

Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2011 год

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \cos \cos \cos x$.
2. Существует ли квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ такой, что $f(0) = 2011$, $f(2011) = 0$, а значения во всех натуральных степенях двойки делятся на 3? (Т. е. $f(2^n)$ делится на 3 при каждом натуральном n .)
3. Дан остроугольный треугольник на плоскости. В нем проводится высота. В одном из получившихся треугольников снова проводится высота. Такая операция повторяется 2011 раз: каждый раз проводится высота в каком-нибудь из образовавшихся при предыдущих построениях треугольников. Рассмотрим все прямые, содержащие проведенные высоты. Докажите, что на плоскости можно расположить угол в 30 градусов, не имеющий общих точек ни с одной из этих прямых.
4. Центры трех шаров с радиусами 1, 2, 3 образуют правильный треугольник со стороной 100500. Найти геометрическое место точек пересечения медиан треугольника ABC таких, что точка A лежит в первом шаре, точка B - во втором шаре, а точка C - в третьем шаре.
5. Натуральные числа p и q таковы, что $\frac{p}{q} < \sqrt{17}$. Всегда ли верно, что

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{3pq} < \sqrt{17}?$$

6. Класс из 20 учеников разделен на две половины так, что каждый школьник из первой половины дружит ровно с шестью одноклассниками, а каждый школьник из второй половины дружит ровно с четырьмя одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трех учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.