26 мая 2013

1. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ задана рекуррентным соотношением: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n + nx_{n-1}}{n+1}$. Покажите, что данная последовательность имеет предел и найдите предел.

2. Имеется 100 некоторых подмножеств множества $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Докажите, что среди них найдется два подмножества, у которых симметрическая разность имеет мощность не более двух.

3. На единичной окружности с центром в начале координат выбирается случайная точка P (из равномерного распределения). В круге, который ограничивает данная окружность, случайно выбирается точка Q (также из равномерного распределения). Пусть R — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат и диагональю PQ. Какова вероятность того, что прямоугольник целиком лежит в единичном круге.

4. Пусть функция f — положительная непрерывная функция на R, причём $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, а интервал $[a, b]$ — это интервал минимальной длины из тех, для которых $\int\limits_a^b f(x)dx = \alpha$. Покажите, что $f(a) = f(b)$.

5. Дана матрица M размера $n \times n$, где $m_{ij} = a_i a_j$ при $i \neq j$ и $m_{ii} = a_i^2 + k$.

6. Задана битовая матрица $n \times n$ с элементами 0 и 1 (каждый элемент матрицы занимает один бит памяти). Назовем строку (столбец) исходной матрицы плохой (плохим), если в нем встречается хотя бы один ноль. Необходимо в исходной матрице занулить все плохие строки и столбцы. Предложите алгоритм, решающий эту задачу за $O(1)$ дополнительной памяти и оцените его временную стоимость.

7. Рассмотрим линейное пространство многочленов над R от двух переменных степени не выше 2013. Рассмотрим его подпространство V, образованное всеми многочленами f, для которых криволинейный интеграл первого рода $\oint_{x^2+y^2=R^2} f(x, y)ds = 0$, причём для любого R. Найдите размерность подпространства V.

2 июня 2013

1. Найдите $\prod_{k=1}^{\infty} \cos(x2^{-k})$.

2. Дана матрица A размера $n \times n$, где $a_{ij} = (i-j)^2$, $i, j = 1, \ldots, n$.
Найдите ранг матрицы A.

3. Имеется множество $A = \{1, 2, 3, \ldots, 256\}$. Найдите размер максимального по мощности подмножества $A' \in A$, такого, что A' не содержит элементов x, y, таких, что $x = 2y$.

4. На окружности случайно выбирается n точек. Найдите вероятность того, что все они принадлежат некоторой полуокружности.

5. Назовем двумерный массив действительных чисел $A[1 \ldots n][1 \ldots n]$ возрастающим, если для любых k, l $A[k][l] \geq A[i][j]$, $i \leq k, j \leq l$. Задача поиска в квадратном возрастающем массиве формулируется так: для заданного возрастающего массива $A[1 \ldots n][1 \ldots n]$ и некоторого числа X определить, встречается ли число X в массиве A. Покажите, что не существует алгоритма, решающего эту задачу менее, чем за n сравнений.

6. У линейного преобразования n-мерного пространства существуют $n+1$ собственных векторов, таких, что любые n из них линейно независимы. Найдите всевозможные матрицы, которые могли бы задавать такое преобразование.

7. Найдите сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)}$, где $f(n)$ — количество единиц в двоичном представлении числа n.

9 июня 2013

1. Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ определена рекурсивно: $a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}$. Найдите формулу общего члена последовательности.

2. Дано множество $A = \{1, \dots, n\}$. Среди всех его подмножеств равновероятно выбираются k его подмножеств. Найдите вероятность того, что $A_1 \cap A_2 \cap \dots A_k = \emptyset$.

3. Дан массив длины n из нулей и единиц. Найдите в нем подмассив максимальной длины, в котором количество единиц равно количеству нулей. Ограничения: $O(n)$ по времени, $O(n)$ по дополнительной памяти.

4. Пусть $I_m = \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\dots\cos(mx)dx$. Для каких $m \in [1, 10]$ $I_m \neq 0$?

5. Дан неориентированный непустой граф G без петель. Пронумеруем все его вершины. Матрица смежности графа G с конечным числом вершин n (пронумерованных числами от 1 до n) — это квадратная матрица A размера n, в которой значение элемента a_{ij} равно числу ребер из i-й вершины графа в j-ю вершину. Докажите, что матрица A имеет отрицательное собственное значение.

6. Рассмотрим бесконечный двумерный массив $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$, состоящий из натуральных чисел, причем каждое число встречается в массиве ровно 8 раз. Докажите, что $\exists (m, n) : a_{mn} > mn$.

7. Дана матрица из нулей и единиц, причем для каждой строки матрицы верно следующее: если в строке есть единицы, то они все идут подряд (неразрывной группой из единиц). Докажите, что определитель такой матрицы может быть равен только ± 1 или 0.