Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2017 год
1 вариант

1. Когда автомобиль едет из пункта A в пункт B, он тратит 25% времени на путь в гору, 60% — по равнине, а остальное время — с горы. Время его движения из A в B и по той же дороге из B в A одинаково, а его скорости в гору, с горы и по равнине постоянны, но различны. Во сколько раз быстрее автомобиль едет с горы, чем в гору?

2. Решите уравнение $\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=2\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}+\sqrt{2}$.

3. Выясните какое из чисел больше: $11^{\lg 121}$ или $10\cdot 10^{\lg^2 11}+11$.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Касательные к этой окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются на прямой BD. Найдите сторону AD, если $AB=2$ и $BC:CD=4:5$.

5. Вычислите $\sqrt{n}+\sqrt{n+524}$, если известно, что это число рациональное и что n - натуральное.

6. В прямой круговой конус, радиус основания которого равен 2, вписан шар. Найдите объём этого шара, если он в три раза меньше объёма конуса.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно из следующих двух утверждений является истинным:

1) «Уравнение $\cos(\cos x)+\sin(\sin x)=a$ имеет ровно два корня на отрезке $[0;\pi]$»;
2) «Уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x=a$ имеет корни».

8. Рассматриваются всевозможные наборы, которые состоят из 2017 различных натуральных чисел и в каждом из которых ни одно из чисел нельзя представить в виде суммы двух других чисел этого набора. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее число в таком наборе?