

# Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2011 год

1 вариант

1. Два поезда, содержащие по 15 одинаковых вагонов каждый, двигались навстречу друг другу с постоянными скоростями. Ровно через 28 с после встречи их первых вагонов пассажир Саша, сидя в купе третьего вагона, поравнялся с пассажиром встречного поезда Валерой, а еще через 32 с последние вагоны этих поездов полностью разъехались. В каком по счету вагоне ехал Валера?

2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + 2x \geq 0 \\ -1 - x^2 \leq y \leq 2 + \sqrt{x}. \end{cases}$$

3. Из шара какого наименьшего радиуса можно вырезать правильную четырехугольную пирамиду с ребром основания 14 и апофемой 12?

4. Решите неравенство

$$\log_5(5x^2 + 2x) \cdot \log_5\left(5 + \frac{2}{x}\right) > \log_5 5x^2.$$

5. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке  $K$ . Хорда  $AB$  большей окружности касается меньшей окружности в точке  $L$ , причем  $AL = 10$ . Найдите  $BL$ , если  $AK : BK = 2 : 5$ .

6. При каких значениях  $a, b$  и  $c$  множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + bx = c$$

состоит в точности из чисел  $-1$  и  $1$ ?

7. Какое наименьшее (одинаковое) число карандашей нужно положить в каждую из 6 коробок так, чтобы в любых 4 коробках нашлись карандаши любого из 26 заранее заданных цветов (карандашей имеется достаточное количество)?

8. Функция  $y = f(t)$  такова, что сумма корней уравнения

$$f(\sin x) = 0$$

на отрезке  $[3\pi/2, 2\pi]$  равна  $33\pi$ , а сумма корней уравнения

$$f(\cos x) = 0$$

на отрезке  $[\pi, 3\pi/2]$  равна  $23\pi$ . Какова сумма корней второго уравнения на отрезке  $[\pi/2, \pi]$ ?

# Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2011 год

2 вариант

1. Два поезда, содержащие по 16 одинаковых вагонов каждый, двигались навстречу друг другу с постоянными скоростями. Ровно через 24 с после встречи их первых вагонов пассажир Миша, сидя в купе второго вагона, поравнялся с пассажиром встречного поезда Игорем, а еще через 40 с последние вагоны этих поездов полностью разъехались. В каком по счету вагоне ехал Игорь?

2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 2 \leq y \leq 2 - x^2. \end{cases}$$

3. Из шара какого наименьшего радиуса можно вырезать правильную четырехугольную пирамиду с ребром основания 16 и боковым ребром 15?

4. Решите неравенство

$$\log_3 3x^2 < \log_3 \left( 3 + \frac{4}{x} \right) \cdot \log_3 (3x^2 + 4x).$$

5. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке  $K$ . Хорда  $AB$  большей окружности касается меньшей окружности в точке  $L$ , делящей хорду в отношении  $AL : BL = 2 : 3$ . Найдите  $AK$ , если  $BK = 12$ .

6. При каких значениях  $a, b$  и  $c$  множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + b = cx$$

состоит в точности из чисел  $-1$  и  $1$ ?

7. Какое наименьшее (одинаковое) число карандашей нужно положить в каждую из 8 коробок так, чтобы в любых 5 коробках нашлись карандаши любого из 24 заранее заданных цветов (карандашей имеется достаточное количество)?

8. Функция  $y = f(t)$  такова, что сумма корней уравнения

$$f(\cos x) = 0$$

на отрезке  $[\pi/2, \pi]$  равна  $17\pi$ , а сумма корней уравнения

$$f(\sin x) = 0$$

на отрезке  $[\pi, 3\pi/2]$  равна  $29\pi$ . Какова сумма корней второго уравнения на отрезке  $[3\pi/2, 2\pi]$ ?

# Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

11 класс, 2011 год

3 вариант

1. Два поезда, содержащие по 20 одинаковых вагонов каждый, двигались навстречу друг другу с постоянными скоростями. Ровно через 36 с после встречи их первых вагонов пассажир Вова, сидя в купе четвертого вагона, поравнялся с пассажиром встречного поезда Олегом, а еще через 44 с последние вагоны этих поездов полностью разъехались. В каком по счету вагоне ехал Олег?

2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + 3x \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq y \leq 2 - \sqrt{x}. \end{cases}$$

3. Из шара какого наименьшего радиуса можно вырезать правильную четырехугольную пирамиду с ребром основания 11 и апофемой 14?

4. Решите неравенство

$$\log_7 \left( 7 + \frac{1}{x} \right) \cdot \log_7 (7x^2 + x) > \log_7 7x^2.$$

5. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке  $K$ . Хорда  $AB$  большей окружности касается меньшей окружности в точке  $L$ , причем  $AL : AK = 3 : 5$ . Найдите  $BL$ , если  $BK = 15$ .

6. При каких значениях  $a, b$  и  $c$  множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax + b = cx^2$$

состоит в точности из чисел  $-1$  и  $1$ ?

7. Какое наименьшее (одинаковое) число карандашей нужно положить в каждую из 10 коробок так, чтобы в любых 6 коробках нашлись карандаши любого из 22 заранее заданных цветов (карандашей имеется достаточное количество)?

8. Функция  $y = f(t)$  такова, что сумма корней уравнения

$$f(\cos x) = 0$$

на отрезке  $[\pi/2, \pi]$  равна  $13\pi$ , а сумма корней уравнения

$$f(\sin x) = 0$$

на отрезке  $[3\pi/2, 2\pi]$  равна  $27\pi$ . Какова сумма корней первого уравнения на отрезке  $[\pi, 3\pi/2]$ ?