

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2015 год

1 вариант

1. В ящике лежат сто разноцветных шариков: 28 красных, 20 зелёных, 13 жёлтых, 19 синих, 11 белых и 9 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = (\arcsin(\sin(\arccos(\cos 3x))))^{-5}.$$

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и DB перпендикулярны сторонам DC и AB соответственно. Из точки B проведён перпендикуляр на сторону AD , пересекающий AC в точке O . Найдите AO , если $AB = 4$, $OC = 6$.

4. Найдите наибольшее значение $x + y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \geq 1.$$

5. Отрезок $AB = 8$ пересекает плоскость α под углом 30° и делится этой плоскостью в отношении $1 : 3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A и B и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

6. Для любого натурального n и для любого набора чисел x_1, x_2, \dots, x_n из отрезка $[0, 3]$ уравнение $\sum_{i=1}^n |x - x_i| = an$ имеет решение x , принадлежащее отрезку $[0, 3]$. Укажите, какие из следующих значений a удовлетворяют этому условию: а) $a = 0$, б) $a = \frac{3}{2}$, в) $a = 2$.

7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 6, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2 \arcsin \frac{1}{3}$?

8. Маша, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Маши числа перестали меняться, и тогда она остановилась.

а) Какое число оказалось у Маши в конце?

б) Какое наименьшее число могло быть у Маши в самом начале (укажите две его последние цифры)?