Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2015 год

1. Действительные числа x, y, z выбираются так, что выполняются равенства: $xy+yz+zx = 4, xyz = 6$. Доказать, что при любом таком выборе значение выражения

$$\left(xy - \frac{3}{2}(x+y)\right)\left(yz - \frac{3}{2}(y+z)\right)\left(zx - \frac{3}{2}(z+x)\right)$$

является одним и тем же числом, и найти это число.

2.В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты (ε) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\text{Б} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{6}}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \text{Б} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{11}}{\overset{11}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{15}}{\overset{10}{\rightleftarrows}} \text{К}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например, одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов, а один кокос - на 1/15 доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь годно мелкие части: например, обменять 1013 енота на 606/43 банана). Обмены $\$ \rightleftharpoons \varepsilon$ и $\$ \rightleftharpoons$ Б в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да - объясните, как. Если нет, докажите.

3. Даны три точки A, B, C, образующие треугольник с углами $30°, 45°, 105°$. Выбираются две из этих точек, и проводится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, после чего третья точка отражается относительно этого серединного перпендикуляра. Получаем четвертую точку D. С получившимся набором из 4 точек осуществляется та же процедура - выбираются две точки, проводится серединный перпендикуля и все точки отражаются относительно него. Какое наибольшее количество *различных* точек можно получить в результате многократного повторения этой процедуры?

4. Приведите пример функции $f(x)$, для которой выполняются все три перечисленных ниже условия:

- область определения функции $f(x)$ - множество всех действительных чисел R,
- при любом $b \in R$ уравнение $f(x) = b$ имеет ровно одно решение,
- при любом $a > 0$ и любом $b \in R$ уравнение $f(x) = ax + b$ имет не менее двух решений.

5. Обозначим через T_k произведение первых k нечетных простых чисел: $T_1 = 3$, $T_2 = 3 \cdot 5$, $T_6 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ и т. д. Для каждого натурального k найти количество натуральных чисел n таких, что число $n^2 + T_k n$ является точным квадратом натурального числа. Решить задачу: а) для $k = 1$, б) для $k = 2$, в) для произвольного заданного натурального k.

6. В пространстве 270 шаров равных радиусов, любые два из которых пересекаются. Докажите, что среди них можно выбрать 10 шаров так, что найдется точка, пинадлежащая всем выбранным шарам.