Решение задач заочного тура ОММО-2017

Сайт олимпиады: **http://olympiads.mccme.ru/ommo/17/**

Период регистрации и время на решение задач заочного тура: 25.12.16 – 28.01.17.

Сайт для регистрации: **http://reg.olimpiada.ru/login/**

Единая дата очного тура: 05.02.17, 10:00 по московскому времени во всех площадках.

Олимпиада в федеральном перечне олимпиад школьников Министерства образования и науки имеет II уровень. Это означает, что задачи этой олимпиады легче, чем задачи олимпиад первого уровня. Но диплом этой олимпиады ценится выше, чем диплом олимпиады третьего уровня. Поэтому ОММО занимает золотую середину.

Для получения диплома III степени в 2016 году достаточно было решить 4 задачи из 10. Задачи очного тура более чем решаемые.

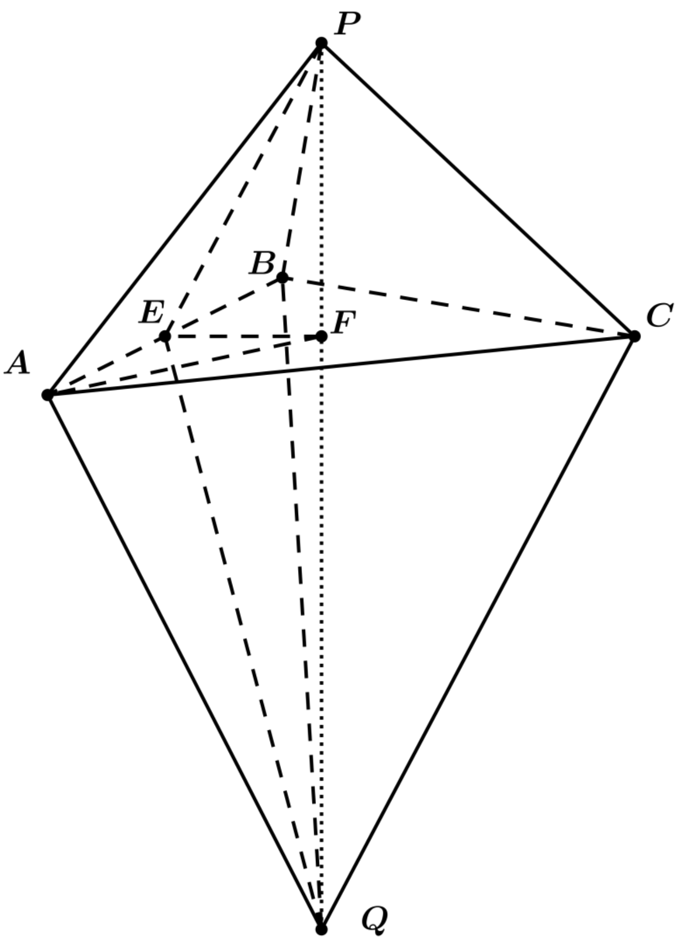
ОММО входит в перечень мероприятий, участвующих в программе «Гранты Президента». Это означает, что обладатели её дипломов после автоматического зачисления в вуз могут принять участие в конкурсе на грант. Размер гранта – 20 тысяч рублей в месяц на протяжении всего первого курса.

Условия задач едины для всех участников. Приведенные ответы достоверны, поскольку указавшие их участники олимпиады получили приглашение на заключительный тур.

Задача 6. Пусть ABC – равносторонний треугольник, $AB = 600$. Точки P и Q, лежащие вне плоскости (ABC), таковы, что $PA = PB = PC$, $QA = QB = QC$, а двугранный угол между плоскостями (PAB) и (QAB) равен 120°. Оказалось, что точки A, B, C, P, Q лежат на одной сфере. Найдите радиус этой сферы. Если необходимо, округлите ответ с точностью до 0,01.

Решение.

Ситуация выглядит так. Точки P и Q действительно расположены в разных полупространствах относительно (ABC). Иначе эти точки не могли бы быть частью одной сферы.



PQ пересекает центр треугольника ABC и перпендикулярен плоскости ABC. Это следует из условия равенства расстояний от P до вершин треугольника и от Q до тех же вершин. При этом PA и QA совершенно не обязаны быть равными.

Дальше нам понадобятся длины отрезков AF и EA.

