

# Олимпиада "Высшая проба" по математике

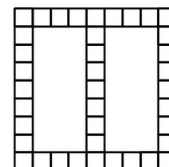
11 класс, 2019 год

## Первый день

1. Приведенный квадратный трехчлен  $f(x) = x^2 + px + q$  имеет два корня, один из которых совпадает со значением этого трехчлена в точке 0, а другой — со значением в точке 1. Найдите значение этого трехчлена в точке 8.

2. Углы  $A, B, C$  треугольника  $ABC$  равны 28, 44 и 108 градусов соответственно. Биссектриса угла  $ABC$  и серединный перпендикуляр к стороне  $AC$  пересекаются в точке  $D$ . Сколько градусов составляет угол  $ADC$ .

3. Есть клетчатая плоскость. В узлах сетки, то есть, в точках с целыми координатами стоит конечное число фонарей. Фонарь, стоящий в точке  $(m;n)$ , освещает прямой угол, состоящий из точек  $(x;y)$ , для которых  $x \geq m$  и  $y \geq n$ . Сколько фонарей стоит на плоскости, если следующие клетки и только они освещаются нечетным числом фонарей.



4. Часовая и минутная стрелки часов движутся непрерывно с постоянными скоростями. Момент времени  $X$  называется интересным, если найдется такой момент  $Y$  (может совпадать с  $X$ ), что часовая стрелка в момент  $Y$  будет там же, где минутная в момент  $X$ , а минутная в момент  $Y$  там же, где часовая в момент  $X$ . Сколько интересных моментов будет от 00:01 до 12:00?

5. Рассматриваются всевозможные квадратные трехчлены  $x^2 + px + q$  с положительным дискриминантом, у которых коэффициенты  $p$  и  $q$  являются целыми числами, делящимися на 5. Найдите наибольшее натуральное  $n$ , такое, что у любого трехчлена с описанными свойствами сумма сотых степеней корней — целое число, делящееся на  $5^n$ .

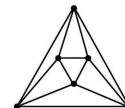
6. Найдите последнюю цифру десятичной записи числа  $\frac{8^{49} - 5^{59}}{8 - 5}$ .

7. На шахматной доске размером 2018 на 2018 нарисована окружность с центром в центре доски и диаметром 2017 клеток. Через сколько клеток доски проходит данная окружность (окружность проходит через клетку, если она имеет с ней хотя бы одну общую точку)?

8. Дана трапеция  $ABCD$ . Прямая, параллельная основаниям, пересекает боковые стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. На основаниях  $BC$  взята точка  $E$ . Отрезки  $AE$  и  $ED$  пересекают  $MN$  в точках  $S$  и  $T$ . Площади треугольников  $AMS$ ,  $SET$ ,  $TND$  равны, соответственно, 12, 8 и 15. Какова минимально возможная площадь трапеции при данных условиях?

9. Вася бросает два игральных кубика (с числами от 1 до 6 на гранях), и складывает выпавшие числа. Кроме того, если среди выпавших чисел есть хотя бы одна шестерка — можно бросить оба кубика еще раз, и прибавить выпавшие числа к уже набранной сумме, и так пока среди двух выпавших чисел оба числа не будут меньше шести. Чему равно среднее значение результатов у Васи?

10. На рисунке изображена схема из 6 городов и 12 дорог. Сколько есть способов закрыть на ремонт 7 дорог одновременно, чтобы все еще можно было проехать из любого города в любой?



## Второй день

1. У Пети и Васи на двоих было меньше 400 рублей. Петя купил несколько шоколадок по 47 рублей, а Вася несколько шоколадок по 37 рублей. При этом Вася потратил меньше, а шоколадок купил на одну больше. Сколько рублей потратили Петя и Вася вместе?

2. Отделение почты работает только по понедельникам, средам и пятницам, при этом только по выпадающим на четные числа месяца. (Такое расписание действует и в праздничные дни). Какое максимальное число дней подряд почта может не работать?

3. Пусть числа  $x$  и  $y$  положительны, а  $s$  — минимальное из  $x$ ,  $\frac{1}{y}$  и  $y + \frac{4}{x}$ . Найдите наибольшее возможное значение числа  $s$ . Если полученное число окажется нецелым, приведите его значение с точностью до третьего знака.

4. Найдите наименьшее натуральное число, не делящееся на 10, такое, что если переставить его цифры в обратном порядке, то получится его делитель (отличный от самого числа).

5. У выпуклого  $n$ -угольника ( $n > 4$ ) две диагонали больше 1, а все остальные равны 1. Найдите все возможные значения  $n$ ?

6. Решите в натуральных числах уравнение  $11x + 12y = 402$ .

7. Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и от самого числа. Число называется интересным, если у него найдутся два собственных делителя, один из которых простой, а другой точный квадрат, сумма которых тоже точный квадрат. Сколько существует интересных чисел, не превосходящих 1000?

8. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AC$  как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$ , а продолжение стороны  $BC$  за вершину  $C$  в точке  $N$ . Известно, что  $AC=170$ ,  $AB=357$ , и  $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{5}$ . Найдите  $AN$ .

9. Куб параллельно одной из его граней распилили на два прямоугольных параллелепипеда. Площадь поверхности параллелепипеда в 2 раза больше площади поверхности другого. Во сколько раз объем первого параллелепипеда больше объема второго?

10. Петя завел учетную запись в социальной сети и сразу добавил в друзья 20 человек. После этого он стал последовательно добавлять каждого, с кем у него есть по крайней мере 20 общих друзей, и остановился лишь тогда, когда друзей стало больше 2000 (все Петины приглашения сразу принимались). После этого он обнаружил, что больше всего друзей у него с Васей (возможно, с кем-то у Пети оказалось столько же общих друзей, сколько с Васей). Какое минимальное количество общих друзей может оказаться у Пети и Васи?