ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2022-2023 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс **Вариант 1**

Задание 1 (10 баллов)

Салон сотовой связи продал 495 телефонов, базовая цена каждого из которых составляла 5000 руб. При этом каждый m-й продаваемый телефон был акционный и продавался со скидкой равной 500 руб. Покупатель каждого третьего акционного телефона получал, сверх того, и дополнительную скидку в размере 750 руб. Определите число m, если итоговая выручка салона от продажи телефонов составила 2 413 750 руб.

Решение.

Пусть x - количество телефонов, проданных с максимальной $(500 + 750 = 1250$ руб.) скидкой. Количество остальных акционных телефонов тогда выражается формулой $2x + r$, где $r \in \{0, 1, 2\}$. При этом общая сумма скидок, равная $1250x + 500(2x + r) = 2250x + 500r$ (руб.), равна с другой стороны $495 \cdot 5000 - 2413750 = 61250$ (руб.).

Уравнение $2250x + 500r = 61250$ при $r = 0$ и $r = 2$ не имеет целых корней, а при $r = 1$ получается $x = 27$. Искомое m теперь находим как неполное частное от деления 495 на $27 + 2 \cdot 27 + 1 = 82$.

Ответ: 6.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**10**
Составлено какое-либо правильное уравнение относительно m (или тесно связанной с m величины) и показано, что $m = 6$ ему удовлетворяет.	+/-	**7**
Приведены расчеты, показывающие, что возможно равенство $m = 6$.	-/+	**3**
Составлено какое-либо правильное уравнение, но дальше продвижений нет.	-/.	**2**

Задание 2 (10 баллов)

Решите уравнение $\sin(\sin x) = \sin(1 + \cos x)$.

Решение.

Для данного равенства возможны два случая.

1. $\sin x = 1 + \cos x + 2\pi k,\ k \in Z;$ *при этом* $|2\pi k| = |\sin x - \cos x - 1| \le 1 + |\sin x - \cos x| = 1 + \sqrt{2}\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1 + \sqrt{2} < 2\pi$. *Отсюда* $k = 0$. *Далее,* $\sin x = 1 + \cos x \to \sin x - \cos x = 1 \to \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \to x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.
2. $\sin x + 1 + \cos x = \pi(2k + 1)$.
   Поскольку $|\sin x + 1 + \cos x| < 3 < \pi \le |\pi(2k + 1)|$,
   то в этом случае решений нет.

<u>Ответ:</u> $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**10**
Задача в основном решена, необходимые неравенства указаны, но не доказаны	+/-	**8**
Ход решений верный, но при выписывании корней допущены ошибки	-/+	**4**
С самого начала (и до конца решения) рассматривался только один из двух возможных случаев.	-/.	**2**

Задание 3 (12 баллов)

Десятичная запись суммы 3 + 33 + 333 + ... + 33…3 оканчивается на 2023. Каким наименьшим может быть количество цифр в последнем слагаемом?

Решение.

Указанную сумму обозначим через *S*, а количество слагаемых в ней (совпадающее с количеством цифр в последнем слагаемом) - через *n*. Тогда сумма остатков слагаемых от деления на 10 000 равна 369 + 3333(*n* - 3), и дает при делении на 10 000 равна 369 + 3333(n - 3) и дает при делении на 10 000 такой же остаток, что и S.

Поэтому выполнено равенство 369 + 3333(n - 1) =10000m + 2023,
где m - некоторое натуральное число.

Отсюда

$$n-3=\frac{10\,000\,m+2023-369}{3333}=3m+\frac{m+1654}{3333}$$
$$=3(3333k-1654)+k=10000k-4962,$$

где $k=\frac{m+1654}{3333}$ $-$ натуральное число.

При k =1 получается n = 10 000 - 4962 + 3 = 5041.