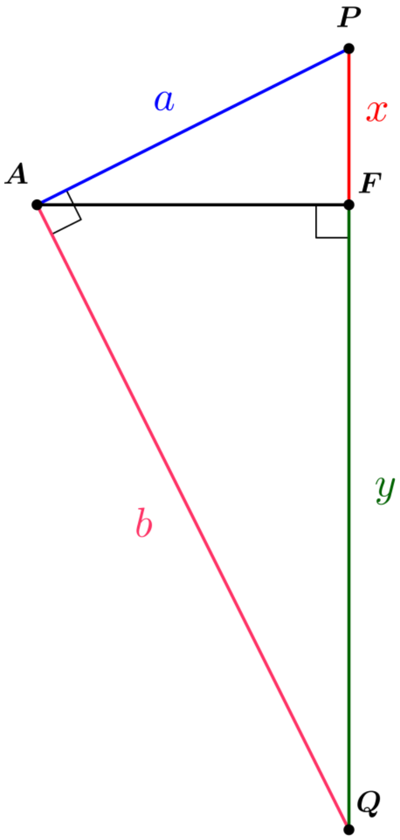
По свойствам равностороннего треугольника:

$$AF = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 200\sqrt{3}.$$

$$EA = \frac{a}{2} = 300.$$

Отметим, что угол PAQ прямоугольный, PQ – диаметр. Угол PEQ равен 120°.

Введем обозначения: $PA = a$, $PF = x$, $QA = b$, $QF = y$. Искомый радиус R.



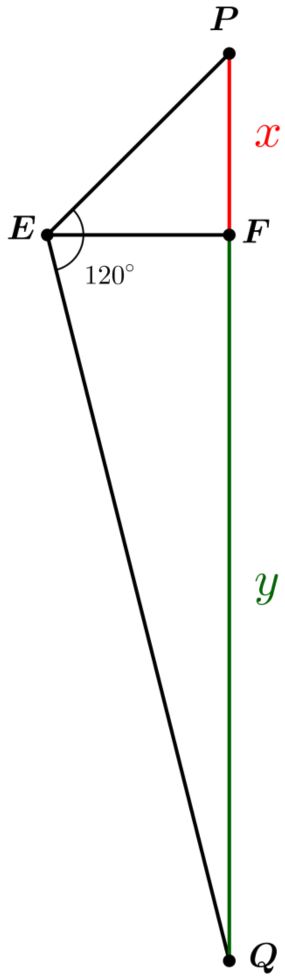
Из прямоугольного треугольника PAQ:

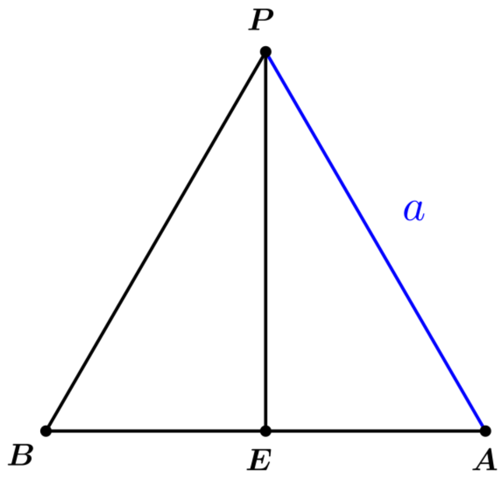
$$a^2 - (AF)^2 = x^2,$$

$$b^2 - (AF)^2 = y^2,$$

$$x + y = 2R,$$

$$a^2 + b^2 = 4R^2.$$





Теперь подберемся к треугольнику PEQ. Из прямоугольных треугольников PEA и QEA:

$$PE = \sqrt{a^2 - (EA)^2}, \qquad QE = \sqrt{b^2 - (EA)^2}.$$

Теперь применим теорему косинусов для треугольника PEQ:

$$4R^2 = a^2 - (EA)^2 + b^2 - (EA)^2 - 2 \cdot \sqrt{a^2 - (EA)^2} \cdot \sqrt{a^2 - (EA)^2} \cdot \cos 120°.$$

Подставим числовые данные и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 - 3\cdot 200^2 = x^2, \\ b^2 - 3\cdot 200^2 = y^2, \\ a^2 + b^2 = 4R^2, \\ x + y = 2R, \\ a^2 + b^2 - 2\cdot 300^2 + \sqrt{a^2b^2 - 300^2(a^2+b^2) + 300^4} = 4R^2. \end{cases}$$

Худшее, как всегда, впереди. Давайте сложим первые два уравнения, затем четвертое возведем в квадрат и приравняем к третьему:

