24 мая 2015

1. Найдите предел последовательности (a_n), для которой $a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2(a_n-3)}{4}$.

2. На плоскости, однородно покрытой прямоугольниками со сторонами 10 и 20, рисуют случайную окружность радиуса 4. Найдите вероятность того, что окружность имеет общие точки ровно с тремя прямоугольниками.

3. Дима и Ваня по очереди вписывают элементы в квадратную матрицу порядка $2n$. Цель Вани — сделать так, чтобы получившаяся в итоге матрица имела собственное значение 1, а цель Димы — помешать ему. Дима ходит первым. Есть ли у кого-нибудь из них выигрышная стратегия?

4. Найдите определитель матрицы $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = C_{i+j-2}^{i-1}$.

5. Даны два массива целых чисел $a[1..n]$ и $b[1..k]$, причем все элементы b различны. Предложите алгоритм, находящий набор индексов $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ с минимальной разностью $i_k - i_1$, для которого набор $a[i_1], \ldots, a[i_k]$ является перестановкой элементов массива b. Ограничение по времени — $O(nk)$ (более быстрые алгоритмы приветствуются), по дополнительной памяти — $O(n)$.

6. В 2222 году волейбольные турниры проводят по новой системе. Говорят, что команда A *превосходит* команду B, если A выиграла у B или у какой-либо команды, выигравшей у B (правило не транзитивно!). Каждая пара команд играет по одному разу. Ничья исключается волейбольными правилами. Чемпионом объявляют команду, превзошедшую все другие команды. Докажите, что (а) чемпион обязательно найдется, и (б) не может быть ровно двух чемпионов.

7. Вычислите интеграл $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{\mathrm{arctg} x}{x^2-x+1} dx$.

8. На плоскости нарисована ломаная с n звеньями. Длина каждого звена равна 1, ориентированный угол между соседними звеньями с равной вероятностью равен α и $-\alpha$. Найдите математическое ожидание квадрата расстояния от её начальной точки до конечной.

31 мая 2015

1. Квадратная матрица A такова, что $tr(AX) = 0$ для любой матрицы X, имеющей нулевой след. Докажите, что матрица A является скалярной (то есть имеет вид λE для некоторого скаляра λ).

2. Придя на письменный экзамен в ШАД, студенты поняли, что среди любых четырех человек хотя бы один уже знаком с тремя оставшимися. Докажите, что в этом случае среди любых четверых человек хотя бы один уже знаком со всеми остальными студентами.

3. На окружности выбираются две случайные точки A и B. Найдите математическое ожидание площади меньшего из сегментов, на которые хорда AB разбивает круг.

4. Дан массив из n целых чисел. Предложите алгоритм, сортирующий их по остатку при делении на 5 за время $O(n)$ (в каком порядке будут расположены числа, имеющие один и тот же остаток, неважно). Ограничение по дополнительной памяти — $O(1)$.

5. Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right)$.

6. У вас имеется неограниченное число костей в форме всех возможных правильных многогранников. Можно ли, однократно бросив некоторый набор таких костей, симулировать бросок а) правильной семигранной кости б) правильной 15-гранной кости.

7. Пусть A и B — квадратные вещественные матрицы одного и того же размера.
Докажите, что $det(E - AB) = det(E - BA)$.

8. За столом сидят n старателей, перед каждым из которых находится кучка золотого песка. Каждую минуту происходит следующее: по общей команде каждый из них перекладывает в свою кучку половину песка из кучки левого соседа и половину — из кучки правого соседа. Опишите асимптотическое поведение кучек (а) при $n = 3$; (б) при произвольном n.

7 июня 2015

1. Постройте график функции $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $x \geq 0$.

2. Найдите собственные значения матрицы vv^T, где v — некоторый вектор-столбец.

3. Найдите математическое ожидание числа неподвижных точек подстановки на n элементах.

4. Пусть X и Y — квадратные матрицы одинакового размера, причем $XY = \lambda X + \mu Y$ для некоторых $\lambda, \mu \neq 0$. Докажите, что матрицы X и Y коммутируют.

5. Электрическая цепь представляет собой связный неориентированный граф без кратных ребер, в котором ребра (числом N) — это провода, а вершины — либо лампочки, либо единственный источник тока. На каждом ребре размещено реле. Лампочка горит, если существует путь, соединяющий ее с источником тока, вдоль которого все реле находятся в положении "включено". Известно, что ровно одно из реле бракованное и никогда не пропускает ток. Вы можете включать и отключать реле (и видите, горят ли лампочки). Изначально все выключатели находятся в положении "включено". Опишите способ нахождения неисправного реле за $O(N)$ операций включения-выключения.

6. Пусть f — дифференцируемая функция, причём $f(0) = 0$ и $0 < f'(x) \leq 1$. Докажите, что для всех $x \geq 0$ имеет место неравенство $\int\limits_0^x f^3(t)dt \leq \left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)^2$.

7. Для произвольных n, m вычислите сумму: $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{m+i+1}} C_{m+i}^{i} + \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2^{n+i+1}} C_{n+i}^{i}$.

8. На сфере случайным образом выбираются четыре точки A, B, C, D. С какой вероятностью кратчайшие дуги AB и CD пересекаются?