

# Олимпиада «Высшая проба» по математике

## 11 класс, 2017 год

1. От домика Тофслы и Вифслы отходят 6 прямых дорог, разделяющих окрестное круглое поле на 6 равных секторов. Тофсла и Вифсла отправляются в путешествие из своего домика в центре поля со скоростью 5 км/ч случайно независимо друг от друга выбрав себе дорогу, по которой идти. С какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 7 км?

2. Фонари располагаются на плоскости, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами  $(a, b)$  освещает точки  $(x, y)$  с координатами  $x \leq a$  и  $y \leq b$ .) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей, так что любая точка плоскости, освещенная ровно  $k > 0$  синими фонарями, будет освещена ровно  $k - 1$  красным фонарем? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению).

3. Треугольник  $ABC$ , в котором  $AB > AC$ , вписан в окружность с центром в точке  $O$ . В нем проведены высоты  $AA'$  и  $BB'$ , и  $BB'$  повторно пересекает описанную окружность в точке  $N$ . Пусть  $M$  - середина отрезка  $AB$ . Докажите, что если  $\angle OBN = \angle NBC$ , то прямые  $AA'$ ,  $ON$  и  $MB'$  пересекаются в одной точке.

4. В таинственном лесу два мудреца в черном и белом колпаках раздают гномам грибочки. К ним в две очереди выстроились  $2n$  гномиков,  $n$  в черных и  $n$  в белых колпаках. Если к мудрецу подходит гномик с таким же цветом колпака, то гномик получает грибочек и удаляется, а иначе отправляется в конец очереди к другому мудрецу. За какое наименьшее количество направлений в другую очередь мудрецы могут раздать всем гномам по грибочку, если в процессе раздачи мудрецы могут один раз поменяться колпаками? (Мудрецы сами решают, в какой момент и к кому из них подойдет следующий гномик из соответствующей очереди. Очереди могут быть разной длины. Все грибочки совершенно одинаковы.)

5. Из натурального числа  $n$  разрешается получить либо число  $n^2 + 2n$ , либо число  $n^3 + 3n^2 + 3n$ . Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества операций. Найдите все числа, совместимые с числом 2018.

6. В пространстве даны 5 точек, таких что в проекциях на координатные плоскости никакие три точки не лежат на одной прямой. Могло ли оказаться так, что каждая точка ровно одной этих проекций лежит внутри выпуклой оболочки остальных? (Мы говорим, что точка *лежит внутри выпуклой оболочки* других точек, если она лежит внутри треугольника с вершинами в некоторых трех из этих точек.)