25 мая 2019

1. Лёша и Марина договорились встретиться между 8:00 и 9:00 и вместе пойти на экзамен в ШАД. Каждый из них приходит на место встречи в случайный момент времени, ждёт 15 минут и уходит (никому не хочется опоздать на экзамен). Являются ли независимыми события "Лёша и Марина не встретились" и "хотя бы один из них пришел после 8:45"? Время считайте непрерывным.

2. Известно, что $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x} = 2$. Чему равен предел $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{f(x)}$?

3. Верно ли, что для любых линейно-независимых $v, w \in R^n$ найдётся матрица A размера $n \times n$, для которой вектор v является собственным с собственным значением 5, а вектор w не лежит в образе? Если да, то найти хотя бы одну такую матрицу. Обязательно объясните ответ.

4. Дан массив вещественных чисел A[1:n]. Предложите алгоритм, находящий для каждого элемента A индекс ближайшего справа элемента, большего его хотя бы в два раза. Если такого элемента нет, то должно возвращаться значение None. Ограничение по времени $O(n\log n)$, по дополнительной памяти — $O(n)$.

5. В корзине лежит m чёрных шаров и n красных. Вася достаёт из корзины случайный шар и, если он чёрный, то заменяет его на красный, а если он красный, то кладёт его обратно. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа красных шаров в корзине после k итераций этой процедуры. Оба ответа должны быть компактными выражениями (то есть не содержать знаков суммирования, многоточий и пр.)

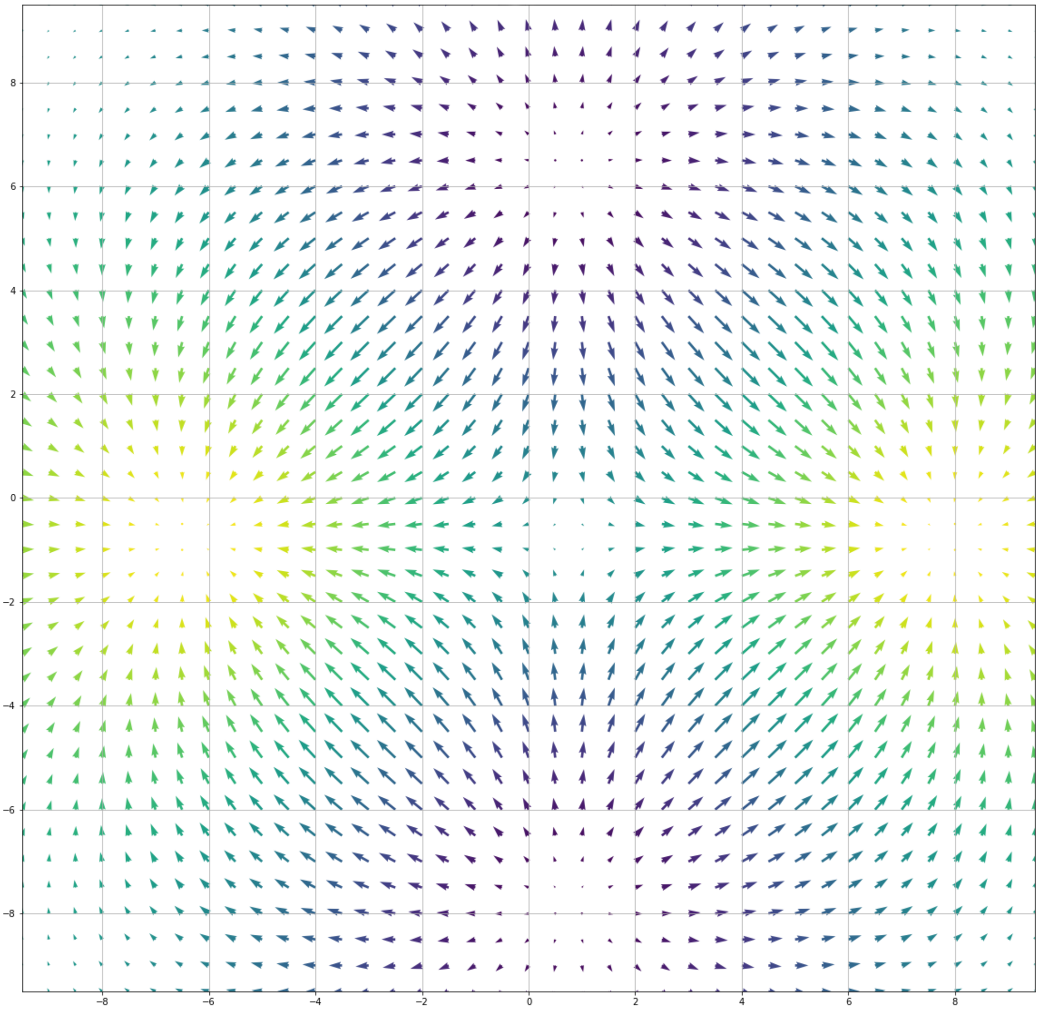
6. Матрицы A и B таковы, что $A^2 = A$, $B^2 = B$ и матрица $E - (A + B)$ обратима. Докажите, что $rkA = rkB$.

