Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике
Отборочный тур.

вариант 1.

7 класс

7.1. Дан прямоугольник, у которого длина в три раза больше ширины. Известно, что периметр прямоугольника численно равен его площади. Найдите стороны прямоугольника.

Ответ: $\frac{8}{3}$ и 8. **Решение.** Пусть x – ширина, тогда $3x$ – длина прямоугольника. Из условий задачи $2(3x+x) = 3x \cdot x \Leftrightarrow 8x = 3x^2$. Отсюда, деля на x ($\neq 0$), получим $x = \frac{8}{3}$; $3x = 8$.

7.2. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, в записи которых нет ни цифры 0, ни цифры 9.

Ответ: 255 744. **Решение.** Будем складывать числа столбиком. Каждая последняя цифра (например, двойка) встречается в разряде единиц столько раз, сколько имеется трехзначных чисел указанного вида с этой последней цифрой (в нашем примере -- это числа вида $\overline{xy2}$, где x, y – произвольные цифры от 1 до 8 включительно.). Значит, двойка, так же, как любая другая цифра от 1 до 8, встретится в разряде единиц $8 \cdot 8 = 64$ раза. Таким образом, сумма цифр в разряде единиц равна $64 \cdot (1+2+...+8) = 2304$. Аналогично, в разряде десяток и сотен получим ту же сумму 2304. В итоге искомая сумма всех чисел равна

$$2304 \cdot 100 + 2304 \cdot 10 + 2304 = 2304 \cdot 111 = 255\,744$$

7.3. Можно ли стоящие по порядку 200 чисел: 1, 2, …, 200 переставить так, чтобы соседние числа стали отличаться либо на 3, либо на 5?

Ответ: можно. **Решение.** Переставим числа следующим образом:

1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9 … так можно перейти к следующей восьмёрке чисел. И для очередной восьмёрки чисел аналогичная перестановка приводит к началу следующей восьмёрки:

8n + 1, 8n + 4, 8n + 7, 8n + 2, 8n + 5, 8n + 8, 8n + 3, 8n + 6, 8(n + 1) + 1.

Поскольку 200 делится на 8, такая перестановка возможна (на последнем шаге не требуется переходить к числу 201, так что последнее число в ряду будет $198 = 8 \cdot 24 + 6$.

7.4. В ряд выложены 23 одинаковые по виду монеты: настоящие и фальшивые. Известно, что всего фальшивых монет шесть и они лежат подряд. Они отличаются по весу от настоящих (но могут отличаться по весу и друг от друга, настоящие монеты весят одинаково). Можно ли с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету?

Ответ: можно. **Решение.** Выделим в ряду шестую, двенадцатую и восемнадцатую монеты. Поскольку между соседними выделенными монетами ровно 5 других монет, а от крайних выделенных до конца ряда тоже 5 монет, то ровно одна из выделенных монет фальшивая. Возьмём из этих трёх выделенных монет две (например, 6-ю и 12-ю) и первым взвешиванием сравним их веса. Если их веса одинаковы, то это – настоящие монеты (т.к. среди выделенных монет не может быть двух фальшивых) и значит, третья выделенная монета (под номером 18) фальшивая, так что второго взвешивания не потребуется. Если же веса при первом взвешивании отличаются, то среди этих двух монет одна настоящая, а другая – фальшивая. Поэтому третья выделенная монета (под номером 18) настоящая, и вторым взвешиванием сравним эту («эталонную») монету с той, что участвовала в первом взвешивании, пусть, для определённости – под номером 6. Равновесие во втором взвешивании покажет, что и она настоящая, а значит фальшивая – под номером 12. В противном случае, эта монета под номером 6 – фальшивая.

8 класс

8.1. Дан прямоугольник, у которого длина в три раза больше ширины. Известно, что периметр прямоугольника численно равен его площади. Найдите стороны прямоугольника.

Ответ: $\frac{8}{3}$ и 8. **Решение.** См. задачу 7.1.

8.2. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. На боковой стороне BC отмечены точки K и N (K лежит между B и N). Оказалось, что $KN=AN$ и $\angle BAK = \angle NAC$. Найдите $\angle BAN$.