<u>Ответ:</u> 5041

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Ход решений верный, но допущены ошибки в вычислениях	**+/-**	**7-9**
Верно составлено уравнение, но дальше продвижений нет	**-/+**	**3**
Отмечено, что можно ограничится рассмотрением остатков по модулю 10 000, но дальше продвижений нет	**-/.**	**1**

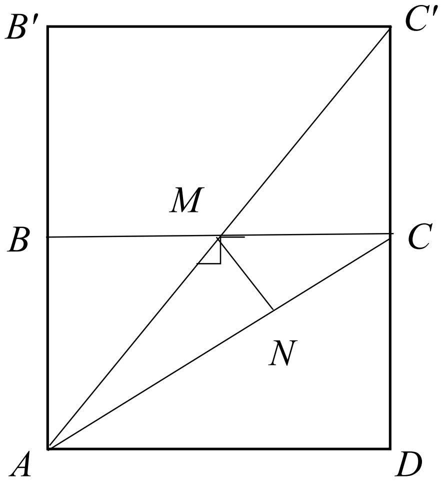
Задание 4 (12 баллов)

На поверхности куба $ABCDA'B'C'D'$ построена замкнутая линия, каждая точка X которой обладает следующим свойством: длина кратчайшего пути по поверхности куба между точками X и A равна длине кратчайшего пути по поверхности куба между X и C'. Найдите длину этой линии, если длина ребра куба равна 1.

Решение.

Из соображений симметрии ясно, что ребрами $A'B'$, $B'B$, BC, CD, DD', $D'A'$ и отрезками AB', AC, AD', $C'B$, $C'A'$, $C'D$ линия, о которой идет речь в условии задачи, разбивается на 12 равных частей. Поэтому достаточно рассмотреть точки, принадлежащие треугольнику ABC.

Пусть P - одна из таких точек. Тогда кратчайшим путем между P и A служит отрезок PA, а кратчайшим путем между P и C' - двухзвенная ломаная PKC', вершина K которой принадлежит ребру BC (в случае $P\in BC$ имеем просто отрезок PC'). На ребрах куба объединение граней $ABCD$ и $BB'CC'$ представляет собой прямоугольник $AB'C'D$, а ломаная PKC' - отрезок PC' в нем. Условие $PA = PC'$ означает, что P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC'; этот перпендикуляр пересекается с треугольником ABC по отрезку MN, где M середина ребра BC, а N - точка на отрезке AC, $\angle AMN = 90°$ (см рисунок).



Найдем длину отрезка MN.

Из равенств $\operatorname{tg}\angle BAM = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$, $\angle MAN = 45° - \angle BAM$,

и формулы тангенса разности углов получаем

$$\operatorname{tg}\angle MAN = \frac{1}{3},$$

откуда

$$MN = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}\sqrt{AB^2 + BM^2} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

Умножив это число на 12, получим ответ к задаче.

Ответ: $2\sqrt{5}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Приведено правильное построение линии, но длина линии не найдена или найдена неверно в результате ошибок в вычислениях.	+/-	**8-10**
Отмечено, что линия является 12-звенной ломаной	-/.	**1**

Задание 5 (12 баллов)

При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log_x 5} - \dfrac{1}{\log_y 5} = 1, \\ y = ax^2 + x + 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Область допустимых значений переменных задается условиями

$$x > 0, x \neq 1,\ y > 0\ ,\ y \neq 1.$$

Из первого уравнения получаем

$$\log_5 x - \log_5 y = 1,\ \log_5 \frac{x}{y} = 1, x = 5y$$

При $x = 5y$ второе уравнение системы имеет вид

$$25ay^2 + 4y + 1 = 0.$$

Ясно, что если $a \geq 0$, то $y < 0$, и система не имеет решений.

При $a < 0$ уравнение $25ay^2 + 4y + 1 = 0$ имеет ровно один положительный корень, причем исходная система тогда и только тогда не имеет решений, когда этот корень равен $\frac{1}{5}$ или 1.

Первое из этих чисел является корнем при $a = -\frac{9}{5}$, второе при $a = -\frac{1}{5}$.

