Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2013 год
1 вариант

1. На покраску дома желтой краски потребовалось больше, чем белой на 20%, а коричневой краски - на 25% меньше, чем желтой. На сколько процентов коричневой и желтой краски уммарно потребовалось больше, чем белой?

2. Решить уравнение $\sqrt{6}\cos x + \sqrt{2}|\sin x| = 2$.

3. Решить неравенство $\log_{x+2+4x+3}(x-4)^2 \cdot \log_{-x^2+3x+4}(3-x)^3 \leq 0$.

4. В трапеции $ABCD$, где $BC||AD$, а диагонали пересекаются в точке O, на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 2 : 3$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 3 : 2$. Найти площадь треугольника COD, если $AD = 7, BC = 3, KM = 6$, а $\cos\angle CAD = 1/5$.

5. Функция $f(t)$ с областью определения $D(f) = [1, +\infty)$ удовлетворяет уравнению $f\left(\frac{4^y+4^{-y}}{2}\right) = y$ для любого $y \geq 0$. Для каждого значения $a \neq 0$ найти все решения неравенства $f\left(\frac{a}{x+2a}\right) \leq 1$.

6. В коробке у Маши лежит 25 новогодних шаров, которыми Маша начинает украшать елку. Каждый шар она сначала в течение 10 секунд выбирает в коробке, а затем в течение 15 секунд вешает на елку. Два ее младших брата Саша и Паша незаметно снимают шары с елки и прячут среди своих игрушек. Дождавшись момента, когда Маша начинает искать в коробке очередной шар один из братьев (но не оба) может снять с елки один шар (на это ему требуется ровно 10 секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный шар, у Саши уходит 50 секунд, после чего он готов украсть с елки следующий шар, а Паша прячет шар за одну минуту и 50 секунд. Какое наименьшее число шаров может висеть на елке в тот момент, когда Маша повесит свой последний шар?

7. Три велосипедиста одновременно начинают двигаться в одной плоскости по трем концентрическим окружностям с общим центром O и радиусами $R_1 = 20$ м для первого, $R_2 = 40$ м для второго и $R_3 = 80$ м для третьего велосипедиста. В начальный момент времени велосипедисты находятся на одном луче с вершиной в точке O. Все велосипедисты двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями, причем скорость первого велосипедиста в два раза больше скорости второго, но в два раза меньше скорости третьего. Велосипедисты продолжают свое движение до тех пор, пока не закончит свой полный круг последний из них (тот, кто потратит на объезд своего круга больше всего времени). Сколько раз за это время они окажутся на одной прямой, не проходящей через центр O?

8. В пирамиде $FABC$ $AB = BC, FB = FK$, где K - середина отрезка AC, а тангенс угла между плоскостями FAB и ABC относится к тангенсу угла между плоскостями FBC и ABC как $1 : 3$. Плоскость π параллельна AB, делит ребро FC в отношении $1 : 4$, считая от вершины F, и проходит через основание O высоты FO пирамиды $FABC$. Найти отношение объемов многогранников, на которые делит эта плоскость пирамиду $FABC$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2013 год
2 вариант

1. Фермер вырастил свёклы меньше, чем моркови, на 50%, а свёклы и моркови суммарно вырастил меньше, чем картофеля на 40%. На сколько процентов он вырастил меньше моркови, чем картофеля?

2. Решить уравнение $\sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}|\cos x| = 2$.

3. Решить неравенство $\log_{x^2+3x+2}(x-5)^2 \cdot \log_{-x^2+4x+5}(4-x)^3 \leq 0$.

4. В трапеции $ABCD$, где $BC||AD$, а диагонали пересекаются в точке O, на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 2 : 1$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 1 : 2$. Найти площадь треугольника COD, если $AD = 5, BC = 2, KM = 7/3$, а $\cos\angle CAD = 1/3$.

5. Функция $f(t)$ с областью определения $D(f) = [1, +\infty)$ удовлетворяет уравнению $f\left(\frac{2^y+2^{-y}}{2}\right) = y$ для любого $y \leq 0$. Для каждого значения $b \neq 0$ найти все решения неравенства $f\left(\frac{3b}{x+b}\right) \leq -2$.

6. В коробке у Вани лежат 32 новогодних шара, которыми Ваня начинает украшать ёлку. Каждый шар он сначала в течение 15 секунд выбирает в коробке, а затем в течение 20 секунд вешает на ёлку. Две его младших сестры Аня и Таня незаметно снимают шары с ёлки и прячут среди своих игрушек. Дождавшись момента, когда Ваня начинает искать в коробке очередной шар, одна из сестёр (но не обе) может снять с ёлки один шар (на это ей требуется ровно 15 секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный шар, у Ани уходит одна минута и 45 секунд, после чего она готова украсть с ёлки следующий шар, а Таня прячет шар за три минуты и 45 секунд. Какое наименьшее число шаров может висеть на ёлке в тот момент, когда Ваня повесит свой последний шар?

