21 мая 2016

1. Решите уравнение $\lim_{n\to\infty}\cos nx = 1$.

2. Докажите, что целочисленная матрица не может иметь собственного значения, равного $\frac{1}{4}(-3+i\sqrt{5})$.

3. В мишень, которая представляет собой прямоугольник размера 3×2, стреляют из пистолета. Известно, что отклонение пули от точки, на которую нацелен пистолет, произвольно, но не превышает 0.1 по любому направлению, параллельному сторонам прямоугольника. Стрелок целится в произвольную точку мишени. С какой вероятностью он попадет в мишень?

4. Пусть $f: R^2 \to R$ — ограниченная гладкая функция, причём её среднее значение на любой окружности радиуса 1 равно значению в центре этой окружности. Докажите, что f постоянна.

5. Дана матрица $n\times n$, каждая строка и каждый столбец которой упорядочены по возрастанию (то есть $a_{ki} < a_{kj}$ и $a_{it} < a_{jt}$ при $i < j$). Предложите алгоритм, находящий два элемента этой матрицы, сумма которых наиболее близка к заданному числу q. Ограничение по дополнительной памяти — $O(n)$. Изменять исходную матрицу нельзя. Внимание: оценка будет зависеть от эффективности вашего алгоритма.

6. Робот движется по клеткам бесконечной шахматной доски. Один его шаг — это перемещение на случайную из восьми соседних клеток. Найдите математическое ожидание модуля разности между количеством черных и количеством белых клеток, на которых робот побывал за n шагов (каждая клетка считается столько раз, сколько на ней побывал робот). Ответ представьте в виде компактного выражения.

7. Пусть $J \in Mat_{2n\times 2n}(R)$ — кососимметрическая матрица, β — положительное число, а $u \in R^{2n}$ — ненулевой вектор. Найдите $det(E + \beta u u^T J)$.

8. Докажите, что из последовательности из $mn+1$ различных действительных чисел всегда можно выделить возрастающую подпоследовательность из $n+1$ числа или убывающую подпоследовательность из $m+1$ числа.

28 мая 2016

1. Пусть A и B — квадратные матрицы одинакового размера. Верно ли, что если $ABA = A$, то $BAB = B$?

2. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=3}^{\infty}(\ln\ln n)^{-\ln n}$.

3. Случайные величины X и Y независимы. Плотность случайной величины X равна $p_X(t) = \frac{t}{2}I_{[0,2]}(t)$ (где $I_{[0,2]}(t)$ — индикаторная функция отрезка $[0,2]$), а Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0,3]$. Найдите вероятность того, что из отрезков с длинами X, Y и 1 можно составить треугольник.

4. Даны n отрезков $[a_i, b_i]$. Назовем индексом вложенности отрезка $[a_i, b_i]$ количество отрезков, которые его содержат. Предложите алгоритм, определяющий, есть ли в наборе отрезок с индексом вложенности, превышающим 1000. Ограничение по времени — $O(n\log n)$, по дополнительной памяти — $O(n)$.

5. Существует ли непрерывная функция $f(x)$, для которой $f(f(x)) = 1 - x^3$?

6. В ряд расположены m предметов. Случайно выбираются k предметов, $k < m$. Случайная величина X равна количеству таких предметов i, что i выбран, а все его соседи не выбраны. Найдите математическое ожидание.

7. В графстве Орэ имеется несколько городов, соединенных дорогами, причем из каждого города выходит ровно три таких дороги. Инквизитор брат Франсуа странствует по графству, искореняя ересь. Выехав из города Э, он едет по дорогам, причем после каждого посещенного им города он поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал, и никогда не сворачивает в ту сторону, в которую он свернул перед этим. Докажите, что рано или поздно брат Франсуа вернется в город Э.

8. Пусть A и B — симметричные билинейные функции на двумерном вещественном пространстве, причем A положительно определена, а B отрицательно определена. Докажите, что любая непрерывная кривая в пространстве симметричных билинейных функций, соединяющая A и B, содержит функцию с вырожденной матрицей.

4 июня 2016

1. Докажите, что любая квадратная вещественная матрица является суммой двух обратимых.

2. Может ли непрерывная на всей числовой прямой функция принимать каждое значение (а) дважды? (б) трижды?

3. Каждая из случайных величин X и Y принимает два значения, причём $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$. Докажите, что X и Y независимы.

4. Все ребра неориентированного ациклического графа покрашены в два цвета: красный и синий. Предложите алгоритм, находящий длину максимального пути, в котором любые два соседних ребра разного цвета. Ограничение по времени — $O(V + E)$, где V — число вершин графа, E — число его ребер. Сколько дополнительной памяти требуется вашему алгоритму?

5. Пусть ξ, η и λ — независимые случайные величины равномерно распределённые на отрезке $[0, 1]$, а t — фиксированное число. Найдите $P(\xi + \eta < t\lambda)$.

6. В пространстве многочленов с действительными коэффициентами степени не выше n задана квадратичная форма $Q(f) = f(1)f(2)$. Найдите ее сигнатуру (число единиц и минус единиц в нормальном виде).

7. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 e^{\{nx\}} x^{2016} dx$, где $\{t\}$ означает дробную часть числа t.

8. а) Докажите, что во множестве отрезков $\Lambda = \{[i, j] | i, j = 1, \ldots, n, i < j\}$ можно выбрать подмножество Σ, содержащее $O(n \log n)$ отрезков так, чтобы любой отрезок из Λ представлялся в виде объединения не более двух отрезков из Σ.

б) Докажите, что эта оценка точна, то есть подмножество $\Sigma \subseteq \Lambda$, удовлетворяющее условиям, должно содержать $\Omega(n \log n)$ отрезков.