Ответ: при $a \in \left\{-\frac{9}{5},\ -\frac{1}{5}\right\} \cup [0;\ +\infty)$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Ход решения верный, но не найдено одно из изолированных чисел.	**+/-**	**8**
Начало решения верное, но в итоге получен неверный ответ $a \in [0;\ +\infty)$.	**-/+**	**2**

Задание 6 (14 баллов)

В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AM и CN, а также высоты AP и CQ. Известно, что $MP = NQ$ и что радиус окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BA и BC, равен 1. Найдите периметр треугольника ABC.

Решение.

Докажем, что $\angle ABC = 60°$. Для этого положим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ и воспользуемся формулами $BC = 2R \sin\alpha$, $AB = 2R\sin\gamma$,
где R - радиус описанной окружности треугольника ABC.

Имеем

$$MP = |CM - CP| =$$

$$= \left|\frac{1}{2}BC - CP\right| = |R\sin\alpha - 2R\sin\beta\cos\gamma| = R\,|\sin(\beta+\gamma) - 2\sin\beta\cos\gamma| =$$

$$= R\,|\cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma| = R\,|\sin(\beta-\gamma)| = R\sin|\beta-\gamma|.$$

Аналогично

$$NQ = R\sin|\beta-\alpha|.$$

Поэтому $\sin|\beta-\gamma| = \sin|\beta-\alpha|$.

Поскольку из условия задачи вытекают соотношения

$$|\beta-\gamma| < 90°,\ |\beta-\alpha| < 90° \text{ и } \gamma \neq 0,$$

то $\beta - \gamma = -(\beta-\gamma)$, откуда $2\beta = \alpha+\gamma$.

С учетом равенства $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ это означает, что $\beta = 60°$.

Теперь найдем периметр треугольника ABC.

Пусть окружность с центром O касается стороны AC в точке K, а продолжений сторон BA и BC – в точках S и T соответственно.

Тогда $AK = AS$, $CK = CT$ и

$$AB+BC+AC = AB+BC+CT = BC+BT = 2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 2\operatorname{ctg}30° = 2\sqrt{3}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**14**
Установлено равенство ∠B = 60°, но периметр треугольника не найден	+/2	**7**
Равенство ∠B=60° не доказано, но с его использованием найден периметр.	-/+	**2**

Задание 7 (14 баллов)

Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 18x + 45}.$$

Решение.

Область определения функции $f(x)$ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 18x + 45 \geq 0, \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, функция $f(x)$ определена при $x \in (-\infty;\ 3] \cup [15;\ +\infty)$.

Производная функции равна

$$f'(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}} + \frac{2x-18}{\sqrt{x^2-18x+45}}$$

Заметим, что $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty;\ 3]$ и $f'(x) > 0$ при $x \in [15;\ +\infty)$.

Итак, функция $f(x)$ возрастает на множестве $[15;\ +\infty)$ и убывает на множестве $(-\infty;\ 3]$.

Таким образом наименьшее значение функция достигает в одной из точек $x = 3$ или $x =15$.

Поскольку $f(3) = 5 < f(15) = \sqrt{481}$, то наименьшее значение равно 5.

Ответ: 5

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**14**
Получен верный ответ, но доказательство неравенства $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty;\ 3]$ неполное.	+/-	**10 - 12**
Получен верный ответ, но не доказано, что производная $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty;\ 3]$. Доказано, что $f'(x) > 0$ при $x \in [15;\ +\infty)$.	-/+	**6**
Отмечено, но не доказано, что функция принимает минимальное значение на границе области определения. Имееются определенные продвижения в доказательстве этого факта.	-/.	**2**

Задача 8 (16 баллов)

На плоскости отмечено 8 различных точек, среди которых есть красные, синие и зеленые. Точек других цветов нет. Известно, что сумма всех попарных расстояний между красными и синими точками равна 12, между красными и зелеными равна 10, а между синими и зелеными равна 1. Каким может быть количество красных отмеченных точек?

Решение.