7. Пусть M — множество непрерывных убывающих функций на отрезке $[0, 1]$, для которых $f(1) = 0$. Найдите $\inf_{f\in M}\sup_{x\in[0,1]}\frac{xf(x)}{\int_0^1 f(t)dt}$.

8. Дан граф с 40 вершинами. Известно, что среди любых 5 вершин найдется одна, соединенная с четырьмя остальными. Каково минимально возможное число ребер в этом графе?

1 июня 2019

1. На картинке ниже изображены градиенты бесконечно гладкой функции $f(x, y)$ в узлах решетки с шагом 0.5 (вектор исходит из той точки, в которой вычисляется градиент).



Утверждается, что существуют прямые (более одной), вдоль которых матрица вторых производных

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

вырождена.

(a) Найдите и укажите их количество и угловые коэффициенты (то есть коэффициенты a в уравнении $y = ax + b$).

(b) Верно ли, что существуют точки, в которых градиент не равен нулю, но, стартовав из которых, нельзя с помощью градиентного спуска прийти в точку минимума?

2. Случайные величины X и Y независимы и экспоненциально распределены, X — с параметром $\lambda = 1$, а Y — с параметром $\lambda = 2$. Пусть $Z = \max(X, Y)$. Найти математическое ожидание случайной величины Z.

3. При каком значении параметра $a \in R$ матрицы A$=\begin{pmatrix} 1 & 4-a-a^2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -a-1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ могут быть матрицами одной и той же билинейной формы $V \times V \to R$ в различных базисах?

4. Найдите предел $\lim_{x\to 0} \int\limits_0^x \frac{\cos(t^3)}{t+x}\ dt$.

5. В обществе анонимных подарков состоят $3n$ человек. Они готовят подарки друг другу на Новый год. Известно, что ровно n человек хотели бы получить в подарок галстук, n человек — носки, а n человек — ручного динозавра. Каждый из членов общества случайно выбирает и покупает подарок среди тех двух, что он сам не хотел бы получить (например, если он хочет получить носки, то купит галстук или динозавра). Собравшись на новогоднюю вечеринку, члены общества сложили свои подарки в общую кучу, а в конце праздника разобрали их случайно. Алиса и Боб входят в общество анонимных подарков. Алиса хотела бы получить в подарок ручного динозавра, а Боб — носки. Найдите вероятность того, что ни Алиса, ни Боб не получат те подарки, которые хотели.

