

# Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2014 год

1 вариант

1. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена  $x^2 + 2ax + 4a$  равна 3.

2. Маша выписала на доске подряд все натуральные числа от 2 до 2015. Пришёл Ваня и заменил каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришла Таня и сделала то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?

3. Среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба, наибольшую площадь имеет прямоугольник, отношение сторон которого равно 2. Найдите острый угол ромба.

4. Найдите все пары  $(a, b)$ , при которых множество решений неравенства  $\log_{2014}(x - a) > 2x^2 - x - b$  совпадает с промежутком  $(0; 1)$ .

5. Найдите все значения  $\alpha$ , при каждом из которых нули функций

$$f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2} - a\right) \quad \text{и} \quad g(x) = 2 \sin 2x - 4 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$$

строго чередуются на числовой оси.

6. Для охраны объекта в течение 5 суток заказчик договорился с охранниками о следующем: все они укажут отрезки времени своих предполагаемых дежурств с единственным условием, чтобы их объединение составляло заданные 5 суток, а он выберет из этих отрезков любой набор, удовлетворяющий тому же условию, и оплатит работу из расчета 500 руб. в час каждому дежурному. Какая наименьшая сумма денег, заранее подготовленная заказчиком, позволит ему наверняка расплатиться с охранниками?

7. В правильную треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$  вписан шар радиуса  $\sqrt{2}$ . Найдите площадь боковой поверхности вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку  $A$  и середины рёбер  $BB_1$  и  $CC_1$ .

8. Прямоугольная таблица состоит из 5681 одинаковой клетки. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами 1, 2, ..., 5681 подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася – по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 5 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?

# Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2014 год

2 вариант

1. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена  $x^2 - 3ax + 4a$  равна 5.

2. Ваня выписал на доске подряд все натуральные числа от 9 до 2022. Пришла Маша и заменила каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришёл Миша и сделал то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?

3. Прямоугольник, отношение сторон которого равно 3, имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба. Найдите острый угол ромба.

4. Найдите все пары  $(a, b)$ , при которых множество решений неравенства  $2 \log_{2014}(x + a) > x^2 - x - 2b$  совпадает с промежутком  $(1; 2)$ .

5. Найдите все значения  $\alpha$ , при каждом из которых нули функций

$$f(x) = 2 \sin 2x - 4 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} \quad \text{и} \quad g(x) = \sin \left( \frac{3x}{2} + a \right)$$

строго чередуются на числовой оси.

6. Для охраны объекта заказчик договорился с охранниками о следующем: все они укажут отрезки времени своих предполагаемых дежурств с единственным условием, чтобы их объединение составляло заранее заданный заказчиком отрезок времени, а он выберет из этих отрезков любой набор, удовлетворяющий тому же условию, и оплатит работу из расчета 250 руб. в час каждому дежурному. Какой наибольший отрезок времени заказчик может задать, чтобы наверняка уложиться в 80 000 руб?

7. В правильную треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$  вписан шар радиуса  $\sqrt{5}$ . Найдите объем вписанного в шар кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку  $A$  и середины рёбер  $BB_1$  и  $CC_1$ .

8. Прямоугольная таблица состоит из 4147 одинаковых клеток. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами 1, 2, ..., 4147 подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася – по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 7 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?

# Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2014 год

3 вариант

1. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена  $x^2 + 3ax + 4a$  равна 2.
2. Таня выписала на доске подряд все натуральные числа от 4 до 2017. Пришёл Миша и заменил каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришла Маша и сделала то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?
3. Среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба, наибольшую площадь имеет прямоугольник, отношение сторон которого равно 4. Найдите острый угол ромба.
4. Найдите все пары  $(a, b)$ , при которых множество решений неравенства  $\log_{2014}(2x - a) > 3x^2 - 2x - b$  совпадает с промежутком  $(0; 1)$ .
5. Найдите все значения  $\alpha$ , при каждом из которых нули функций

$$f(x) = 2 \sin 2x - 4 \cos \left( x - \frac{5\pi}{6} \right) - \sqrt{3} \quad \text{и} \quad g(x) = \sin \left( \frac{3x}{2} - a \right)$$

строго чередуются на числовой оси.

6. Для охраны объекта в течение 10 суток заказчик договорился с охранниками о следующем: все они укажут отрезки времени своих предполагаемых дежурств с единственным условием, чтобы их объединение составляло заданные 10 суток, а он выберет из этих отрезков любой набор, удовлетворяющий тому же условию, и оплатит работу из расчета 400 руб. в час каждому дежурному. Какая наименьшая сумма денег, заранее подготовленная заказчиком, позволит ему наверняка расплатиться с охранниками?
7. В правильную треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$  вписан шар радиуса  $\sqrt{3}$ . Найдите площадь боковой поверхности вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку  $A$  и середины рёбер  $BB_1$  и  $CC_1$ .
8. Прямоугольная таблица состоит из 5797 одинаковых клеток. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами 1, 2, ..., 5797 подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася – по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 5 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?

# Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2014 год

4 вариант

1. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена  $x^2 - 5ax + 4a$  равна 3.

2. Миша выписал на доске подряд все натуральные числа от 7 до 2020. Пришла Маша и заменила каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришёл Ваня и сделал то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?

3. Прямоугольник, отношение сторон которого равно 5, имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба. Найдите острый угол ромба.

4. Найдите все пары  $(a, b)$ , при которых множество решений неравенства  $\log_{2014}(2x + a) > x^2 - 2x - b$  совпадает с промежутком  $(1; 2)$ .

5. Найдите все значения  $\alpha$ , при каждом из которых нули функций

$$f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2} + a\right) \quad \text{и} \quad g(x) = 2 \sin 2x + 4 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$$

строго чередуются на числовой оси.

6. Для охраны объекта заказчик договорился с охранниками о следующем: все они укажут отрезки времени своих предполагаемых дежурств с единственным условием, чтобы их объединение составляло заранее заданный заказчиком отрезок времени, а он выберет из этих отрезков любой набор, удовлетворяющий тому же условию, и оплатит работу из расчёта 300 руб. в час каждому дежурному. Какой наибольший отрезок времени заказчик может задать, чтобы наверняка уложиться в 90000 руб?

7. В правильную треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$  вписан шар радиуса  $\sqrt{10}$ . Найдите объём вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку  $A$  и середины рёбер  $BB_1$  и  $CC_1$ .

8. Прямоугольная таблица состоит из 5863 одинаковых клеток. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами 1, 2, . . . , 5863 подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася — по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 7 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?