26 мая 2018

1. Существуют ли ортогональные кососимметричные матрицы 2019×2019? А 2018×2018?

2. На отрезке $[0,1]$ в точках x, y, независимо выбранных из равномерного распределения, находится два детектора элементарных частиц. Детектор засекает частицу, если она пролетает на расстоянии не более $\dfrac{1}{3}$ от него. Известно, что поля восприятия детекторов покрывают весь отрезок. С какой вероятностью $y > \dfrac{5}{6}$?

3. Определите, сколько корней имеет уравнение $\int\limits_x^{x+\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{t^2}{3}\right) = 0$ на отрезке $[0,3]$.

4. Дан массив A[1 . . n], состоящий из цифр от 0 до 9. Предложите алгоритм, находящий самое большое натуральное число, делящееся на 3, которое можно составить из элементов A. Ограничение по времени — $O(n)$, по дополнительной памяти — $O(1)$ (решения, использующие $O(n)$ дополнительной памяти, будут рассмотрены, но оценка будет ниже).

5. Случайная величина X равна длине цикла, содержащего одновременно элементы 1 и 2, при случайной перестановке множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Если такого цикла нет, то $X = 0$. Найдите распределение случайной величины X и ее математическое ожидание.

6. Последовательность (a_n) такова, что все $a_n \in (0,1)$ и, кроме того, $a_{n+1} < \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$. Верно ли, что a_n сходится? Найдите множество всех возможных пределов таких последовательностей.

7. Для двух квадратных матриц A и B одного и того же размера n обозначим через $A \bigstar B$ матрицу, определяемую следующим образом: $(A \bigstar B)_{ij} = \begin{cases} (AB)_{ij} & \text{если } i \text{ нечетно,} \\ b_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$

Для матрицы A определим оператор $\Phi_A : B \mapsto A \bigstar B$ на пространстве матриц $n \times n$.
(a) Может ли этот оператор иметь собственное значение 2 для какой-либо матрицы A?
(b) Какое наибольшее число различных собственных значений может иметь такой оператор (при фиксированном n)?

8. В волшебной стране Ляляндии 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что из каждого города выходит более 90 авиалиний. Докажите, что найдется 11 городов, попарно соединенных авиалиниями друг с другом.

2 июня 2018

1. В социальной сети "Улей"некоторые пары пользователей считаются друзьями, причем известно, что у любой пары друзей нет общих друзей, а у любой из пар не являющихся друзьями пользователей ровно два общих друга. Докажите, что у всех пользователей одинаковое число друзей.

2. (a) Докажите, что функции $det(X), det(X+E)$ и $det(X-E)$ на пространстве комплексных матриц 3×3 линейно независимы.

(b) Докажите, что найдется $m \in N$, для которого набор функций
$det(X-mE), det(X-(m-1)E), det(X-(m-2)E), \ldots, det(X+mE)$
линейно зависим.

3. Случайные величины X и Y независимы. X имеет распределение Лапласа с плотностью $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, а Y — равномерное на отрезке $[1,2]$. Найдите плотность распределения случайной величины $X-2Y$.

4. Подстановка σ задана двумя массивами a[1 . . n] и b[1 . . n] состоящими из всех различных чисел от 1 до n и такими, что b[i] $= \sigma($a[i]$)$ для каждого $i = 1, \ldots, n$ (например, a $=$ [2, 3, 1], b $=$ [1, 3, 2] кодирует транспозицию $(1,2)$). Придумайте алгоритм, определяющий, содержит ли σ цикл длины k. Ваш алгоритм может изменять исходные массивы, но должен справляться с задачей за $O(n^2)$ операций с использованием $O(1)$ дополнительной памяти (оценивая эти две асимптотики, можете считать k константой).

