

Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2013 год

1. Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения $3x^2 - y^2 = 3^{x+y}$ и докажите, что других нет.
2. Триномом степени p называется функция вида $f(x) = x^p + ax^q + 1$, где p, q – натуральные числа, $q < p$, и a – произвольное вещественное число (быть может, равное 0). Найдите все пары триномов, которые дают в произведении трином степени 15.
3. Улитка, имеющая постоянную скорость 40 см/ч, начала ползти по цилиндрической колонне из точки А. Каждые 15 минут она поворачивала поочередно то влево, то вправо на 90° , а все остальное время ползла прямо. (Углы и длины измеряются на плоской развертке колонны, см. рисунок). Через 1 час 45 минут после начала путешествия улитка заметила, что снова оказалась в точке А, а через 12,5 часов после начала путешествия захотела вернуться в точку А по кратчайшему пути, уже никуда не сворачивая. Какое расстояние ей придется поползти?
4. Вместо крестиков в выражение $\times \cdot \times + \times \cdot \times + \dots + \times \cdot \times$ (50 слагаемых) расставили числа $1, \dots, 100$, каждое по одному разу. Какое максимальное и минимальное значение может иметь получившееся выражение?
5. Пусть x, y и z – произвольные вещественные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x-y)^2} + \sqrt{1+(y-z)^2} + \sqrt{1+(z-3)^2}$? Обоснуйте свой ответ.
6. Даны два высоких цилиндрических стакана радиусов r и R , $r < R$. Широкий поставили на горизонтальный стол, а узкий всевозможными способами помещают на него так, что он опирается на кромку широкого двумя точками своей кромки и одной точкой боковой поверхности (см. рисунок). Опишите геометрическое место точек пространства, в которых может при этом оказаться верхняя точка кромки узкого стакана, соприкасающейся с широким.