7. Три черепахи одновременно начинают двигаться в одной плоскости по трём концентрическим окружностям с общим центром O и радиусами $R_1 = 2$ м для первой, $R_2 = 3$ м для второй и $R_3 = 9$ м для третьей черепахи. В начальный момент времени черепахи находятся на одном луче с вершиной в точке O. Все черепахи двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями, причём скорость третьей черепахи в шесть раз больше скорости второй и относится к скорости первой черепахи как $9 : 4$. Черепахи продолжают своё движение до тех пор, пока не закончит свой круг последняя из них (та, что потратит на обход своего круга больше всего времени). Сколько раз за это время они окажутся на одной прямой, не проходящей через центр O?

8. В пирамиде $SABC$ $AB = BC, SB = SN$, где N - середина отрезка AC, а тангенс угла между плоскостями SAB и ABC относится к тангенсу угла между плоскостями SBC и ABC как $5 : 2$. Плоскость π параллельна BC, делит ребро SA в отношении $1 : 2$, считая от вершины S, и проходит через основание O высоты SO пирамиды $SABC$. Найти отношение объемов многогранников, на которые делит эта плоскость пирамиду $SABC$.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2013 год
3 вариант

1. Детская машина с педалями дешевле самоката на 25%, а общая стоимость машины с педалями и самоката на 25% больше стоимости велосипеда. На сколько процентов велосипед дороже самоката?

2. Решить уравнение $\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}|\sin x| = 2$.

3. Решить неравенство $\log_{x^2+6x+8}(x-7)^2 \cdot \log_{-x^2+5x+14}(3-x)^3 \le 0$.

4. В трапеции $ABCD$, где $BC||AD$, а диагонали пересекаются в точке O, на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 1 : 3$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 3 : 1$. Найти площадь треугольника COD, если $AD = 9, BC = 5, KM = 21/2$, а $\cos\angle CAD = 1/4$.

5. Функция $f(t)$ с областью определения $D(f) = [1, +\infty)$ удовлетворяет уравнению $f\left(\frac{3^y+3^{-y}}{2}\right) = y$ для любого $y \ge 0$. Для каждого значения $c \neq 0$ найти все решения неравенства $f\left(\frac{c}{x-c}\right) \le 2$.

6. В коробке у Оли лежит 31 новогодний шар, которыми Оля начинает украшать елку. Каждый шар она сначала в течение 12 секунд выбирает в коробке, а затем в течение 20 секунд вешает на елку. Её младший брат Коля и младшая сестра Поля незаметно снимают шары с елки и прячут среди своих игрушек. Дождавшись момента, когда Оля начинает искать в коробке очередной шар, либо Коля, либо Поля (но не оба) могут снять с елки один шар (на это каждому из них требуется ровно 12 секунд). После этого на то, чтобы спрятать украденный шар, у Коли уходит одна минута 18 секунд, после чего он готов украсть с елки следующий шар, а Поля прячет шар за две минуты 18 секунд. Какое наименьшее число шаров может висеть на елке в тот момент, когда Оля повесит свой последний шар?

7. Три искусственных спутника одновременно начинают двигаться в одной плоскости по трем концентрическим окружностям с общим центром O и радиусами $R_1 = 10000$ км для первого, $R_2 = 20000$ км для второго и $R_3 = 60000$ км для третьего спутника. В начальный момент времени спутники находятся на одном луче с вершиной в точке O. Все спутники двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями, причем скорость первого спутника в два раза больше скорости второго, но в три раза меньше скорости третьего. Спутники продолжают свое движение до тех пор, пока не закончит свой полный круг последний из них (тот, кто потратит на облёт своего круга больше всего времени). Сколько раз за это время они окажутся на одной прямой, не проходящей через центр O?

8. В пирамиде $PABC$ $AB = BC, PB = PQ$, где Q - середина отрезка AC, а тангенс угла между плоскостями PAB и ABC относится к тангенсу угла между плоскостями PBC и ABC как $4 : 1$. Плоскость π параллельна BC, делит ребро PA пополам и проходит через основание O высоты PO пирамиды $PABC$. Найти отношение объемов многогранников, на которые делит эта плоскость пирамиду $PABC$.