

Открытая олимпиада по математике

11 класс, 2022 год

1. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(x^2)$ имеет $2n + 1$ корней. Какое наименьшее количество корней может иметь производная многочлена $P(x)$? (В обоих случаях имеются в виду различные корни, без учёта кратности).
2. Вася придумал новую операцию на множестве положительных чисел: $a \star b = a^{\ln b}$. Найдите логарифм числа $\frac{(ab) \star (ab)}{(a \star a)(b \star b)}$ по основанию $a \star b$.
3. $4^{27000} - 82$ делится на 3^n . Какое наибольшее натуральное значение может принимать n ?
4. Окружности O_1 радиуса b и O_2 радиуса c касаются в точке O -центре окружности O_3 радиуса a . Точка A -одна из точек пересечения окружностей O_1 и O_3 . Окружности O_4 касаются окружности O_1 в точке A и окружности O_2 в точке B . Точка C -такая точка на прямой OB , что треугольники OAB и OCA подобны. Найдите AC .
5. Положительные числа x , y и z таковы, что $x + y + z = 5$. Какое наименьшее значение может принимать величина $x^2 + y^2 + 2z^2 - x^2y^2z$?
6. Дана четырёхугольная пирамида $OABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α пересекает рёбра OA , OB , OC и OD пирамиды в точках A' , B' , C' и D' соответственно. Известно, что $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{a}$, $\frac{OB'}{OB} = \frac{1}{b}$, $\frac{OC'}{OC} = \frac{1}{c}$. Найдите $\frac{V_{OABCD}}{V_{OA'B'C'D'}}$.
7. Дан правильный n -угольник, в котором проведены все диагонали. Докажите, что они образуют не больше $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} - \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) + 1 - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - 3\right)$ точек пересечения (не считая вершин). Число n во всех вариантах задачи представляется в виде $n = 4k + 2$, где k натуральное число.
8. В таблице 8×8 какие-то 23 клетки чёрные, а остальные-белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали и находящихся с ней на одной вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?