Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2018 год
1 вариант

1. На каком из пяти интервалов, на которые разбивают числовую ось четыре точки

$$x^5 < y^8 < y^2 < x^6,$$

лежит число 0?

2. Какое из чисел больше: $\underbrace{\sqrt{17\sqrt{13\sqrt{17\sqrt{13\sqrt{17...}}}}}}_{\text{2018 знаков корня}}$ или $17\sqrt[3]{\frac{13}{17}}$?

3. В треугольнике ABC, площадь которого равна 20, проведена медиана CD. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $AC = \sqrt{41}$, а центр окружности, вписанной в треугольник ACD, лежит на окружности, описанной около треугольника BCD.

4. Архив фотографий укладывают в порядке их нумерации в одинаковые альбомы, ровно по 4 фотографии на одну страницу. При этом 81-я по счёту фотография попала на 5-ю страницу одного из альбомов, 171-я — на 3-ю страницу другого. Сколько фотографий вмещает каждый альбом?

5. Решите неравенство

$$\arcsin\left(\frac{5}{2\pi}\arccos x\right) > \arccos\left(\frac{10}{3\pi}\arcsin x\right).$$

6. Найдите все такие наборы чисел $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$, что $x_1 = x_{n+1}$ и при всех $k = 1, ..., n$ выполнено неравенство

$$2\log_2 x_k \cdot \log_2 x_{k+1} - \log_2^2 x_k = 9.$$

7. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sin(x + \sin x) + \sin(x - \sin x) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)\sin\sin x.$$

8. Андрею нравятся все числа, не делящиеся на 3, а Тане нравятся все числа, в которых нет цифр, делящихся на 3.

а) Сколько четырёхзначных чисел нравятся и Андрею, и Тане?

б) Найдите общую сумму цифр всех таких четырёхзначных чисел.