20 мая 2017

1. Верно ли, что если матрица $A \in Mat_n(R)$ симметрична и положительно определена, то квадратичная форма $q(X) = tr(X^T AX)$ на пространстве $Mat_n(R)$ будет положительно определенной?

2. Известно, что $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n+1} = 0$. Докажите, что многочлен $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ имеет хотя бы один действительный корень.

3. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, принимающие положительные значения. Пусть также $m < n$. Найдите математическое ожидание отношения: $\frac{X_1+\ldots+X_m}{X_1+\ldots+X_n}$.

4. Чёрный куб покрасили снаружи белой краской, затем разрезали на 27 одинаковых маленьких кубиков и как попало сложили из них большой куб. С какой вероятностью все грани этого куба будут белыми?

5. Придумайте структуру для хранения действительных чисел, которая могла бы выполнять запросы "добавить элемент", "удалить элемент", "удалить максимальный элемент" и "удалить минимальный элемент причем последние два выполняла бы за $O(1)$. Постарайтесь также минимизировать время выполнения первых двух запросов. Можно ли сделать так, чтобы и они тоже выполнялись за $O(1)$?

6. Последовательность a_n задана условием $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin a_n$. Сходится ли ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$?

7. Назовем матрицу вращательной, если при повороте на $90°$ вокруг центра она не меняется.

(а) Докажите, что для любого набора чисел $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in R$ найдется $n \in N$ и вращательная матрица $n \times n$, для которой $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ являются собственными значениями.

(б) Докажите, что у вращательной матрицы с действительными коэффициентами все собственные векторы v с отличными от нуля действительными собственными значениями симметричны (то есть $v_i = v_{n-i+1}$).

8. В неориентированном графе без петель и кратных ребер $2n$ вершин и n^2+1 ребро. Треугольником в графе называется фигура, состоящая из трех вершин и трех соединяющих их ребер. Докажите, что в этом графе найдутся два треугольника с общим ребром.

27 мая 2017

1. За время обучения в ШАД Михаил 20 раз решал задачи классификации. В каждой задаче он использовал ансамбль из пяти различных классификаторов, причем никакую пару классификаторов он не применял более одного раза. Каково минимально возможное число известных Михаилу классификаторов?

2. Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ $(n > 1)$, относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице?

3. Найдите сумму $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(k+1)^2}{k!}$.

4. Вася поставил учиться две нейронные сети, каждую на своём GPU, и отправился спать. Времена обучения сетей независимы и равномерно распределены на отрезке $[1, 3]$. Через время t сервер упал и оказалось, что лишь одна сеть успела доучиться. С какой вероятностью $t \leq \dfrac{3}{2}$? Считайте, что время падения сервера тоже равномерно распределено на отрезке $[1, 3]$.

5. Докажите, что для произвольного $a_0 \in (0; 2\pi)$ последовательность, заданная условием $a_{n+1} = \int\limits_0^{a_n} \left(1 + \frac{1}{4}\cos^{2n+1} t\right) dt$, имеет предел и найдите его.

6. Пусть X — случайная величина, принимающая значения на отрезке $[0, 1]$. Пусть также m — медиана. Рассмотрим бинаризацию этой величины $\beta(X) = \begin{cases} 1, & X \geq m, \\ 0, & X < m \end{cases}$.

Верно ли , что дисперсия $\beta(X)$ не меньше дисперсии X? А если функция распределения X непрерывна? Под медианой здесь имеется ввиду число m, для которого $P(X \leq m) = P(X \geq m)$.

7. Все числа от 1 до $n = 2^k - 1$ записаны неизвестным нам образом в полном бинарном дереве высоты k. Будем говорить, что число t лежит между числами i и j в этом дереве, если при удалении t из дерева i и j оказываются в разных компонентах. Предложите алгоритм, определяющий, что за число находится в корне дерева за $O(n \log n)$ операций с помощью запросов вида "Лежит ли t между i и j?".

8. В пространстве $R[x, y]$ многочленов с действительными коэффициентами от переменных x и y действует оператор $y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

(a) Докажите, что каждое целое число является его собственным значением.

(b) Найдите все его собственные значения. Является ли он диагонализуемым?

3 июня 2017

1. Пусть x и y — два ненулевых вектора из R^n. Верно ли, что найдется симметричная матрица A, для которой $y = Ax$?

2. Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f(0) = f(2)$. Докажите, что для какого-то $x \in [0, 2]$ имеет место равенство $f(x) = f(x-1)$.

3. Из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$ независимо выбираются две точки x и y. При каких числах a события $\max(1-2x, y) < a$ и $\max(1-2y, x) < a$ независимы?

4. В компании "Тындекс" у каждого сотрудника не менее 50 знакомых. Оказалось, что есть два сотрудника, знакомые друг с другом лишь через 9 рукопожатий (то есть кратчайшая соединяющая их цепочка из попарно знакомых людей содержит 8 промежуточных людей). Докажите, что в этой компании хотя бы 200 сотрудников.

5. Квадратная матрица A размера $n \times n$ имеет различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Найдите все собственные значения (в том числе комплексные) матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

6. Вы — воин Света, и сегодня вам нужно победить толпу из n гоблинов, каждый из которых изначально имеет h_i единиц жизни ($1 \le i \le n,\ h_i \in Z_n,\ 0 < h_i < H$). Боретесь с гоблинами вы с помощью специального магического посоха. Если ударить таким посохом по гоблину, тот сразу же теряет p единиц жизни, а все остальные гоблины в толпе теряют q единиц жизни каждый (таковы магические свойства посоха). Гоблин считается побежденным, если после очередного удара его здоровье становится меньше или равно нулю. Обычная борьба с нечистью давно нам приелась, и чтобы внести разнообразие в сегодняшнюю битву, вы решили победить всех гоблинов, сделав минимально возможное число ударов посохом. Предложите алгоритм нахождения этого числа ударов. Ваш алгоритм должен иметь асимптотику по времени $O(n \log n)$, затраты по памяти — $O(n)$.

7. Пусть A и B — две случайных булевых матрицы $n \times n$, у которых каждый элемент равен 1 с вероятностью p (значения различных элементов не зависят друг от друга). Сколько в среднем единиц будет в их произведении , если сложение и умножение происходит по модулю 2.

8. Исследуйте на сходимость (абсолютную и условную) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, где $a_k = \int\limits_0^{\frac{\sin k}{k}} \frac{\sin t}{t} dt$.