делится на 67, тогда $10x+17y = 77x+352y-67x-5\cdot 67y$ тоже делится на 67. Поэтому число на 1 большее на 67 не делится.

2. В сейфе хранится 20 кошельков, в каждом лежат монеты в 1, 2, 5 и 10 рублей. Кошельки пронумерованы. Зритель берет из сейфа 4 кошелька, показывает их фокуснику и один кошелек кладет в карман. Фокусник берет из каждого из трех оставшихся кошельков по одной монете, дает их зрителю и тот кладет их на стол (как считает нужным). Приглашают второго фокусника, он смотрит на монетки на столе и называет номер кошелька в кармане у зрителя. Как заранее договориться фокусникам, чтобы фокус удался? Как показать такой фокус?

Решение. Второй фокусник видит номиналы трех лежащих монет, но ни их порядок, ни расположение на столе, ни стороны монет («орел», «решка») не несут никакой информации, поскольку монеты выкладывал зритель. Всего существует 20 троек монет:

1 1 1	2 2 2	5 5 5	10 10 10
1 2 5	1 2 10	1 5 10	2 5 10
1 1 2	1 1 5	1 1 10	
2 2 1	2 2 5	2 2 10	
5 5 1	5 5 2	5 5 10	
10 10 1	10 10 2	10 10 5	

Номер кошелька в кармане зрителя — это число от 1 до 20. Фокусники должны заранее пронумеровать эти тройки числами от 1 до 20, и когда первый фокусник увидит номер кошелька, который зритель кладет в карман, он должен достать из своих кошельков соответствующие три монеты.

3. Можно ли в вершинах куба расставить 8 различных чисел, не делящихся на 13, из диапазона от 1 до 245 так, чтобы числа в соседних вершинах имели общий делитель больше 1, а в несоседних не имели бы?

Ответ: нет.

Решение. Для каждых двух чисел, соединенных ребром, напишем на этом ребре их общий простой делитель (любой, если есть выбор). Тогда на разных ребрах будут написаны разные простые числа. Действительно, если бы на двух ребрах оказалось написано число p, то любые два числа в вершинах этих ребер делятся на p и поэтому должны быть соединены ребром, в частности, найдутся три ребра, попарно соединенные ребрами. Но этого не может быть, потому что никакие три ребра куба не образуют треугольник.

Наименьшие 12 простых чисел, не равных 13 — это 2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41. Значит, на одном из ребер куба должно быть написано число $p \geqslant 41$. Пусть A — любая из двух вершин этого ребра. Из нее выходит еще два ребра, произведение чисел на них не меньше $2 \cdot 3 = 6$, значит, число, написанное в A, не меньше $6 \cdot 41 = 246$. Противоречие.

4. На схеме лабиринта на рис. 13 каждый отрезок (звено) — это коридор, а кружочек — небольшая комната. В некоторых комнатах стоят маяки, они жужжат — каждый своим голосом. Находясь в любой комнате, робот слышит сигнал каждого маяка и по затуханию определяет расстояние до него, т. е. количество звеньев на кратчайшем пути к маяку. Например, если маяк находится в комнате A (в шахматных обозначениях это комната в4), а робот в комнате B (это комната г4), расстояние между ними — 5 звеньев. Схема лабиринта у робота есть и маяки на ней указаны. Для какого наименьшего числа маяков робот, оказавшись в любой комнате, сможет на слух однозначно определить, где он находится?

а) Укажите, как можно расставить такое количество маяков. Почему робот сумеет по ним определить свою комнату?

б) Докажите, что нельзя обойтись меньшим числом маяков.

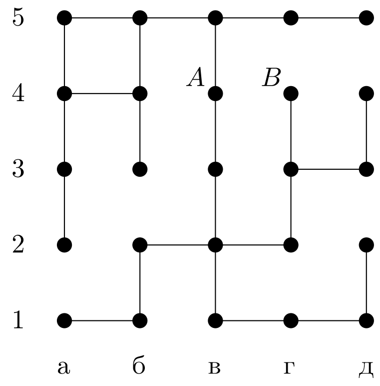


Рис. 13: Лабиринт

Ответ: наименьшее число маяков равно 3, например, их можно поставить в комнаты а1, б3, д4.

Решение.

б) Оценка. Докажем, что двух маяков не хватит. Рассмотрим три части нашего лабиринта (рис. 14): часть $\mathcal{K}$ — это комната K и тупиковые коридоры, который выходит из нее вправо и вниз, часть $\mathcal{L}$ — это комната L и два тупиковых коридора, которые выходят из нее вверх и вправо, часть $\mathcal{N}$ — это комната N и два тупиковых коридора, которые выходят из нее влево и вниз. Если маяков не больше 2, то в какой-то из этих частей нет маяка. Пусть для примера это будет часть $\mathcal{K}$, сигналы от маяков приходят в эту часть по звену, входящему в комнату K справа. Тогда робот, находясь в комнате а3, будет слышать такие же сигналы, как и в комнате б4, и поэтому не сможет различить, в которой из этих двух комнат находится. Аналогично подбираются неразличимые комнаты в других частях, если те не содержат маяка.

