Олимпиада школьников «СПбГУ» по математике

10-11 класс, 2021 год
1 вариант

1. В некоторых клетках полоски 1×2021 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2 = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка K, и в треугольник ABK вписана окружность с центром в точке I. Через точки B и I проведена окружность, касающаяся прямой AB в точке B. Эта окружность вторично пересекает отрезок BK в точке L. Найдите угол между прямыми IK и CL.

4. На доске написано число 1200. Петя приписал к нему справа $10n+2$ пятерок, где n – неотрицательное целое число. Вася подумал, что это шестеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n+1, 6n+3, 6n+5$ и $6n+7$ пиастров, где n – натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

Олимпиада школьников «СПбГУ» по математике

10-11 класс, 2021 год
3 вариант

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее – цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3^n, 3^{n-1} \cdot 5, 3^{n-2} \cdot 5^2, 3^{n-3} \cdot 5^3, ..., 3 \cdot 5^{n-1}, 5^n$ пиастров, где n – натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

Олимпиада школьников «СПбГУ» по математике

10-11 класс, 2021 год
5 вариант

1. Натуральные числа от 1 до 2021 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что у любого числа его левый и правый сосед имеют разную четность. Какое число может быть на первом месте?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)^3 - 26abc}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а окружность с центром в точке O охватывает окружности ω_1 и ω_2, касаясь их в точках C и D соответственно. Оказалось, что точки A, C и D лежат на одной прямой. Найдите угол ABO.

4. Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел ($n \geq 2$), образующих арифметическую прогрессию с разностью -8. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 6. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n-1, 6n+1, 6n+4$ и $6n+7$ пиастров, где n – натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

Олимпиада школьников «СПбГУ» по математике

10-11 класс, 2021 год
7 вариант

1. Можно ли в таблице 35×35 расставить различные целые числа так, чтобы значения в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более чем на 18?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{a^3 + b^3 + c^3 - 2abc}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точке A. Отрезок O_2A вторично пересекает окружность ω_1 в точке L. Прямая, проходящая через точку A параллельно KL, вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно. Отрезки CK и DL пересекаются в точке N. Найдите угол между прямыми O_1A и O_2N.

4. В файле записано подряд 2021 двузначных пятеричных чисел, причем числа на нечетных позициях равна и на 1 больше чисел на четных позициях. Компьютер считал данные из файла как одно пятеричное число и разложил его на простые множители. Оказалось, что таких множителей ровно два и они различаются на 2. Могло ли такое быть?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $5^n, 5^{n-1} \cdot 7, 5^{n-2} \cdot 7^2, 5^{n-3} \cdot 7^3, ..., 5 \cdot 7^{n-1}, 7^n$ пиастров, где n – натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?