Пусть отмечены красные точки $A_1, \ldots A_p$, синие точки $B_1, \ldots B_q$, и зеленые точки $C_1, \ldots C_r$.

Поскольку для каждой точки ($A_i\, B_j\, C_k$) выполняется неравенство треугольника $A_iB_j \le A_iC_k + B_jC_k$,

то

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} A_iB_j \le \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} (A_iC_k + B_jC_k)$$

Откуда

$$12\, r \le 10q + p.$$

Аналогично, просуммировав неравенства $A_iC_k \le A_iB_j + B_jC_k$, получим

$$10\, q \le 12r + p.$$

Далее перебором можно установить, что найденным соотношениям и равенству $p + q + r = 8$ удовлетворяют ровно две тройки натуральных чисел

$$p = 4,\ q = 2, r = 2 \text{ и } p = 6,\ q = 1, r = 1.$$

Покажем, что оба найденных варианта могут быть реализованы на прямой. Каждую из отмеченных точек будем задавать ее координатой.

Первый вариант:

$$A_1 = 1,\ A_2 = \frac{5}{4},\ A_3 = \frac{3}{2}\ , A_4 = \frac{5}{2},\ B_1 = 0,\ B_2 = \frac{1}{8}\ ,\ C_1 = \frac{1}{4},\ C_2 = \frac{3}{8}$$

Второй вариант:

$$A_1 = \frac{1}{5},\ A_2 = \frac{2}{5}\ , A_3 = \frac{3}{5},\ , A_4 = \frac{4}{5},\ A_5 = 3,\ A_6 = 7,\ B_1 = 0,\ C_1 = 1$$

<u>Ответ:</u> 4 или 6

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**16**
Установлено, что все числа, кроме 4 и 6 не подходят. Примеров нет.	+/-	**12**
Если пример(ы) для 4 и/или 6 красных точек	-/+	по **3** за каждый вариант

ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2022-2023 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс **Вариант 2**

Задание 1 (10 баллов)

Фитнес-центр продал 515 годовых абонементов, базовая цена каждого из которых составляла 8000 рублей. При этом каждый m-й продаваемый абонемент был акционный и продавался со скидкой равной 1000 руб. Покупатель каждого четвертого акционного абонемента получал, сверх того, и дополнительную скидку в размере 1500 руб. Определите число m, если итоговая выручка фитнес-центра от продажи абонементов составила 3 979 500 руб.

Решение.

Пусть x - количество абонементов, проданных с максимальной (1000 + 1500 = 2500 руб.) скидкой. Количество остальных акционных абонементов тогда выражается формулой $3x + r$, где $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. При этом общая сумма скидок, равная $2500x + 1000(3x + r) = 5500x + 1000r$ (руб.), равна с другой стороны $515 \cdot 8000 - 39795000 = 140500$ (руб.).

Уравнение $5500x + 1000r = 1405000$ при r = 0, 1, 2 не имеет целых корней, а при r = 3 получается x = 25. Искомое m теперь находим как частное от деления 515 на $25 + 3 \cdot 25 + 3 =$ 103.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**10**
Составлено какое-либо правильное уравнение относительно m (или тесно связанной с m величины) и показано, что m = 5 ему удовлетворяет.	**+/-**	**7**
Приведены расчеты, показывающие, что возможно равенство m = 5.	**-/+**	**3**
Составлено какое-либо правильное уравнение, но дальше продвижений нет.	**-/.**	**2**

Задание 2 (10 баллов)

Решите уравнение $\sin(\cos x) = \sin(1 + \sin x)$.

Решение.

Для данного равенства возможны два случая.

