Олимпиада «ФизТех» по математике

Заочный этап

11 класс, 2021 год

1. Окружность, центр которой расположен в первой координатной четверти, касается оси Ox в точке M, пересекает две гиперболы $y = \dfrac{k_1}{x}$ и $y = \dfrac{k_2}{x}$ $(k_1, k_2 > 0)$ в точках A и B таких, что прямая AB проходит через начало координат O. Известно, что $\frac{4}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 20$. Найдите **наименьшую** возможную длину отрезка OM. В ответ запишите **квадрат длины** отрезка OM.

Решение. Пусть уравнение прямой AB имеет вид: $y = ax$. Тогда координаты точек пересечения прямой и гипербол имеют вид: $(\sqrt{\frac{k_1}{a}}; \sqrt{a \cdot k_1})$ и $(\sqrt{\frac{k_2}{a}}; \sqrt{a \cdot k_2})$ соответственно. Значит $OA^2 = \frac{k_1}{a} + a \cdot k_1$ и $OB^2 = \frac{k_2}{a} + a \cdot k_2$. По теореме о касательной и секущей $OM^2 = \sqrt{OA \cdot OB} = \sqrt{(\frac{k_2}{a} + a \cdot k_2)(\frac{k_1}{a} + a \cdot k_1)}$. В силу неравенства о средних данно выражение больше или равно $2\sqrt{k_1 k_2}$. При этом можно преобразовать данное изначально условие к виду: $4k_2 + k_1 = 20k_1k_2$ и если оценить в нем левую часть через неравенство о средних, то получится, что $2\sqrt{k_1k_2} \leq 20k_1k_2$ что равносильно тому, что $\sqrt{k_1k_2} \geq \frac{1}{10}$ значит $OM^2 \geq 0.2$.

Ответ: 0,2.

2. Функция $f(x;y)$, определенная на парах действительных чисел, удовлетворяет условиям $f(a;a)=0$, $f(a;f(b;c))=f(a;b)+c$ для любых a,b,c. Найдите $f(11;13.6)$.

Решение. Предположим, что $c=b$, тогда $f(a;0)=f(a;b)+b$. Если положить, что $b=a$, получаем $f(a;0)=f(a;a)+a=a$. Подставим значение второго выражения в первое: $f(a;b)=a-b$. Заметим, что данное выражение удовлетворяет обоим выражениям из условия. $f(11;13,6)=11-13,6=-2,6$.

Ответ: –2,6.

Ответ в общем виде: $f(a;b)=a-b$.

3. У Васи есть кубики трех цветов. Он строит из них башню, ставя каждый следующий кубик на предыдущий. Запрещено использовать более 4 кубика каждого из цветов. Вася заканчивает строить башню, как только в ней окажется по 4 кубиков каких-то двух цветов. Сколько различных башен может построить Вася?

Решение. Заметим, что для успешного решения задачи, нужно просто грамотно распиать случаи. Затем нужно просто применить формулу числа сочетаний.

Обозначим цвета просто как $1, 2, 3$. Какие могут быть комбинации:

- Цвета 1 и 3 встречаются 4 раза;
- Цвета 2 и 3 встречаются 4 раза;
- Цвета 2 и 1 встречаются 4 раза.

Заметим, что ситуации эквивалентны, поэтому достаточно рассмотреть только одну. Также можно увидеть, что в последовательности последним должен стоять кубик 1 или 3 цвета. Поэтому сразу видим, что на последнее место можно выбрать кубик всего лишь двумя способами. Однако давайте для начала разберемся с количеством кубиков второго цвета:

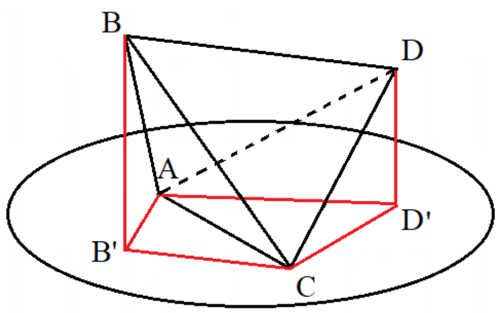
- Если их 0. Тогда у нас всего 8 позиций для расстановки кубиков (2 уровня в башне). Тогда нам нужно найти количество способов расставить кубики третьего цвета, так как эта расстановка однозначно определит расстановку кубиков первого цвета. Получаем C_8^4.
- Если у нас один кубик второго цвета. Тогда нам нужно расставить кубики на 9 позиций. Заметим, что на последнем месте может стоять только кубик либо первого, либо третьего цвета, так как в противном случае Вася бы уже израсходовал по 4 кубика каждого из двух кубиков и должен бы был уже закончить строительство. Получаем $2 \cdot C_8^1 \cdot C_7^4$.
- Если у нас два кубика второго цвета. Аналогично получаем $2 \cdot C_9^2 \cdot C_7^4$.
- Если у нас три кубика второго цвета. Аналогично получаем $2 \cdot C_{10}^3 \cdot C_7^4$

Таким образом, мы посчитали все возможные значения для кубиков второго цвета, теперь нам нужно их просто сложить и, как мы ранее заметили, умножить на три, чтобы учесть комбинации для оставшихся двух цветов. Получаем ответ $3(C_8^4 + 2C_7^4(C_8^1 + C_9^2 + C_{10}^3)) = 34650$.

