Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2018 год
1 вариант

1. Из поселка на станцию по одной дороге одновременно отправились дачник А пешком и мотоциклист с пассажиром — дачником Б. Не доехав до станции, мотоциклист высадил пассажира и сразу поехал обратно к поселку, а дачник Б пошел к станции пешком. Встретив дачника А, мотоциклист посадил его к себе и привез на станцию. В результате оба дачника прибыли на станцию одновременно. Какую часть пути от поселка до станции дачник А проехал на мотоцикле, если дачники шли с одинаковой скоростью, в 9 раз меньше скорости мотоциклиста?

2. Найдите целую часть числа $a+\frac{9}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная часть числа $\sqrt{76-42\sqrt{3}}$.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^{x+2y}+2^{x}=3\cdot 2^{y} \\ 2^{2x+y}+2\cdot 2^{y}=4\cdot 2^{x} \end{cases}$$

4. На стороне AC Треугольника ABC взяты точки E и K, причем точка E лежит между точками A И K и $AE{:}EK{:}KC=3{:}5{:}4$. Медиана AD пересекает отрезки BE и BK в точках L и M соответственно. Найдите отношение площадей треугольников BLM и ABC.

5. Про последовательность a_n известно, что a_1=1,5 и $a_n = frac1n^2-1$ при натуральных n больших 1. Существуют ли такие n при которых сума первых n членов последовательности отличается от 2,25 меньше, чем на 0,01? Если да, то найдите наименьшее из них.

6. Найдите все решения неравенства:

$$\sin^{2018}x+\cos^{-2019}x\geq\cos^{2018}x+\sin^{-2019}x$$

принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}]$.

7. Сколько существует значений параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение?

$$4a^2+3x\lg x+3\lg^2 x=13a\lg x+ax$$

имеет единственное решение?

8. Боковое ребро правильной пирамиды равно 2. Может ли ее объем быть равным 3,25?