1. $\cos x = 1 + \sin\ x + 2\pi k, k \in Z;$ *при этом* $|2\pi k| = |1 + \sin x - \cos x| \leq 1 + |\sin x| + |\cos x| \leq 1 + 1 + 1\ \leq 2\pi.|$ *Отсюда* $k = 0.$ *Далее,* $\cos x = 1 + \sin x \underset{\rightarrow}{\Leftrightarrow} \cos x - \sin x = 1 \underset{\rightarrow}{\Leftrightarrow} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{\rightarrow}{\Leftrightarrow} x = -\frac{\pi}{4}\ \pm\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$
2. $\cos x + 1 + \sin x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$ *Поскодльку* $|\cos x + 1 + \ \sin x| \leq |\cos x| + 1 + |\sin x| \leq 1 + 1 + 1 < \pi \leq |\pi + 2\pi k|$, *то в этом случае решений нет*.

<u>Ответ</u>: $-\frac{\pi}{4}\ \pm\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**10**
Задача в основном решена, необходимые неравенства указаны, но не доказаны	+/-	**8**
Ход решений верный, но при выписывании корней допущены ошибки	-/+	**4**
С самого начала (и до конца решения) рассматривался только один из двух возможных случаев.	-/.	**2**

Задание 3 (12 баллов)

Десятичная запись суммы 1 + 11 + 111 + ... + 11...1 оканчивается на 2023. Каким наименьшим может быть количество цифр в последнем слагаемом?

Решение:

Указанную сумму обозначим через S, а количество слагаемых в ней (совпадающее с количеством цифр в последнем слагаемом) - через n. Тогда сумма остатков слагаемых от деления на 10 000 равна 123 + 1111(n-3), и дает при делении на 10 000 такой же остаток, что и S.

Поэтому выполнено равенство 123 + 1111(n-3) =10000m +2023,
где m - некоторое натуральное число.

Отсюда

$$n-3 = \frac{10\,000\,m+2023-123}{1111} = 9m+\frac{m+789}{1111}+1$$

Наименьшее m, при котором m + 789 делится на 1111, равно 1111-789=322.

Следовательно, искомое решение n равно 3+9·322+1+1=2903

<u>Ответ:</u> 2903

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Ход решений верный, но допущены ошибки в вычислениях	**+/-**	**7-9**
Верно составлено уравнение, но дальше продвижений нет	**-/+**	**3**
Задача сведена к рассмотрению остатков по модулю 10000, но дальше продвижений нет	**-/.**	**1**

Задание 4 (12 баллов)

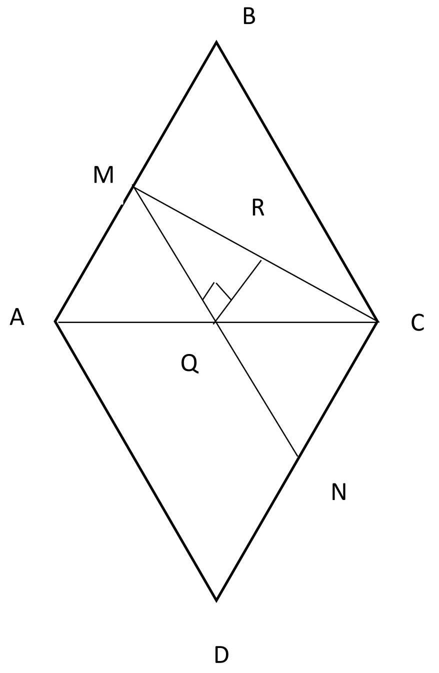
На поверхности правильного тетраэдра *ABCD* построена замкнутая линия, каждая точка *X* которой обладает следующим свойством: длина кратчайшего пути по поверхности тетраэдра между *X* и серединой ребра *AB* равна длине кратчайшего пути по поверхности тетраэдра между *X* и серединой ребра *CD*. Найдите длину этой линии, если длина ребра тетраэдра равна 1.

Решение.

Пусть *M* и *N* середины ребер *AB* и *CD* соответственно. Из соображений симметрии ясно, что ребрами *AC*, *BC*, *BD*, *AD* и отрезками *AN*, *BN*, *CM*, *DM* линия, о которой идет речь в условии задачи разбивается на 8 равных. Поэтому достаточно рассмотреть точки, принадлежащие треугольнику *AMC*.