6. В королевстве Грок некоторые города соединены двусторонними магическими порталами, причем из каждого города можно попасть в каждый за несколько телепортаций. Когда из города A в город B отправляют груз, то по закону стоимость пересылки равна кратчайшему расстоянию между A и B: минимально возможному количеству ребер на пути между A и B. В архиве почтовой службы вы нашли упоминание о диаметре королевства — то есть о максимально возможном кратчайшем расстоянии между парой вершин, — а также следующий способ его вычисления. Занумеруем все города числами от 1 до n. Выберем в качестве A_0 город с номером 1 и найдем кратчайшее расстояние от него до всех остальных городов. Выберем в качестве города A_1 наиболее удаленный от A_0, среди всех таких выберем город с минимальным индексом. Теперь найдем кратчайшее расстояние от города A_1 до всех остальных городов, и в качестве A_2 выберем наиболее удаленный, а среди таковых город с минимальным номером (это может быть снова A_0). Далее аналогично построим A_3, A_4 и так далее до A_k для некоторого k. Теперь в качестве диаметра выберем максимальное расстояние между всеми парами (A_i, A_{i+1}) для i от 0 до $k-1$. Приведите пример, который покажет, что такое решение не сработает, как бы мы ни выбирали значение параметра k. В вашем королевстве должно быть не более 10 городов, соединенных не более чем 100 порталами.

7. Для квадратной вещественной матрицы A размера $n \times n$ и вектора $v \in R^n$ положим:

$$U(A) = \{X \in Mat_n(R) |\ AX = XA\}\ ,\ W(A, v) = \langle v, Av, A^2v, A^3v ...\rangle$$

(a) Пусть матрица A такова, что $dimW(A, v) = n$ для любого $v \neq 0$. Какова максимально возможная размерность $U(A)$?

(b) Пусть матрица A такова, что $dimW(A, v) < n$ для любого v. Какова минимально возможная размерность $U(A)$?

8. Верно ли, что почти все (все, кроме конечного числа) натуральные числа представимы в виде $n + \tau(n)$, где $\tau(n)$ — количество делителей числа n?

8 июня 2019

1. Заполните третий столбец матрицы $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & ? \\ -2 & 2 & ? \\ -1 & -2 & ? \end{pmatrix}$.

2. Что вы можете сказать о сходимости (абсолютной или условной) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2019)a_n$, если известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-2019)a_n$ сходится (а) абсолютно, (б) условно?

3. Алёна очень любит алгебру. Каждый день, заходя на свой любимый алгебраический форум, она с вероятностью $\dfrac{1}{4}$ находит там новую интересную задачу про группы, а с вероятностью $\dfrac{1}{10}$ интересную задачку про кольца. С вероятностью $\dfrac{13}{20}$ новых задач на форуме не окажется. Пусть X — это минимальное число дней, за которые у Алёны появится хотя бы одна новая задача про группы и хотя бы одна про кольца. Найдите распределение случайной величины X. В ответе должны участвовать только компактные выражения (не содержащие знаков суммирования, многоточий и пр.).

4. Дан массив A[1:n] вещественных чисел, отсортированный по возрастанию, а также числа p, q, r. Предложите алгоритм, строящий массив B[1:n], состоящий из чисел px^2+qx+r, где $x \in$ A, также отсортированный по возрастанию. Ограничение по времени — $O(n)$, по дополнительной памяти — $O(n)$.

5. Вещественнозначная функция f определена на отрезке $[a;b]$ $(b-a \geq 4)$ и дифференцируема на нём. Докажите, что найдётся точка $x_0 \in (a,b)$, для которой

$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0)$.

6. Квадратная вещественная матрица A такова, что $A^T = p(A)$, где $p(x)$ — многочлен с ненулевым свободным членом. Докажите, что A обратима. Верно ли, что для любого оператора $\varphi : R^n \to R^n$ найдётся многочлен $p(x)$ и некоторый базис, в котором матрица φ удовлетворяет условию $A^T = p(A)$?

7. Дан граф с 30 вершинами. Известно, что для любых 5 вершин в графе есть цикл длины 5, содержащий эти вершины. Докажите, что найдётся 10 вершин, попарно соединённых рёбрами друг с другом.

8. Найти предел:

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{5n} C_{k-1}^{n-1} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{k-n}$.