Ответ: 60°. **Решение.** Пусть $\angle BAK = \angle NAC = x$, $\angle KAN = y$. В равнобедренном треугольнике AKN. угол AKN (при основании) тоже равен y. Углы при основании треугольника ABC равны $2x + y$, а угол при вершине B поэтому равен $180^\circ - 2(2x + y)$. Внешний угол $\angle AKN = y$ в треугольнике AKB равен $x + 180^\circ - 2(2x + y) = 180^\circ - 3x - 2y$. Тогда из уравнения $y = 180^\circ - 3x - 2y$ получаем $x + y = 60^\circ$, т.е. $\angle BAN = 60^\circ$.

8.3. Чему равно наименьшее натуральное число n, для которого найдутся натуральные x и y, удовлетворяющие уравнению **а)** $x \cdot (x + n) = y^2$; **б)** $x \cdot (x + n) = y^3$?

Ответ: **а)** $n = 3$; **б)** $n = 2$. **Решение. а**) При $n = 3$ такие x и y существуют: $x = 1$, $y = 2$. Невозможность значений $n = 1$ и $n = 2$ следует из неравенств $x^2 < x(x+1) < (x+1)^2$ и $x^2 < x(x+2) < (x+1)^2$. **б)** При $n = 2$ такие x и y существуют: $x = 2$, $y = 2$. При $n = 1$ из уравнения $x(x+1) = y^3$ следует, что два последовательных натуральных числа x и $(x+1)$ являются кубами натуральных чисел, т.к. x и $(x+1)$ – взаимно простые числа (действительно: если произведение ab двух взаимно простых чисел a и b есть точный куб, то кубы простых чисел, входящие в разложение этого произведения на простые множители, входят в разложение только одного из этих чисел – a или b). но очевидно, что это невозможно (кубы соседних натуральных чисел отличаются не меньше, чем на $7 = 2^3 - 1^3$.

8.4 В ряд выложены 23 одинаковые по виду монеты: настоящие и фальшивые. Известно, что всего фальшивых монет шесть и они лежат подряд. Они отличаются по весу от настоящих (но могут отличаться по весу и друг от друга, настоящие монеты весят одинаково). Можно ли с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету?

Ответ: можно. **Решение.** См. задачу 7.4.

9 класс

9.1 Дан квадратный трехчлен ax^2+bx+c, имеющий корни. Обязательно ли имеет корни квадратный трёхчлен **а**) $a^2x^2 + b^2x + c^2$? **б**) $a^3x^2 + b^3x + c^3$?

Ответ: **а**) не обязательно; **б**) обязательно. **Решение. а**) Рассмотрим пример квадратного трёхчлена $x^2 + x - 6$, имеющего корни (- 3 и 2), в то время как трехчлен $x^2 + x + 36$ корней не имеет. **б)** Имеем $b^2 \geq 4ac$, так как у исходного трехчлена дискриминант неотрицательный. Если $ac > 0$, то возведём неравенство (с положительной правой и левой частью) в куб и получим: $b^6 \geq 64a^3c^3 > 4a^3c^3$, т.е. дискриминант и у второго трёхчлена положительный. Если же $ac \leq 0$, то неравенство очевидно (в правой части отрицательное число). (*Комментарий: можно не рассматривать два случая, а воспользоваться монотонным возрастанием кубической параболы при всех действительных аргументах).*

9.2 Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. На боковой стороне BC отмечены точки K и N (K лежит между B и N). Оказалось, что $KN=AN$ и $\angle BAK = \angle NAC$. Найдите $\angle BAN$.

Ответ: 60°. **Решение.** См задачу 8.2.

9.3. Чему равно наименьшее натуральное число n, для которого найдутся натуральные x и y, удовлетворяющие уравнению а) $x\cdot(x+n)=y^2$; б) $x\cdot(x+n)=y^3$?

Ответ: **а)** n=3; **б)** n=2. **Решение.** См. задачу 8.3.

9.4. Дано 100 положительных чисел. Можно ли утверждать, что: **а**) сумма любых десяти из них меньше 10, если известно, что сумма любых семи из них меньше 7; **б)** сумма любых семи из них меньше 7, если известно, что сумма любых десяти из них меньше 10?

