

# Олимпиада «Курчатов» по математике

## 11 класс, 2022 год

1. На тарелке лежат различные конфеты трёх видов: 2 леденца, 3 шоколадных и 5 мармеладных. Света последовательно все их съела, выбирая каждую следующую конфету наугад. Найдите вероятность того, что первая и последняя съеденные конфеты были одного вида.

2. В школьном турнире по крестикам-ноликам участвовали 16 учеников, каждый сыграл с каждым ровно одну игру. За победу давалось 5 очков, за ничью — 2 очка, за поражение — 0 очков. После завершения турнира выяснилось, что суммарно все участники набрали 550 очков. Какое наибольшее количество участников могло ни разу не сыграть вничью в этом турнире?

3. Натуральное число  $A$  назовём интересным, если существует натуральное число  $B$  такое, что:

- $A > B$ ;
- разность чисел  $A$  и  $B$  — простое число;
- произведение чисел  $A$  и  $B$  — точный квадрат.

Найдите все интересные числа, большие 200 и меньшие 400.

4. Положительные числа  $a, b, c, d$  больше 1. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\log_a(ab^2) + \log_b(b^2c^3) + \log_c(c^5d^6) + \log_d(d^{35}a^{36}).$$

5. Точка  $P$  внутри остроугольного треугольника  $ABC$  такова, что  $\angle BAP = \angle CAP$ . Точка  $M$  — середина стороны  $BC$ . Прямая  $MP$  пересекает описанные окружности треугольников  $ABP$  и  $ACP$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно (точка  $P$  лежит между точками  $M$  и  $E$ , точка  $E$  лежит между точками  $P$  и  $D$ ). Оказалось, что  $DE = MP$ . Докажите, что  $BC = 2BP$ .

6. Назовём функцию  $f$  хорошей, если

- $f$  определена на отрезке  $[0, 1]$  и принимает действительные значения;
- для всех  $x, y \in [0, 1]$  верно  $|x - y|^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ .

Найдите все хорошие функции.