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2 + 6\cdot 200^2,$$

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2 + 2xy.$$

Откуда

$$2xy = 6\cdot 200^2, \qquad x = \frac{3\cdot 200^2}{y}.$$

Выразим теперь a^2 и b^2:

$$b^2 = y^2 + 3\cdot 200^2,$$

$$a^2 = \frac{9\cdot 200^4}{y^2} + 3\cdot 200^2.$$

Теперь правую часть пятого уравнения системы заменим левой частью третьего уравнения:

$$a^2 + b^2 - 2\cdot 300^2 + \sqrt{a^2b^2 - 300^2(a^2+b^2) + 300^4} = a^2 + b^2,$$

$$a^2b^2 - 300^2(a^2+b^2) + 300^4 = 4\cdot 300^4,$$

$$a^2b^2 - 300^2(a^2+b^2) - 3\cdot 300^4 = 0.$$

Пусть $y^2 = t > 0$. Подставляем

$$\left(\frac{9\cdot 200^4}{t} + 3\cdot 200^2\right)(t + 3\cdot 200^2) -$$

$$-300^2\left(\frac{9\cdot 200^4}{t} + 3\cdot 200^2 + t + 3\cdot 200^2\right) - 3\cdot 300^4 = 0.$$

$$\left(\frac{9\cdot 200^4}{t} + 3\cdot 200^2\right)(t + 3\cdot 200^2) = 9\cdot 200^4 + \frac{27\cdot 200^6}{t} + 3\cdot 200^2 t +$$

$$+9\cdot 200^4 = 3\cdot 200^2 t + 18\cdot 200^4 + \frac{27\cdot 200^6}{t}.$$

Умножим обе части на t.

$$3 \cdot 200^2 t^2 + 18 \cdot 200^4 t + 27 \cdot 200^6 - 300^2(t^2 + 6 \cdot 200^2 t + 9 \cdot 200^4) - 3 \cdot 300^4 t = 0.$$

$$3 \cdot 100^2 t^2 - 171 \cdot 100^4 t + 432 \cdot 100^6 = 0.$$

$$t^2 - 57 \cdot 100^2 t + 144 \cdot 100^4 = 0.$$

$$D = 100^4 \cdot (57^2 - 24^2) = 33 \cdot 300^4.$$

$$t_1 = \frac{57 \cdot 100^2 - 300^2\sqrt{33}}{2}.$$

К сожалению, это число больше нуля:

$$57 > 9\sqrt{33}, \qquad 3249 > 2673.$$

$$t_2 = \frac{57 \cdot 100^2 + 300^2\sqrt{33}}{2}.$$

Итак, получаем два положительных значения для переменной y.

$$y_1 = \sqrt{\frac{57 \cdot 100^2 - 300^2\sqrt{33}}{2}} = 50\sqrt{114 - 18\sqrt{33}} = 50\left(9 - \sqrt{33}\right).$$

$$y_2 = 50\left(9 + \sqrt{33}\right).$$

Два результата естественно говорят о том, что конфигурации наших точек может быть две – когда точка P дальше от плоскости ABC, чем точка Q и наоборот. Поэтому значения x можно даже не вычислять, мы получим

$$y_1 = x_2 = x(y_2), \qquad y_2 = x_1 = x(y_1).$$

Давайте вычислим и убедимся.

$$x_1 = \frac{3 \cdot 200^2}{50\left(9 - \sqrt{33}\right)} = \frac{3 \cdot 200^2}{50 \cdot 48} \cdot \left(9 + \sqrt{33}\right) = 50\left(9 + \sqrt{33}\right).$$

$$x_2 = 50\left(9 - \sqrt{33}\right).$$

Осталось перечитать условие задачи и вспомнить о том, что нас просили найти радиус сферы.

$$R = \frac{x + y}{2} = \frac{50 \cdot 9 \cdot 2}{2} = 450.$$

Ответ: 450.