Ответ: **а**) можно; **б**) нельзя. **Решение.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ -- произвольные 10 чисел из данных 100 чисел. Требуется доказать, что их сумма меньше 10, если сумма любых семи чисел меньше 7. Обозначим

$$S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_7,\ S_2 = x_2 + x_3 + \ldots + x_8, \ldots, S_{10} = x_{10} + x_1 + \ldots + x_6$$

(суммы S_i – циклические, они получаются, если расположить числа $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ по кругу и складывать по 7 чисел подряд, начиная с x_i), и по условию все $S_i < 7$. Тогда $S_1 + S_2 + \ldots + S_{10} = 7\cdot(x_1 + x_2 + \ldots + x_{10})$, т.к. при суммировании чисел $S_1 + S_2 + \ldots + S_{10}$ каждое x_i будет сосчитано 7 раз. Поэтому $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = \frac{1}{7}(S_1 + S_2 + \ldots + S_{10}) < \frac{1}{7}\cdot 10\cdot 7 = 10$, что и требовалось доказать. **б**) Пример можно привести такой: семь из 100 чисел равны по 1.2 , а остальные 93 числа равны по 0.01. Тогда сумма любых десяти чисел меньше 8.5, в то время как сумма самых больших семи чисел равна 8.4.

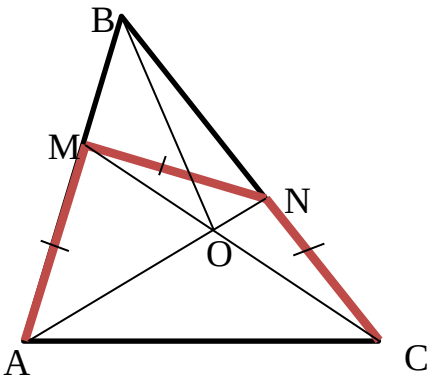
10 класс

10.1. Дан квадратный трехчлен ax^2+bx+c, имеющий корни. Обязательно ли имеет корни квадратный трёхчлен

а) $a^2x^2+b^2x+c^2$? **б**) $a^3x^2+b^3x+c^3$?

Ответ: **а**) не обязательно; **б**) обязательно. **Решение.** См. задачу 9.1.

10.2. В треугольнике ABC угол B равен 60º. На сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно. Оказалось, что $AM = MN = NC$. Докажите, что точка пересечения отрезков CM и AN совпадает с центром окружности, описанной около ΔABC.



Решение. Пусть O – точка пересечения CM и AN. Обозначим $\angle MAO=\alpha$, $\angle NCO=\beta$. Тогда в равнобедренных треугольниках AMN и MNC имеем: $\angle MNO=\alpha$, $\angle NMO=\beta$. По свойству внешнего угла $\angle MOA$ в треугольниках MNO и AOC получим: $\angle MOA=\alpha+\beta$ и $\angle MOA=180^\circ-60^\circ-(\alpha+\beta)$. Отсюда $\alpha+\beta=60^\circ$. Поэтому $\angle MON=120^\circ$, и значит, около четырехугольника $MONB$ можно описать окружность (сумма противоположных углов $\angle ABC$ и $\angle MON$ равна 180º). Тогда $\angle MBO=MNO=\alpha$. Следовательно, ABO – равнобедренный треугольник: $AO=OB$. Аналогично, $BO=OC$.

10.3. Сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{45}$ представили в виде дроби со знаменателем 45!=1·2···45. Сколькими нулями (в десятичной записи) оканчивается числитель этой дроби?

Ответ: 8 нулями**. Решение.** Числитель дроби равен сумме чисел вида $1\cdot 2\cdot ...\cdot (k-1)(k+1)\cdot ...\cdot 45$ (в произведении отсутствует одно из натуральных чисел от 1 до 45). Обозначим такое слагаемое c_k. Заметим, что $45!=5^{10}\cdot 2^{\boldsymbol{n}}\cdot \boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{p}$ взаимно просто с 10, а n > 15 (на самом деле $\boldsymbol{n}=\left[\frac{45}{2}\right]+\left[\frac{45}{2^2}\right]+...+\left[\frac{45}{2^5}\right]=22+11+5+2+1=41$), т.е. 45! оканчивается 10 нулями. В числителе в указанной сумме слагаемые c_k при k, не кратном пяти, будут делиться на $5^{10}\cdot 2^{10}$, т.е. такие слагаемые оканчиваются 10 нулями. Слагаемые c_k при k, кратном пяти, но не равном 25, будут делиться на $5^9\cdot 2^9$ и, значит, будут оканчиваться 9 нулями. Есть только одно слагаемое, а именно, c_{25} , в которое 5 входит в 8-й степени, и только это слагаемое оканчивается 8 нулями. Значит, числитель оканчивается 8 нулями.

