Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2016 год

1. Три различнх положительных числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Могут ли эти же три часа оказаться тремя (не обязательно последовательными) членами геометрической прогрессии?

2. Вокруг треугольника ABC с углом $\angle B = 60^\circ$ описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C, пересекаются в точке B_1. На лучах AB и CB отметили точки A_0 и C_0 соответственно так, что $AA_0 = AC = CC_0$. Докажите, что точки A_0, C_0, B_1 лежат на одной прямой.

3. Функция $f(x)$, определенная при всех действительных x, является четной. Кроме того, при любом действительном x выполняется равенство

$$f(x) + f(10 - x) = 4.$$

а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.
б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

4. Петя хочет проверить знания своего брата Коли - победителя олимпиады «Высшая проба» по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c, и вычислил $x = \text{НОД}(a, b), y = \text{НОД}(b, c), z = \text{НОД}(c, a)$. Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x, одно из чисел во втором ряду равно y, одно из чисел в третьем ряду равно z, и попросил угадать числа x, y, z. Подумав несколько минут, Коля справился задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z).

5. Два коридора высотой и шириной в 1 м идут перпендикулярно друг другу по первому и второму этажу здания. Разделяющее их перекрытие разобрано, образуя дыру 1×1 м в полу одного и потолке другого. Какова максимальная возможная длина балки, которую можно передать из одного коридора в другой через дыру? (Балку считать негнущимся отрезком нулевой толщины. Толщина перекрытия также равна нулю, т. е. пол верхнего коридора и потолок нижнего коридора находятся в одной плоскости.)

6. Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 2016 так, чтобы ни в одной стоке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ - количество таких расстановок. Например, $f(1) = 2016, f(2017) = 0$.
а) Что больше, $f(2015)$ или $f(2016)$?
б) Что больше, $f(1008)$ или $f(1009)$?