

Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2017 год

1. В компании из 6 человек некоторые компаниями по трое ходили вместе в походы. Верно ли, что среди них найдутся четверо, среди которых каждые трое ходили вместе в поход, либо четверо, где никакое трое не ходили вместе в поход?

2. На окружности с центром O расположим шестерку точек P_1, \dots, P_6 . Назовем шестерку *интересной*, если $\overline{OP_1} + \dots + \overline{OP_6} = 0$, и все углы $\angle P_i O P_j$ целые в градусах. Назовем шестерку *скучной*, если она переводится в себя отражением от точки O или поворотом вокруг O на 120° . Существуют ли интересные нескучные шестерки точек на окружности?

3. Выпуклый многогранник имеет 8 вершин и 6 четырехугольных граней. Может ли проекция этого многогранника на некоторую плоскость оказаться правильным 8-угольником?

4. Тройка целых чисел (x, y, z) , наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения

$$y^2 z + y z^2 = x^3 + x^2 z - 2 x z^2.$$

Докажите, что z является кубом целого числа.

5. Числа P_1, \dots, P_n являются перестановкой набора чисел $1, \dots, n$ (то есть такое P_i равно одному из $1, \dots, n$, и все P_i различны). Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i + P_{i+1}} > \frac{n-1}{n+2}.$$

6. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Пусть M - середина стороны BC , K - середина B_1C_1 . Докажите, что окружность, проходящая через K, H и M , касается AA_1 .