10.4. Дано 100 положительных чисел. Можно ли утверждать, что: **а**) сумма любых десяти из них меньше 10, если известно, что сумма любых семи из них меньше 7; **б)** сумма любых семи из них меньше 7, если известно, что сумма любых десяти из них меньше 10?

Ответ: **а**) можно; **б**) нельзя. **Решение.** См. задачу **9.4.**

11 класс

11.1 Дан треугольник, у которого два угла α,β удовлетворяют соотношению $\cos\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin\beta$. Обязательно ли этот треугольник прямоугольный?

Ответ: обязательно. **Решение.** Перепишем данное соотношение в виде $2\cos((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)=2\sin((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$.

Заметим, что $\cos((\alpha-\beta)/2)\neq 0$, т.к. в противном случае $\alpha-\beta=180°$. Тогда $\cos((\alpha+\beta)/2)=\sin((\alpha+\beta)/2)$ и поэтому $tg((\alpha+\beta)/2)=1$ (здесь деление на $\cos((\alpha+\beta)/2)$ возможно, т.к. синус и косинус одного и того же угла не могут быть равны 0 одновременно). Итак, $(\alpha+\beta)/2=45°$, т.е. $\alpha+\beta=90°$.

11.2. В треугольнике *ABC* угол *B* равен 60°. На сторонах *AB* и *BC* отмечены точки *M* и *N* соответственно. Оказалось, что *AM* = *MN* = *NC*. Докажите, что точка пересечения отрезков *CM* и *AN* совпадает с центром окружности, описанной около ΔABC.

Решение. См. задачу 10.2.

11.3. Сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{45}$ представили в виде дроби со знаменателем 45!=1·2···45. Сколькими нулями (в десятичной записи) оканчивается числитель этой дроби?

Ответ: 8 нулями**. Решение.** См. задачу 10.3.

11.4. В классе 30 человек, и к Новому Году каждый послал поздравительные письма не менее, чем 16 одноклассникам. Докажите, что было не менее 45 пар взаимных поздравлений.

Решение. Всего было отправлено не менее $30\cdot 16=480$ писем, а пар одноклассников всего $(30\cdot 29)/2=435$. Для каждой пары одноклассников может быть одна из трёх ситуаций: a) ни один из них не писал другому; b) только один написал другому; c) они обменились письмами. Обозначим число таких пар через *A*, *B* и *C*, соответственно. Тогда $B+2C\geq 480$ и $A+B+C=435$. Отсюда $C-A\geq 480-435=45$. Значит, $C\geq 45+A\geq 45$.

вариант 2

7 класс

7.1. Велосипедист планировал доехать из пункта *A* в пункт *F* за 5 часов, двигаясь с постоянной скоростью. С намеченной скоростью он ехал до середины пути, а потом увеличил скорость на 25%. С новой скоростью он доехал до пункта *B.* Сколько времени занял весь путь?

Ответ: 4 часа 30 минут. **Решение**. Пусть a — расстояние между пунктами *A* и *B*, v — запланированная скорость. Тогда $\frac{a}{v}=5$. Увеличенная скорость равна $1{,}25\,v$. Весь путь велосипедист проедет за $\frac{a}{2v}+\frac{a}{2\cdot 1{,}25v}=\frac{4{,}5}{5}\frac{a}{v}=4{,}5$ (час).

7.2. Найдите сумму всех четырехзначных натуральных чисел, составленных из цифр 3, 6 и 9.