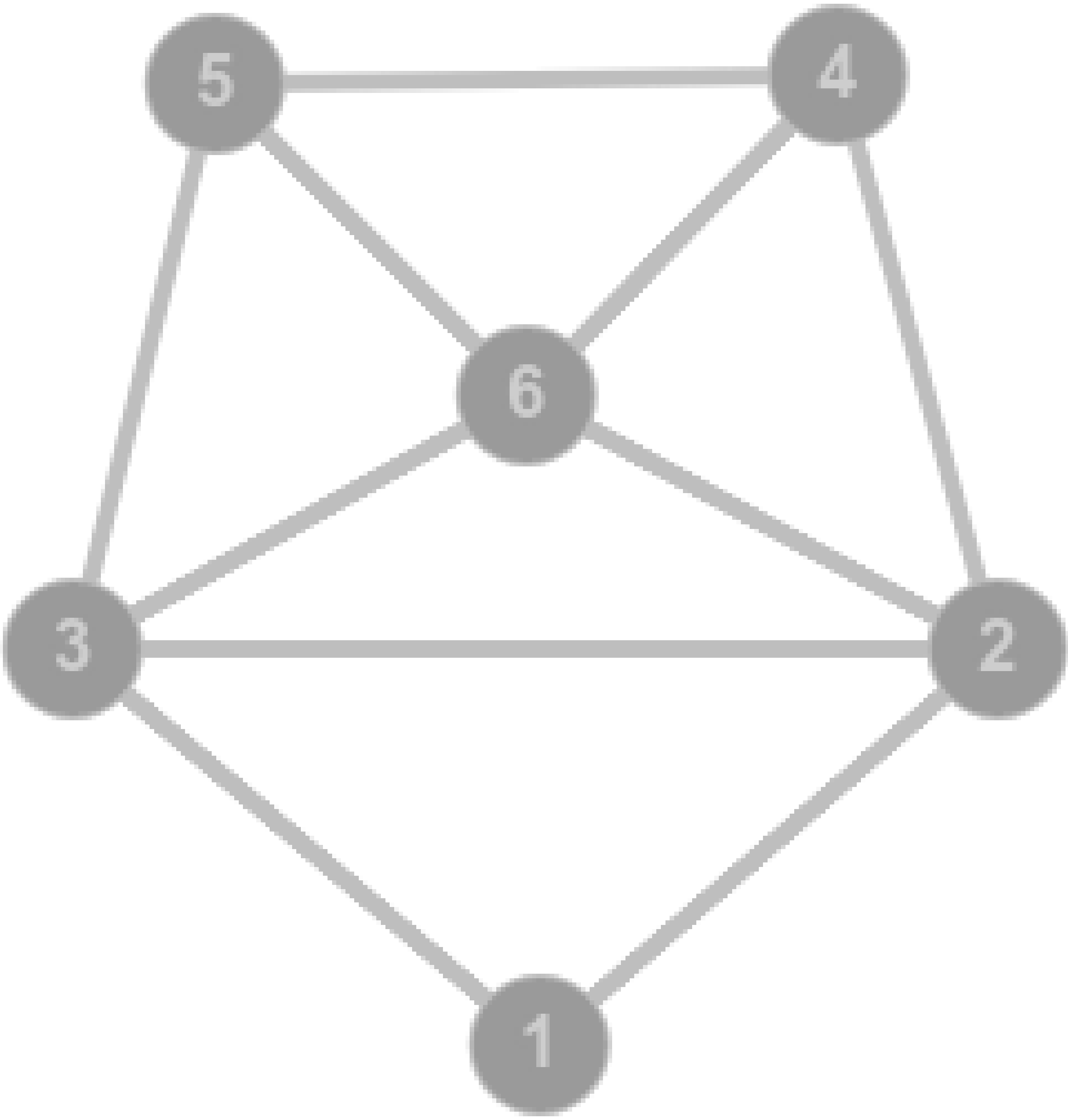
5. Пусть $f(x)$ — гладкая вещественная функция, причём $f(0)=0,\ f(1)=1$. Докажите, что найдутся различные $x_1, x_2 \in [0,1]$, для которых $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.

6. Линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таков, что A^3 — это оператор проекции. Какие собственные значения может иметь A? Верно ли, что A будет иметь диагональную матрицу в каком-либо базисе $\mathbb{R}^n$?

7. (a) Для непрерывной функции $f(x)$ найдите $\frac{d}{da} \iint\limits_{-a\leqslant x,y\leqslant a} f\left(\frac{x+y}{2}\right) dxdy$.

(b) Опишите все непрерывные функции $f(x)$, для которых при всех $a \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\iint\limits_{-a\leqslant x,y\leqslant a} f\left(\frac{x+y}{2}\right) dxdy = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx$.

8. Вы попали в лабиринт, состоящий из нескольких комнат, соединенных системой двусторонних порталов. Каждый портал соединяет только одну пару комнат лабиринта. Порталом можно пользоваться неограниченное число раз. Вы появляетесь в комнате v_1 и прыжками перемещаетесь между комнатами. В комнате v_6 находится выход из лабиринта. Предположим, что каждый следующий портал для прыжка вы выбираете случайно и равновероятно среди всех порталов в этой комнате, включая портал до предыдущей комнаты. Найдите математическое ожидание количества прыжков до первого попадания в v_6. Схема лабиринта:


5
4
6
3
2
1

9 июня 2018

1. Пусть A — квадратная матрица $n \times n$. Докажите, что $n - \operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} A - \operatorname{rk} A^2$.

2. Сколькими способами n различных четных чисел и n различных нечетных чисел можно записать в таблицу $2 \times n$ таким образом, чтобы нечетное число никогда не стояло под четным? Ответ должен содержать не более одной суммы.

3. На станцию приходят в случайное время две электрички. Времена их приходов независимы и имеют экспоненциальное распределение с плотностью e^{-x} при $x > 0$. Студент приходит на станцию в момент времени 2. Найдите:

а) вероятность того, что он сможет уехать хотя бы на одной электричке;

б) математическое ожидание времени ожидания студентом ближайшей электрички (считаем, что время ожидания равно нулю, если студент опоздал на обе электрички).

4. Верно ли, что всякая нечетная непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(2x) = 2f(x)$, линейна.

5. Пусть A и B — ортогональные матрицы (не ортогональные друг другу, а просто ортогональные!). Докажите, что $\det(A^T B - B^T A) = \det(A + B) \cdot \det(A - B)$.

6. Назовем элемент прямоугольной матрицы седлом, если он является наибольшим в своей строке и наименьшим в своем столбце или наоборот. Придумайте алгоритм, за $O(nm)$ операций находящий все седла в матрице $A[1..n][1..m]$, использующий не более $O(n + m)$ памяти и не более 1 раза обращающийся к каждому элементу A (можете считать, что элемент $A[i][j]$ превращается в NaN сразу после вызова $A[i][j]$). Считайте, что все элементы матрицы различны.

7. В компании "Тындекс" работает 100 сотрудников, некоторые из них знакомы друг с другом. Докажите, что найдется такая пара из них, для которой существует хотя бы 50 сотрудников, каждый из которых либо знаком с обоими людьми в этой паре, либо не знаком ни с одним из этой пары.

8. Пусть $\{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ — последовательность случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение. Сходится ли ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\xi_n > \sqrt{2 \ln n + 2 \ln \ln n}\right)$?