Ответ: 34 650.

Ответ в общем виде: 5 кубиков – 756 756, 6 кубиков – 17 153 136, 7 кубиков – 399 072 960.

4. В основании треугольной пирамиды $DABC$ лежит равнобедренный не тупоугольный треугольник ABC ($AC = BC$). Известно, что $CB > AD$, а ребро DA перпендикулярно плоскости ABC. Рассматриваются проекции пирамиды $DABC$ на плоскости, содержащие прямую AC. Известно, что наибольшая площадь такой проекции равна 39, наименьшая равна 15, а площадь треугольника ABC равна 36. Найдите объём пирамиды $DABC$. **В ответ запишите квадрат объёма.**



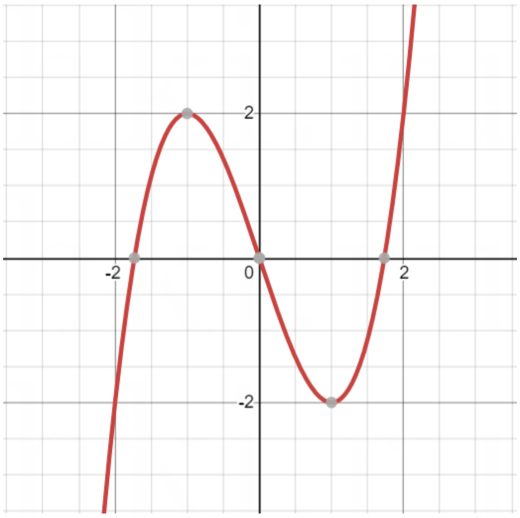
Решение. Так как ребро DA перпендикулярно ABC, то можно заключить, что угол между плоскостями ABC и ADC прямой. Заметим, что максимальная площадь проекции достигается тогда, когда максимизируются площади двух красных треугольников. Вспомним формулу площади проекции: $S_{\text{проекции}} = S_{\text{исх}} \cdot \cos\alpha$, где α – угол между исходной плоскостью и плоскостью, на которую делается проекция. Тогда $S_{B'AC} = S_{BAC} \cdot \cos\alpha$. Аналогично $S_{D'AC} = S_{DAC} \cdot \sin\alpha$. Подставляя данное в условии значение, получаем $36\cos\alpha + S_{ADC} \cdot \sin\alpha \le \sqrt{36^2 + s_{ADC}^2}$ (Правую часть получаем с помощью формулы вспомогательного аргумента, или неравенства Коши-Буняковского-Шварца). Корень равен 39, тогда $S_{ADC} = 15$.

Теперь рассмотрим случай, когда площадь проекции минимальная. Она достигается тогда, когда мы поставим треугольник ADC в основание, тогда точка B будет находиться в вершине пирамиды (подробно рассказано, почему в этом случае проекция минимальная, в видео). Тогда треугольник ABC прямоугольный, его катет – $\sqrt{72}$, а его высота – $\frac{30}{\sqrt{72}}$. Тогда получаем объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot \frac{30}{\sqrt{72}}$.

Ответ: 1800.

Ответ в общем виде: $\frac{2}{9} S_{ABC}(S_{max}^2 - S_{ABC}^2)$.

5. Найдите все значения параметра , при которых каждый из корней уравнения $3x^3 - 9x - a = 0$ не меньше, чем $\frac{a}{30} + \frac{6}{5}$. В ответ запишите сумму целых значений параметра a таких, что их модуль меньше 161.

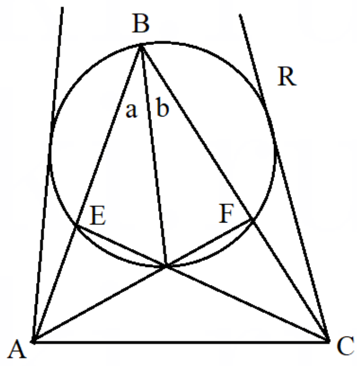


Решение. Рассмотрим уравнение в виде: $3x^3 - 9x = a$. Правая часть графика задает горизонтальную прямую, а левая задает линию, которая изображена на рисунке. В силу вида графика функции (критические точки можно найти с помощью производной) необходимо и достаточно, чтобы значение функции в точке $\frac{a}{30} + \frac{6}{5}$ не превосходило a при условии, что $|a| > 6$. Подставляя данный аргумент, получаем неравенство: $(a - 56)(a + 6)(a + 156) \leq 0$. Отсюда следует, что $a \in (-161; -156]$ и $(6; 54]$.

