Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2016 год
1 вариант

1. Незнайка прыгал от своего дома к дому Знайки. Три четверти пути он пропрыгал прыжками, длина которых равна двум его обычным шагам, а остальную четверть пути - прыжками, длина которых равна трем его обычным шагам. Оказалось, что прыжков в два шага оказалось на 350 больше, чем прыжков в три шага. Сколько обычных шагов от дома Знайки до дома Незнайки? Считаем, что все шаги у незнайки одинаковые.

2. Найдите все решения уравнения $\operatorname{arcctg}^2 x = 3\operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi^2}{36}$.

3. Том Сойер, Сид Сойер и Гек Финн красили забор. Вначале Том красил один в течение времени, за которое Сид и Гек, работая вместе, могли бы покрасить половину забора. Затем красил один Сид в течение времени, за которое Том и Гек, работая вместе, могли бы покрасить $\frac{5}{4}$ всего забора. Потом красил один Гек в течение времени, за которое Том и Сид работая вместе, могли бы покрасить четверть всего забора. В результате забор был покрашен. Во сколько раз быстрее они окончили бы работу, если бы с самого начала все время работали вместе? (Предполагается, что скорость работы каждого мальчика постоянна.)

4. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 - середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3\overline{AA_1}+4\overline{BB_1}+5\overline{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2;1)$.

5. Найдите все решения неравенства

$$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x-5) - \log_{\frac{\pi}{6}}(7-2x)\right)\left(\cos\left(x+\frac{7}{4}\right) - \cos(2x-1)\right)(|x-4| - |2x-5|) \geq 0.$$

6. Найдите произведение всех значений x, при каждом из которых

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11},\ 2^{x^2-9x+11},\ \left(\sqrt{4+\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$$

- арифметическая прогрессия.

7. Найдите наибольшее значение объёма треугольной пирамиды, у которой противоположные рёбра попарно равны, а сумма длин всех ребер равна $36\sqrt{2}$.

8. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечётных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?