Ответ: 539946. **Решение.** Будем складывать числа столбиком. Каждая последняя цифра (например, шестёрка) встречается в разряде единиц столько раз, сколько имеется трехзначных чисел указанного вида с этой последней цифрой (в нашем примере -- это числа вида $\overline{xyz6}$, где x, y, z – произвольные наборы из цифр 3, 6 и 9. Значит, шестёрка, так же, как тройка и девятка, встретится в разряде единиц $3\cdot 3\cdot 3=27$ раз. Таким образом, сумма цифр в разряде единиц равна $27\cdot(3+6+9)=486$. Аналогично, в разряде десяток, сотен и тысяч получим ту же сумму 486. В итоге искомая сумма всех чисел равна

$$486\cdot 1000+486\cdot 100+486\cdot 10+486=486\cdot 1111=539\,946$$

7.3. Докажите, что из любых шести целых чисел можно выбрать четыре числа и обозначить их *a, b, c, d* так, чтобы два числа *ab* и *cd* давали одинаковые остатки при делении на 3.

Решение. Из данных шести целых чисел выберем a, c, имеющие одинаковые остатки при делении на 3, а затем из оставшихся четырех чисел выберем b, d, имеющие одинаковые остатки при делении на 3. Тогда a,b,c,d - искомые числа. Действительно, поскольку $a-c=3k$ и $b-d=3n$ для некоторых целых k,n, то разность $ab-cd=(c+3k)(d+3n)-cd=$ $=3(kd+nc+3kn)$ делится на 3.

7.4. Квадрат разрезали (прямым разрезом) на два прямоугольника. Оказалось, что периметры обоих прямоугольников — числа целые. Верно ли, что периметр исходного квадрата также целое число?

Ответ: неверно. **Решение.** Приведем такой пример: квадрат со стороной $\frac{2}{3}$ (периметра $\frac{8}{3}$) разрежем на два равных прямоугольника: у каждого из них длина $\frac{2}{3}$, а ширина $\frac{1}{3}$, и значит, их периметры – целые числа, равные 2.

8 класс

8.1. Велосипедист планировал доехать из пункта *A* в пункт *B* за 5 часов, двигаясь с постоянной скоростью. С намеченной скоростью он ехал до середины пути, а потом увеличил скорость на 25%. С новой скоростью он доехал до пункта *B.* Сколько времени занял весь путь?

Ответ: 4 часа 30 минут. **Решение.** См. задачу 7.1.

8.2. На доске записано несколько целых чисел. Петя заменил каждое число (стерев его) следующим образом: вместо четного числа он записал его половину, а вместо нечетного – удвоенное. Могла ли сумма новых чисел стать равной сумме исходных, если сумма исходных чисел равнялась **а**) 2021; **б**) 2022?

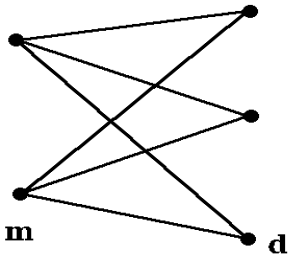
Ответ: **а**) не могла. **б**) могла. Обозначим через A начальную сумму четных чисел на доске, через B – сумму нечетных чисел и пусть $n=A+B$. Тогда имеем равенство $\frac{A}{2}+2B=A+B \Leftrightarrow A=2B$. Значит, сумма на доске должна быть равна $A + B = 3B = n$. В случае: **а)** $n = 2021$, и это приводит к противоречию с делимостью на 3. В случае б), когда $n = 2022$, можно привести такой пример: на доске записаны два числа $a = 1348$ и $b = 674$.

8.3. Дан остроугольный треугольник ABC. Точка M – точка пересечения его высот. Найдите угол A, если известно, что $AM = BC$.

Ответ: 45°. **Решение**. Пусть K — основание высоты из точки B. Докажем, что треугольники AMK и BKC равны. Действительно, имеем прямоугольные треугольники, у которых $\angle MAK = \angle CBK = 90° - \angle C$ и, по условию, $AM = BC$. Тогда из равенства треугольников следует, что $AK = BK$, и значит, в прямоугольном треугольнике ABK катеты равны. Поэтому $\angle A = 45°$.

8.4. В классе каждый мальчик дружит ровно с тремя девочками, а каждая девочка – ровно с двумя мальчиками. Может ли в этом классе быть всего: **а**) 32 человека? **б**) 30 человек?