Пусть *P* - одна из таких точек. Тогда кратчайшим путем между *P* и *M* служит отрезок *PM*, а кратчайшим путем между *P* и *N* - двухзвенная ломаная *PKN*, вершина *K* которой принадлежит ребру *AC* (в случае $P \in AC$ имеем просто отрезок *PN*). На развертке тетраэдра объединение граней *ABC* и *ADC* представляет собой ромб *ABCD*, а ломаная *PKN* - отрезок *PN* в нем. Условие *PM* = *PN* означает, что *P* лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *MN*; следовательно геометрическим местом точек *P* служит отрезок *QR*, где *Q* -

середина ребра AC (и середина отрезка MN) R - точка на отрезке MC, $\angle MQR = 90°$ (см рисунок).



Найдем длину отрезка QR. Легко видеть, что $\angle\, QMR = 30°$,

а отрезок QM, будучи средней линией треугольника ABC, имеет длину $\dfrac{1}{2}$.

Поэтому $QR = \frac{1}{2} tg 30° = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Умножив это число на 8, получим ответ к задаче: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Приведено правильное построение линии	+/-	**8-10**
Отмечено, что линия является 8-звенной ломаной	-/.	**1**

Задание 5 (12 баллов)

При каких значениях параметра а система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log_x 3} + \dfrac{1}{\log_y 3} = 1, \\ y = 3 - ax. \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Область допустимых значений переменных задается условиями

$$x > 0, x \neq 1,\ y > 0\ ,\ y \neq 1.$$

Из первого уравнения получаем

$$\log_3 x - \ \log_3 y = 1,$$

откуда

$$xy = 3.$$

Подставив $y = \frac{3}{x}$ во второе уравнение, получим

$$ax^2 - 3x + 3 = 0$$

Мы должны найти все такие a, при которых это уравнение не имеет положительных корней, отличных от 1 и 3.

Если $a = 0$, то $x = 1$ единственный корень. Но $x \neq 1$.

Если же $a \neq 0$ и дискриминант $D = 9 - 12a$ отрицателен, то действительных корней нет вообще.

Итак при $a \in \{0\} \cup \left(\frac{3}{4},\ +\infty\right)$ исходная система решений не имеет.

При $a \leq \frac{3}{4}$ хотя бы один положительный корень у квадратного уравнения есть, поскольку сумма корней и их произведение имеют одинаковый знак. Если же один из корней равен 3, то $a = \frac{2}{3}$ и уравнение $\frac{2}{3}x^2 - 3x + 3 = 0$ имеет также корень $x = \frac{3}{2}$ (а исходная система имеет решение $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

<u>Ответ:</u> при $a \in \{0\} \cup \left(\frac{3}{4},\ +\infty\right)$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Ход решения верный, но не доказано наличие решений исходной системы при $a \leq \frac{3}{4}$, $a \neq 0$	+/-	**8**
Пропущен случай а = 0	-/.	**1**

Задание 6 (14 баллов)

В неравнобедренном треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Известно, что $AA_1 : BB_1 = AC : BC$ и что радиус окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон CA и CB, равен 1. Найдите периметр треугольника ABC.

Решение: Докажем, что $\angle ABC = 60°$. Для этого положим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ и воспользуемся теоремой синусов.

Имеем:

$$\frac{AA_1}{\sin\gamma} = \frac{AC}{\sin\angle AA_1C}, \qquad \frac{BB_1}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\angle BB_1C},$$

откуда

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sin\angle BB_1C}{\sin\angle AA_1C},$$

С учетом условия $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}$ это означает, что $\sin\angle BB_1C = \sin\angle AA_1C$

Равенству $\alpha = \beta$, противоречило бы условию задачи.

Поэтому $\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} + \beta = 180°$, откуда $\alpha + \beta = 120°$ и $\gamma = 60°$

Теперь найдем периметр треугольника ABC. Пусть окружность с центром O касается стороны AC в точке K, а продолжений сторон CA и CB – в точках S и T соответственно.