а) Пример. Проверим, что маяки в комнатах а1, б3, д4 позволят роботу сориентироваться в этом лабиринте. Здесь проще выполнить перебор вариантов, чем придумывать какие-то общие соображения. На рисунке 15 мы отметили расстояния от всех комнат до маяка б3. Как видим, комнаты с расстояниями 0, 1, 2, 5 и 8 определены однозначно. Комнаты с расстоянием 3 находятся на разном расстоянии от маяка а1. Аналогично комнаты с расстоянием 4, 6 и 7. Имеется три комнаты с расстоянием 9: одна из них — б2 — находится на расстоянии 2 от маяка а1, а остальные две — на расстоянии 4 от а1, но они имеют раз-

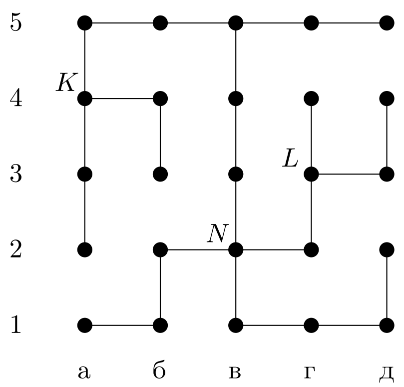


Рис. 14: Части лабиринта

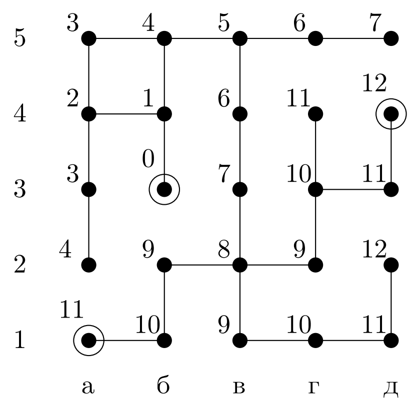


Рис. 15: Расстояния до маяка б3

ные расстояния до д4. Две комнаты с расстоянием 10 — г1 и г3 — находятся на расстоянии 5 от маяка а1, но различаются расстоянием до д4, а еще одна — б1 — на расстоянии 1 от а1 и этим она отличается от предыдущих двух. Две комнаты с расстоянием 11 — д3 и г4 — находятся на расстояниях 1 и 3 от маяка д4, а две другие — а1 и д1 — на расстоянии 7 от д4, но на разных расстояниях от а1. Наконец, комнаты с расстоянием 12 различаются расстоянием до д4.

5. В узлах клетчатой решетки по спирали расставляют последовательные натуральные числа 2, 3, 4, 5... Потом в центре каждой клетки пишут сумму чисел в ее узлах (см. рис. 16). Верно ли, что в центрах клеток бесконечно много раз встретятся числа, делящиеся на 76? Верно ли, что в центрах клеток числа не повторяются?

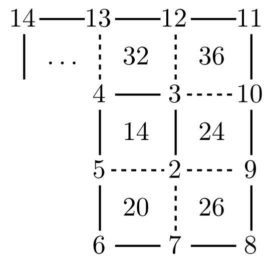


Рис. 16: Числа по спирали

Ответ: да, верно.

Решение. Клетки плоскости образуют спираль, состоящую из прямолинейных «коридоров», поворачивающих под прямыми углами.

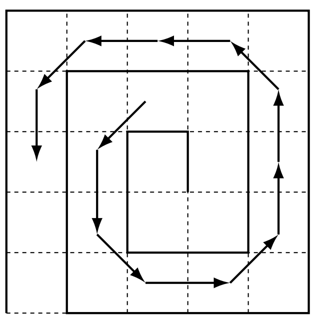


Рис. 17: Движемся по спирали

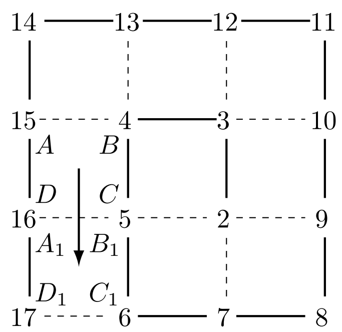


Рис. 18: Вертикальный шаг

Лемма. Если двигаться по маршруту, показанному стрелками на рис. 17, числа в клетках возрастают: при каждом вертикальном или горизонтальном перемещении по стрелке на рис. 17 число в клетке увеличивается на 4, а при диагональном перемещении — на 8.

Доказательство. Это сразу следует из правила расстановки чисел по спирали. Например рассмотрим первый вертикальный шаг из клетки $ABCD$ в клетку $A_1B_1C_1D_1$, см. рис. 18 (остальные вертикальные и горизонтальные шаги аналогичны). В наших обозначениях D и A_1 — это один и тот же узел, C и B_1 — тоже, зато удобно сравнивать числа в узлах клеток. Тогда число в узле A_1 на 1 больше, чем число в узле A, число в узле B_1 на 1 больше, чем число в узле B и т. д. В результате сумма чисел в узлах нижней клетки на 4 больше, чем в узлах верхней. Аналогичное явление наблюдается при выполнении диагонального шага.

Поскольку в первой клетке маршрута, указанного на рис. 17, стоит число, делящееся на 4 (это число 32, см. рисунок к условию задачи), все числа в клетках маршрута делятся на 4. Пройдем далеко по спирали, чтобы очередной прямолинейный коридор спирали содержал больше 21 клетки. Тогда в неуголовых клетках стоят последовательные кратные 4 и этих чисел не меньше 19, значит, среди них заведомо найдется число, делящееся на 76. Таким образом, в каждом длинном прямолинейном коридоре спирали найдется число, кратное 76.