Ответ. а) не может**; б)** может**. Решение**. а) Пусть m -- число мальиков, d -- число девочек. С одной стороны, число дружеских связей равно $3m$ (если просуммировать их число для всех мальчиков), с другой стороны, оно равно $2d$. Итак, $3m = 2d$. Значит, m -- четное число: $m = 2k$ для некоторого натурального k, и тогда $d = 3k$. Получаем $m + d = 5k$, поэтому в классе не может быть 32 человек. **б**) Построим пример для 30 человек: рассмотрим класс, где 12 мальчиков и 18 девочек, и разобъем учеников на пятерки (всего 6 пятёрок), состоящие из двух мальчиков и трёх девочек. В пятёрке каждый мальчик дружит с каждой девочкой (соответствующий граф для такой пятерки показан на рисунке).



9 класс

9.1. Дано уравнение $x^3 + 5y = y^3 + 5x$. Существуют ли удовлетворяющие этому уравнению **а**) натуральные числа $x \neq y$? ; **б**) целые числа $x \neq y$?

Ответ: **а)** не существуют**; б)** не существуют. **Решение**. Имеем $x^3 - y^3 = 5(x - y)$. Если $x \neq y$, то отсюда после деления на $(x - y)$ получим $x^2 + xy + y^2 = 5$. **а**) Для натуральных x, y: самые маленькие (и различные) натуральные числа 1 и 2 при подстановке в левую часть последнего уравнения дают $7 > 5$, а значит, и при бóльших значениях левая часть будет больше правой. **б)** Если оба числа x, y отрицательны, то, сменив знаки у обоих чисел, получим ответ пункта а**)**. Если хотя бы одно из чисел x, y равно нулю, то это сразу приводит к противоречию (т.к. число 5 не является точным квадратом). Пусть теперь, для определённости, число x положительно, а y отрицательно: $y=–z$, $z>0$. Тогда имеем уравнение в натуральных числах $x^2 - xz + z^2 = 5$. Проверим сначала $z=1$ и $z=2$. При $z=1$ имеем уравнение $x(x-1) = 4$, а при $z=2$ – уравнение $x(x-2) = 1$. Легко видеть, что у этих квадратных уравнения нет целых корней. Далее, приведём наше уравнение к виду $(x - \frac{z}{2})^2 + \frac{3}{4}z^2 = 5$, и при $z \geq 3$ его левая часть больше или равна $27/4>5$.

8.2 Дан остроугольный треугольник ABC. Точка M – точка пересечения его высот. Найдите угол A, если известно, что $AM = BC$.

Ответ: 45°. **Решение**. См. задачу 8.3.

8.3 Существует ли выпуклый 27-угольник, у которого все углы различны и выражаются целым числом градусов?

Ответ: не существует. **Решение**. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника равна 360°. Если бы все углы 27-угольника были различными натуральными числами, то сумма внешних углов была бы не меньше $1^\circ + 2^\circ + ... + 27^\circ = 378^\circ > 360^\circ$. Полученное противоречие показывает невозможность такого 27-угольника.

8.4 В классе каждый мальчик дружит ровно с тремя девочками, а каждая девочка – ровно с двумя мальчиками. Может ли в этом классе быть всего: **а**) 32 человека? **б**) 30 человек?

Ответ. а) не может**; б)** может**. Решение**. См. задачу 10.4.

10 класс

10.1. Дано уравнение $x^3 + 5y = y^3 + 5x$. Существуют ли удовлетворяющие этому уравнению **а**) натуральные числа $x \neq y$? ; **б**) действительные положительные числа $x \neq y$?

Ответ: **а)** не существуют**; б)** существуют. **Решение**. а) См. пункт а) задачи 9.1**. б)** Возьмем, например, $y = 2x$, и подставим в последнее уравнение: $x^2 + 2x^2 + 4x^2 = 5$. Тогда $x = \sqrt{\frac{5}{7}}$ и $y = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$ удовлетворяют уравнению.

10.2. Существует ли выпуклый 27-угольник, у которого все углы различны и выражаются целым числом градусов?

Ответ: не существует. **Решение**. См. задачу 9.3.

10.3. Дан четырехугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность. Докажите, что две окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в одной и той же точке.

