25 мая 2014

1. Пусть A — квадратная матрица, у которой сумма матричных элементов в каждом столбце равна λ. Докажите, что λ является собственным значением матрицы A.

2. На плоскости зафиксированы две точки A и B на расстоянии 2. Пусть C — случайно выбранная точка круга радиуса R с центром в середине отрезка AB. С какой вероятностью треугольник ABC будет тупоугольным?

3. Требуется отгадать число от 1 до n ($n > 10$), задавая лишь вопросы, на которые можно отвечать "да" или "нет", при этом отвечающий может один раз солгать. Придумайте алгоритм, гарантированно позволяющий сделать это быстрее, чем за $2\lceil \log_2 n \rceil + 1$ шагов.

4. Найдите интеграл: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2014} x}{\sin^{2014} x + \cos^{2014} x} dx$.

5. Зададим числовую последовательность a_n следующим образом. Пусть a_1 и a_2 — произвольные натуральные числа. Число a_n получается приписыванием к a_{n-1} числа a_{n-2} справа. Предложите алгоритм, вычисляющий по данным a_1 и a_2 i-ю цифру числа a_n и оцените его временную сложность. Ограничение по памяти: $O(1)$.

6. Пусть функция f непрерывна и ограничена на промежутке $(0, +\infty)$. Докажите, что для любого числа T существует последовательность $\{x_n\}$, стремящаяся к $+\infty$ и такая, что $f(x_n + T) - f(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

7. Найдите максимальное значение определителя матрицы (а) второго (б) третьего порядка, если сумма квадратов всех ее элементов не превосходит 1.

8. В компании из 51 человека каждый на дух не переносит ровно троих (при этом они не обязательно отвечают ему взаимностью). Требуется разделить компанию на n групп так, чтобы каждый человек входил только в одну группу, и между членами каждой из групп царило взаимопонимание. При каком наименьшем n это возможно?

1 июня 2014

1. Пусть $M \subset R$ — множество из n элементов. Пусть, далее, $S_M = \left\{ \frac{x+y}{2} | x, y \in M,\ x \neq y \right\}$. Найдите наименьшую возможную мощность множества S_M (одинаковые элементы множества считаются одним элементов).

2. На окружности выбираются 3 случайных точки. С какой вероятностью центр окружности лежит внутри треугольника с вершинами в этих точках?

3. Квадратная матрица A размера 9×9 над полем характеристики, отличной от 2, такова, что $A^2 = E$. Найдите ранг матрицы $E - A$, если известно, что ранг матрицы $E + A$ равен 7.

4. В полукруге есть n неизвестных нам точек. Разрешается задавать вопросы вида "каково расстояние от точки X до ближайшей из этих точек?" Если расстояние оказывается нулевым, точка считается угаданной. Докажите, что хотя бы одну из этих точек можно угадать не более чем за $2n + 1$ вопрос.

5. Найдите предел $\lim_{\lambda \to 0+} \frac{1}{\ln \lambda} \int\limits_{\lambda}^{a} \frac{\cos x}{x} dx$.

6. Пусть A и B — квадратичные матрицы размера 2×2. Рассмотрим линейный оператор F на пространстве матриц 2×2, действующий по правилу $F(M) = AMB$. Матрица A имеет 2 различных собственных значения λ_1 и λ_2, а B — 2 различных собственных значения μ_1 и μ_2. Найдите собственные значения оператора F, если
(а) матрицы A и B — диагональные;
(б) матрицы A и B — произвольные.

7. Квадратная матрица $n \times n$ заполнена различными натуральными числами. Предложите алгоритм, находящий два элемента этой матрицы, не лежащих ни в одной строке, ни в одном столбце, с максимально возможным произведением. Ограничение по времени — $O(n^2)$, по памяти — $O(n)$.

8. Игральную кость с n гранями (и числами от 1 до n на этих гранях) подбрасывают до тех пор, пока сумма выпавших очков не станет больше либо равна n. Все грани кости выпадают с одинаковой вероятностью. Найдите математическое ожидание числа бросков.

8 июня 2014

1. Пусть A — невырожденная вещественная матрица $n \times n$, все элементы которой положительны. Докажите, что число нулей среди элементов матрицы A^{-1} не превосходит $n^2 - 2n$.

2. Трое игроков по очереди вынимают от 1 до m ($m > 1$) камней из кучи (количество камней в куче им изначально известно). Игрок, вынувший последний камень, проигрывает. Докажите, что если изначально куча была достаточно велика, то любые два игрока, договорившись, сумеют привести третьего к проигрышу.

3. Найдите предел последовательности (c_n), определяемой рекуррентным соотношением $c_{n+1} = (1 - \frac{1}{n})c_n + \beta_n$, где (β_n) — любая последовательность со свойством $n^2\beta_n \to 0$ при $n \to 0$.

4. Отрезок $[0, 1]$ разбит двумя случайными точками на три части. Найдите математическое ожидание длины меньшей из частей.

5. Предложите алгоритм, находящий значения $P(n+1), P(n+2), \ldots, P(2n)$ неизвестного многочлена n-й степени $P(x)$, если даны его значения $P(0), P(1), \ldots, P(n)$. Ограничение по времени — $O(n^2)$.

6. Вычислите интеграл $\int e^{e^x + 2014x} dx$.

7. Когда студент пришёл в аудиторию, на доске было написано число 0. В ожидании лекции студент подкидывает монетку и, если выпадает орёл, он прибавляет 1, а если решка — то вычитает. Орёл и решка выпадают с одинаковой вероятностью. Найдите вероятность того, что на момент после $(2n+1)$-го подбрасывания число на доске сменило знак (с положительного на отрицательный или наоборот) а) ровно n раз; б) ни разу.

8. При каких натуральных N существует квадратная матрица порядка N с элементами $0, 1$ такая, что ее квадрат — это матрица из одних единиц?