

# Олимпиада «Высшая проба» по математике

## 11 класс, 2012 год

1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел  $a$  и  $b$ , такие, что  $2a^2 + 3b^2$  делится на  $2a + 3b$ .
2. Найдите максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость графики 10 квадратичных функций  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .
3. При каком значении параметра  $a$  график многочлена  $x^4 - 6x^3 + 12x^2 + ax$  симметричен относительно прямой  $x = c$  для какого-нибудь значения константы  $c$ ?
4. В пространстве выбраны четыре точки, все координаты каждой из которых делятся на 3, причем эти точки не лежат в одной плоскости. Какое минимальное число точек, все координаты которых четны, может содержаться в тетраэдре, вершинами которого являются выбранные четыре точки? (Содержаться - значит лежать внутри, на грани, на ребре или в вершине.)
5. Описанный четырехугольник  $ABCD$  делится диагональю  $AC$  на два подобных, но не равных треугольника. Чему может быть равна длина диагонали  $AC$ , если длины сторон  $AB$  и  $AD$  равны 5 и 10, соответственно?
6. В одной из вершин правильного  $2n$ -угольника,  $n \geq 2$ , поставлено число 1. Для данной расстановки чисел  $2, 3, \dots, 2n$  в остальные вершины  $2n$ -угольника поставим на каждой стороне знак  $+$ , если число на конце стороны (при движении по часовой стрелке) больше числа на ее начале и знак  $-$ , если оно меньше. Докажите, что модуль разности между числом расстановок чисел  $2, 3, \dots, 2n$  с четным количеством плюсов на сторонах равен числу расстановок, в которых плюсы и минусы чередуются при (а)  $n = 3$ , (б)  $n = 4$ , (в) в произвольном  $n$ .