Решение. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $AC = e$, и пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается AC в точке M. Тогда из равенства отрезков касательных получим, что $AM = \frac{a+e-b}{2}$. Аналогично, для окружности, вписанной в треугольник ACD и касающейся AC в точке N, получим: $AN = \frac{d+e-c}{2}$. Равенство $AM = AN$ равносильно равенству $a - b = d - c$ $\Leftrightarrow a + c = b + d$, а последнее равенство – это известное условие для четырехугольника, в который можно вписать окружность.

10.4. **а**) Докажите неравенство $\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < \sqrt{9n+3}$ для всех натуральных чисел n; **б)** существует ли такое натуральное n, для которого $[\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}] < [\sqrt{9n+3}]$? ($[a]$ — целая часть числа a).

Ответ: б) не существует. **Решение.. а)** После возведения обеих частей в квадрат и отделения квадратного корня получим равносильное верное неравенство $2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \Leftrightarrow 4n(n+1) < 4n^2 + 4n + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$. **б)** Предположим, от противного, что такое n существует. Тогда для некоторого натурального k будет выполнено двойное неравенство $\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < k \leq \sqrt{9n+3}$. Рассмотрим неравенство $k \leq \sqrt{9n+3} \Leftrightarrow k^2 \leq 9n+3$. Заметим, что

квадраты целых чисел не могут давать остатки 2 и 3 при делении на 9 (можно перебрать все возможные остатки, это числа 0, 1, 4, 7). Значит, неравенство $k^2 \le 9n+3$ означает фактически, что $k^2 \le 9n+1 \Leftrightarrow k \le \sqrt{9n+1}$. Поэтому $\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} < \sqrt{9n+1}$, что приводит к противоречию, т.к. на самом деле правая часть здесь меньше левой при всех n : действительно, после возведения в квадрат обеих частей и приведения подобных членов получается равносильное неравенство $\sqrt{n(n+1)} < n$, которое, очевидно, противоречиво .

11 класс

11.1. Найдите наименьший период функции $y = cos^{10}x + sin^{10}x$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$. **Решение.** Сначала проверяется, что $\frac{\pi}{2}$ – период функции. Действительно,

$$y(x+\frac{\pi}{2}) = (\cos^2(x+\frac{\pi}{2}))^5 + (\sin^2(x+\frac{\pi}{2}))^5 = \sin^{10} x + \cos^{10} x$$

Чтобы доказать, что это наименьший период, сделаем замену $u = \sin^2 x$. Тогда $y = (1-u)^5 + u^5$. Рассматривая функцию $y(u)$ на отрезке $[0,1]$ (это соответствует изменению x на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$), получаем, что $y(u)$ убывает на отрезке $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и возрастает на отрезке $\left[\frac{1}{2},1\right]$ (в этом можно убедиться, используя производную: она равна $-5(1-u)^4 + 5u^4$). Отсюда следует, что функция $y(x) = \cos^{10} x + \sin^{10} x$ не может иметь периода меньше $\frac{\pi}{2}$.

11.2. В копилке 1000 монет достоинством в 1 руб., 2 руб. и 5 руб. на общую сумму 2000 руб. Сколько в копилке монет каждого достоинства, если известно, что количество однорублевых монет – простое число.

Ответ: однорублевых монет – 3, двухрублевых – 996, пятирублевых – 1. **Решение.** Пусть x, y, z – число монет достоинством 1 руб., 2 руб. и 5 руб., соответственно. Тогда $x + y + z = 1000$ и $x + 2y + 5z = 2000$. Вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 2. Получим $x = 3z$. Таким образом, из условия о простоте числа x следует, что $x = 3$, и значит, $z = 1$. Тогда $y = 996$..

11.3. Дан четырехугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность. Докажите, что две окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в одной и той же точке.

Решение. См. задачу 10.3.

11.4. **а**) Докажите неравенство $\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} < \sqrt{9n+3}$ для всех натуральных чисел n; **б)** существует ли такое натуральное n, для которого $[\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}] < [\sqrt{9n+3}]$? ($[a]$ — целая часть числа a).

Ответ: б) не существует. **Решение.** См. задачу 10.4.