27 мая 2012

1. Сколько способов пройти из $(0,0,0)$ в $(n,2n,3n)$, если можно делать шаги на $+1$ по любой из осей.

2. Найти $f^{(319)}(0)$, если $f(x)=\frac{x^2+17}{x^4-5x^2+4}$.

3. Сколько перестановок коммутируют с $(123)(456)$?

4. В равностороннем треугольнике ABC единичной площади выбираем точку M. Найти математическое ожидание площади треугольника ABM.

5. Вычислите интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

6. Показать, что у целочисленной матрицы не бывает рациональных нецелых собственных чисел.

7. Есть круговая трасса, на которой в некоторых местах стоят бензоколонки. Расстояние между ними и количество бензина на каждой бензоколонке известны. Имеется также машина с постоянным и известным расходом топлива. Предложите алгоритм, работающий за $O(n)$ по времени, который позволяет найти ту бензоколонку, начиная с которой можно проехать всю трассу, или сказать, что такой нет.

3 июня 2012

1. Определим последовательность $\{x_n\}$ начальными условиями $x_1 = a,\ x_2 = b$ и рекуррентной формулой $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$. Найдите $\lim_{n\to\infty} x_n$.

2. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{2[\log_2 k]}} x^k$, где квадратные скобки означают целую часть числа. Найдите $\int\limits_0^1 \varphi(x)\varphi'(x)dx$.

3. Рассмотрим всевозможные непустые подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$. В каждом подмножестве перемножим числа, обратные его элементам. Потом сложим полученные $2^n - 1$ чисел. Найти полученную сумму.

4. Улоф Пальме и Рави Шанкар подбрасывают правильную монетку (вероятность выпадения орла 0.5). Улоф подбрасывает её n раз, а Рави — $n+1$. Найдите вероятность того, что у Рави будет больше орлов, чем у Улофа.

5. Дано некоторое множество положительных чисел мощности континуум. Докажите, что из него можно выбрать счётное подмножество с бесконечной суммой.

6. Дан массив из n чисел. Предложите алгоритм, позволяющий за $O(n)$ операций определить, является ли этот массив перестановкой чисел от 1 до n. Дополнительной памяти не более $O(1)$.

7. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — конечные множества и $a_{ij} = |A_i \bigcap A_j|$. Докажите, что матрица $(a_{ij})_{i=1,2,\ldots,n}^{j=1,2,\ldots,n}$ неотрицательно определена.

10 июня 2012

1. Даны 2012 гирек разной массы. Они разбиты на две группы (по 1006 в каждой), внутри которых упорядочены по массе. Предложите способ за 11 взвешиваний найти 1006-ю гирьку по массе среди всех.

2. Вычислите $\int\limits_0^{2\pi} (\sin x)^8 dx$.

3. Докажите, что многочлен с действительными коэффициентами, принимающий на действительной оси только положительные значения, может быть представлен в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами.

4. Какую наибольшую дисперсию может иметь случайная величина, принимающая значения на отрезке $[0, 1]$?

5. В множестве из n человек каждый может знать или не знать другого (если A знает B, отсюда не следует, что B знает A). Все знакомства заданы булевой матрицей $n \times n$. В этом множестве может найтись или не найтись знаменитость — человек, который никого не знает, но которого знают все. Предложите алгоритм, который бы находил в множестве знаменитость или говорил, что ее в этом множестве нет. Сложность по времени — $O(n)$, сложность по памяти — $O(1)$.

6. Рассмотрим случайную перестановку на n элементах. Докажите, что данные k элементов окажутся в одном цикле с вероятностью $\dfrac{1}{k}$.

7. Есть неизвестная нам квадратичная форма Q в n-мерном пространстве. Разрешается задавать вопрос вида "Чему равно $Q(v)$?". Какое минимальное число вопросов надо задать, чтобы определить, является ли форма Q положительно определенной?