Тогда $AK = AS$, $BK = BT$

и

$$AB + CA + CB = CA + AS + CB + BT = CS + CT =$$
$$= OS\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + OT\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = 2\operatorname{ctg}30° = 2\sqrt{3}$$

<u>Ответ:</u> $2\sqrt{3}$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**14**
Установлено равенство $<C=60°$, но периметр треугольника не найден	+/2	**7**
Равенство $<C=60°$ не доказано, но с его использованием найден периметр	-/+	**2**

Задание 7 (14 баллов)

Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 13} + \sqrt{2x^2 + 8x + 26}.$$

Решение.

Рассмотрим векторы

$$\vec{a} = (x + 3;\ 2 - x), \vec{b} = (1 - x;\ x + 5) \text{ и } \vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (4; 7)$$

$\underset{a}{\rightarrow}$ $(x+3; 2-x)$, $\underset{в}{\rightarrow}$ $(1-x; x+5)$ и $\underset{s}{\rightarrow}=\underset{a}{\rightarrow}+\underset{в}{\rightarrow}=(4;7)$.

Так как

$$|\vec{a}| = \sqrt{2x^2 + 2x + 13}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2x^2 + 8x + 26},$$

то

$$f(x) = |\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{s}| = \sqrt{65}.$$

Равенство $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ выполняется, когда эти векторы сонаправлены; соответствующие значения x является корнем уравнения $\frac{x+3}{1-x} = \frac{2-x}{x+5}$
и равно $-\frac{13}{11}$.

Ответ: $\sqrt{65}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**14**
Установлено, что f(x) $\geq \sqrt{65}$, но не показано,что значение достигается	**-/+**	**6**

Задача 8 (16 баллов)

На плоскости отмечено 9 различных точек, среди которых есть красные, синие и зеленые. Точек других цветов нет. Известно, что сумма всех попарных расстояний между красными и синими точками равна 13, между красными и зелеными равна 11, а между синими и зелеными равна 1. Каким может быть количество красных отмеченных точек?

Решение.

Пусть отмечены красные точки $A_1, \ldots .A_p$, синие точки $B_1, \ldots .B_q$, и зеленые точки $C_1, \ldots .C_r$.

Поскольку для каждой точки ($A_i\, B_j\, C_k$) выполняется неравенство треугольника $A_i B_j \leq A_i C_k + B_j C_k$,

то

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} A_i\, B_j \leq \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} (A_i\, C_k + B_j C_k)$$

Откуда

$$13\, r \leq 11q + p.$$

Аналогично, просуммировав неравенства $A_i C_k \leq A_i B_j + B_j C_k$, получим

$$11\, q \leq 13r + p.$$

Далее перебором можно установить, что найденным соотношениям и равенству $p + q + r = 9$ удовлетворяют ровно две тройки натуральных чисел

$$p = 5,\ q = 2, r = 2 \text{ и } p = 7,\ q = 1, r = 1.$$

Покажем, что оба найденных варианта могут быть реализованы на прямой. Каждую из отмеченных точек будем задавать ее координатой.

Первый вариант:

$A_1 = \frac{3}{16},\ A_2 = 1,\ A_3 = \frac{3}{2}\ , A_4 = 2,\ A_5 = \frac{17}{16}\ B_1 = 0,\ B_2 = \frac{1}{8}\ ,\ C_1 = \frac{1}{4},\ C_2 = \frac{3}{8}$

Второй вариант:

$A_1 = \frac{1}{6},\ A_2 = \frac{1}{3}\ , A_3 = \frac{1}{2},\ , A_4 = \frac{2}{3},\ A_5 = \frac{5}{6},\ A_6 = 5,\ A_7 = 7\ B_1 = 0,\ C_1 = 1$

<u>Ответ:</u> 5 или 7

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**16**
Установлено, что все числа, отличные от 5 и 7, не подходят. Примеров нет.	+/-	**12**
Если пример(ы) для 5 и/или 7 красных точек	-/+	по **3** за каждый вариант