Ответ: Искомая сумма равна 674. Для того, чтобы решить задачу в общем виде подставьте вместо x $\frac{a}{30} + \frac{6}{5}$ и найдите a при которых полученное выражение будет меньше или равно a (при этом a должно быть больше значения данной функции от икса в точке локального максимума)

6. Пусть H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Из точек A и C проведены касательные AK и CT к окружности, построенной на отрезке BH как на диаметре. Пусть 15 и 17 – длины этих касательных. Каково **наименьшее** возможное значение длины стороны AC? **В ответ запишите квадрат длины** AC**.**

Решение. Попытаемся подумать, как можно использовать длины отрезков касательных. Сразу вспоминается теорема о касательной и секущей. Поэтому мы сразу знаем, что $AE \cdot AB = 225$ и $CF \cdot CB = 289$. Пусть радиус окружности, описанной вокруг треугольника BEF равен R. Тогда мы можем заметить, что $EF = 2R{\cdot}\sin(\alpha+\beta)$. Далее в силу подобия треугольников EFB и ABC получаем $AC = 2R \cdot \text{tg}\,(\alpha+\beta)$.



Далее видим, что $\angle EAC = 90 - \alpha$, так как если продлить прямую из точки B, то получится высота. Зная этот угол, мы можем найти сторону AE, $AE = 2R \cdot \text{tg}\,(\alpha+\beta)\sin\alpha$.

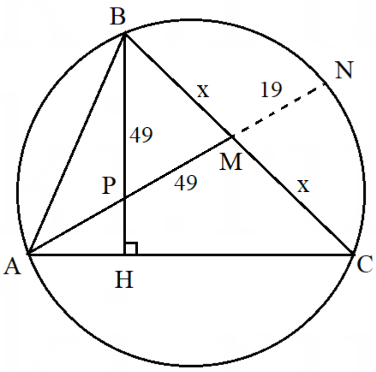
Затем $BF = 2R \cdot \cos\beta$. Из прямоугольного треугольника ABF мы можем увидеть, что $AB = \frac{2R\cdot\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$. Возвращаемся к теореме о касательной и секущей. Получаем $225 = \frac{4R^2\cdot\text{tg}\,(\alpha+\beta)\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$, $289 = \frac{4R^2\cdot\text{tg}\,(\alpha+\beta)\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha+\beta}$.

Сложим полученные выражения: $514 = \frac{4R^2\sin(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}\cdot(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha) = \frac{4R^2\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)} = 4R^2\,\text{tg}^2\,(\alpha+\beta) = AC^2$.

Ответ: 514.

Ответ в общем виде: $AK^2 + CT^2$.

7. Медиана AM и высота BH треугольника ABC (H – на стороне AC) пересекаются в точке P. Найдите PH, если $AM = BH = 49$, $MN = 19$, где N – точка пересечения продолжения AM с окружностью, описанной около треугольника ABC. **В ответ запишите сумму возможных значений PH.**



Решение. Заметим, что треугольник остроугольный. Из теоремы о двух хордах можем получить: $x^2 = 49 \cdot 19$, $x = 7\sqrt{19}$.

В прямоугольном треугольнике BHC можем найти катет HC, он будет равен $\sqrt{14^2 \cdot 19 - 49} = 21\sqrt{3}$. Тогда $\cos \angle C = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$.

Далее составим систему: первое уравнение – это формула косинусов для треугольника ABC, второе – формула длины медианы. Обозначим стороны AB и AC как a и b соответственно.

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 196 \cdot 19 - 2 \cdot b \cdot 21 \cdot \sqrt{3} \\ a^2 + b^2 = 2 \cdot 49 + 2 \cdot 49 \cdot 19 \end{cases}$$

Вычситаем из первого уравнения системы второе, решаем полученное квадратное уравнение относительно b, подставляем найденное b во второе и получаем корни $a = 7\sqrt{61}$ и $b = 35\sqrt{3}$. Получаем длину отрезка $AH = 14\sqrt{3}$.

Из M опустим высоту на сторону AC. Заметим, что мы получили среднюю линию, так как сторона BC делится пополам. Тогда мы можем заметить, что новый полученный треугольник подобен треугольнику APH, коэффициент подобия – $\frac{14}{24{,}5}$, тогда $PH = 14$.

Ответ: 14.

8. Последовательность задана формулой $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 2}$. Известно, что $x_{2017} + x_{2023} = 104$. Найдите x_{2020}.

