Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы Горы!» по математике

11 класс, 2022 год

Вариант 11-1

1. Какое число окажется на 2022-м месте в бесконечной последовательности $6, 7, 8, 9, 10, \ldots$, если в ней удалить все квадраты и кубы каких-либо натуральных чисел (то есть удалить числа $8 = 2^3, 9 = 3^2, 16 = 4^2, \ldots$)?

2. Решите неравенство

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leqslant \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right).$$

3. Среди всех вписанных четырёхугольников найдите четырёхугольник $ABCD$ с наименьшим периметром, в котором $AB = BC = CD$ и все попарные расстояния между точками A, B, C и D выражаются целыми числами. Чему при этом равен радиус описанной вокруг $ABCD$ окружности?

4. Последовательность a_n задана формулами $a_1 = \frac{4043}{2022}$, $a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$. Найдется ли натуральное число n такое, что $|a_n| \leqslant \frac{2022}{2021}$? Обоснуйте свой ответ.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Боковые грани SAB и SAC перпендикулярны плоскости ABC. Сфера радиусом, равным AC, с центром в точке S делит пирамиду на две части. Найдите объём большей из этих частей, если $SA = AB = 2$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$

представляет собой на числовой прямой промежуток длиной 1.