Решение. Возведем исходное выражение в квадрат: $x_{n+1}^2 - 4x_{n+1}x_n + x_n^2 = 2$. Аналогично можно расписать и x_n: $x_n^2 - 4x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 = 2$. Вычтем из первого выражения второе. Получим $x_{n+1}^2 - x_{n-1}^2 - 4x_n(x_{n+1} - x_{n-1}) = 0$.

Разложим разность первых двух членов по формуле разности квадратов: $(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} + x_{n-1}) = 4x_n(x_{n+1} - x_{n-1})$. Заметим, что данное выражение можно сократить, так как общая скобка не равна нулю. $x_{n+1} + x_{n-1} = 4x_n$. $4x_{2020} = x_{2019} + x_{2021}$.

Аналогично мы можем расписать 2018 и 2022 члены: $4x_{2018} = x_{2017} + x_{2019}$, $4x_{2022} = x_{2021} + x_{2023}$. Из этого следует, что $4x_{2018} + 4x_{2022} = 104 + 4x_{2020}$, $x_{2018} + x_{2022} = 26 + x_{2020}$. Далее распишем 2019 и 2021 члены: $4x_{2019} = x_{2018} + x_{2020}$, $4x_{2021} = x_{2020} + x_{2021}$. Сложим их: $16x_{2020} = x_{2018} + x_{2022} + 2x_{2020}$, $14x_{2020} = x_{2018} + x_{2022}$.

Подставим полученное выражение в то, которое получилось при сложении 2018 и 2022 членов:$13x_{2020} = 26$, $x_{2020} = 2$.

Ответ: 2.

Ответ в общем виде: $\frac{x_{2017}+x_{2023}}{52}$. Если вам даны члены с другими номерами, то ответ может измениться.

9. Десять неотрицательных чисел таковы, что их сумма равна 4, а сумма их квадратов равна $5,2$. Какое **наибольшее** значение может иметь **самое большое** из этих чисел?

Вспомним неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+...+x_n^n}{n}} \geq \frac{x_1+...x_n}{n}.$$

Причем левая и правая части могут быть равны друг другу только тогда, когда все числа равны друг другу.

Попробуем выразить отсюда x_{10}. $x_{10}^2 = 5,2 - (x_1^2 + ... + x_9^2)$. Если мы возведем неравентсво между средними в квадрат, то получим $x_1^2 + ... + x_9^2 \geq 9AQQ2W1(x_1 + ... + x_9)^2$. Тогда мы можем сказать, что если x_{10} – максимальное положительное, то и x_{10}^2 максимальное положительное. Значит, сумма $(x_1^2+...+x_9^2)$ должна быть минимальной. Мы можем сказать, что она будет больше или равна $9(x_1+...+x_9)^2$. Значит, минимум достигается в следующей ситуации: $x_{10}^2 \leq 5,2-9(4-x_{10})^2$. Далее мы просто находим максимальное решение данного неравенства – $x \leq \frac{11}{5}$. Подставляем в исходное, убеждаемся, что оценка выполняется.

Ответ: 2,2.

Ответ в общем виде: Максимальное решение неравенства $x_n^2 \leq$ сумма квадратов чисел$-$ $(n-1)$(сумма чисел $- x_n)^2$, где n - количество членов.

10. Даны неотрицательные целые числа такие, что $24^a \cdot 6^b \cdot 18^c$ делится на 6^{100}. Найдите **минимальное** возможное значение $a+b+c$.

Решение. Распишем условие через основновную теорему арифметики: $2^{3a+b+c} \cdot 3^{a+b+2c} \vdots 6^{100}$. Это работает, когда $3a+b+c \geq 100$ и $a+b+2c \geq 100$. Можем заметить, что минимальное значение будет достигаться, когда b будет зануляться, поскольку «вклад» этого коэффициента в том, чтобы степень дошла до 100 наименьший. Получаем систему

$$\begin{cases} 3a+c=100 \\ a+2c=100 \end{cases}$$

В ней можем просто угадать корни, получаем $a=20$, $c=40$. Таким образом, мы уже привели пример, когда сумма равна 60. достигаться тогда, когда все остальные переменные равны.

Если мы хотим строгого доказательства, то домножим неравенство $a+b+2c \geq 100$ на 2 и сложим его с $3a+b+c \geq 100$, получим $5a+3b+5c \geq 300$. Заметим, что $5(a+b+c) \geq 5a+3b+5c$. Если поделим на 5, то получим оценку $a+b+c \geq 60$. Пример таких a, b и c мы уже получили.

Ответ: 60. Чтобы понять какой ответ получится в вашей задаче достаточно разложить исходное число на произведение степеней простых чисел и приравнять степень с наименьшим коэффициентом к 0 и решить полученную систему.