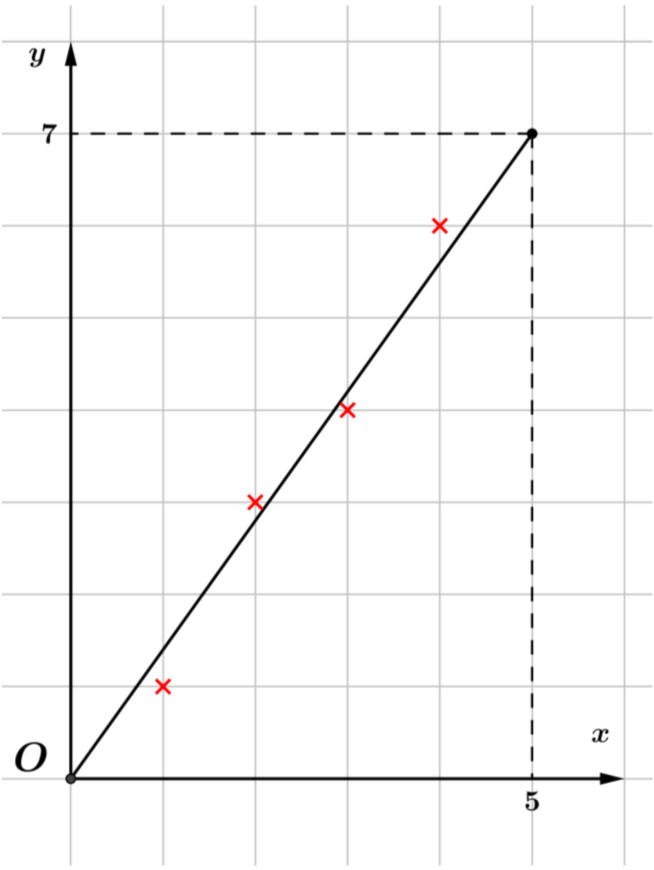
Задача 5. Дана координатная плоскость Oxy. Для каждой точки, обе координаты которых целые, нарисовали окружность радиуса $\frac{1}{7}$ с центром в этой точке. Сколько таких окружностей пересекает отрезок AB, если $A = (0, 0)$, $B = (50, 70)$?

Решение.

Давайте рассмотрим прямоугольный участок плоскости со следующими координатами вершин: (0, 0), (5, 0), (5, 7), (0, 7).

Отберем несколько подозрительных точек с целочисленными координатами, которые достаточно близко расположены к отрезку AB на этом участке.

Проверим эти точки (кроме точки A), найдем их число, а затем полученное количество умножим на 50/5 = 10, ведь благодаря линейной зависимости $y = \frac{7}{5}x$, задающей наш отрезок, количество искомых пересечений окружностей с целочисленными центрами и нашего отрезка будет одинаковым на участках шириной 5.



Осталось посчитать дискриминанты четырех квадратных уравнений. Причем не вычислять, а просто узнать знак.

$$(x-1)^2 + \left(\frac{7}{5}x - 1\right)^2 = \frac{1}{49},$$

$$(x-2)^2 + \left(\frac{7}{5}x - 3\right)^2 = \frac{1}{49},$$

$$(x-3)^2 + \left(\frac{7}{5}x - 4\right)^2 = \frac{1}{49},$$

$$(x-4)^2 + \left(\frac{7}{5}x - 6\right)^2 = \frac{1}{49}.$$

$$\frac{74}{25}x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{97}{49} = 0,$$

$$D = \frac{24^2}{25} - \frac{4 \cdot 74 \cdot 97}{25 \cdot 49} =$$

$$= \frac{28224 - 28712}{25 \cdot 49} < 0.$$

$$\frac{74}{25}x^2 - \frac{62}{5}x + \frac{636}{49} = 0, \qquad D = \frac{188356 - 188256}{25 \cdot 49} > 0.$$

$$\frac{74}{25}x^2 - \frac{86}{5}x + \frac{1224}{49} = 0, \qquad D = \frac{362404 - 362304}{25 \cdot 49} > 0.$$
$$\frac{74}{25}x^2 - \frac{124}{5}x + \frac{2547}{49} = 0, \qquad D = \frac{753424 - 753912}{25 \cdot 49} < 0.$$

Итак, на рисунке не считая точки (0, 0) имеется ровно 3 такие точки: (2, 3), (3, 4), (5, 7).

Тогда всего таких точек, с центрами в которых окружности радиуса 1/7, пересекающих отрезок AB, будет ровно 1 + 3 · 50/10 = 31.

Ответ: 31.

Задача 4. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равняется положительному числу S, её второй член равен 1. Какое наименьшее значение может принимать S? Если необходимо, округлите ответ с точностью до 0,01.

Решение.

Если сумма бесконечной геометрической прогрессии равняется числу, то эта прогрессия убывающая. Значит, можем записать:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \qquad b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{1}{q}, \qquad S = \frac{1}{q-q^2}.$$

Теперь задача сводится к тому, чтобы найти минимум выражения

$$S = \frac{1}{q-q^2}.$$

Поскольку S – положительное число, то мы можем переиначить задание. Найдем максимум выражения

$$y = q - q^2.$$

Берем производную и приравниваем к нулю.

$$y' = 1 - 2q, \qquad 1 - 2q = 0, \qquad q = 0{,}5.$$

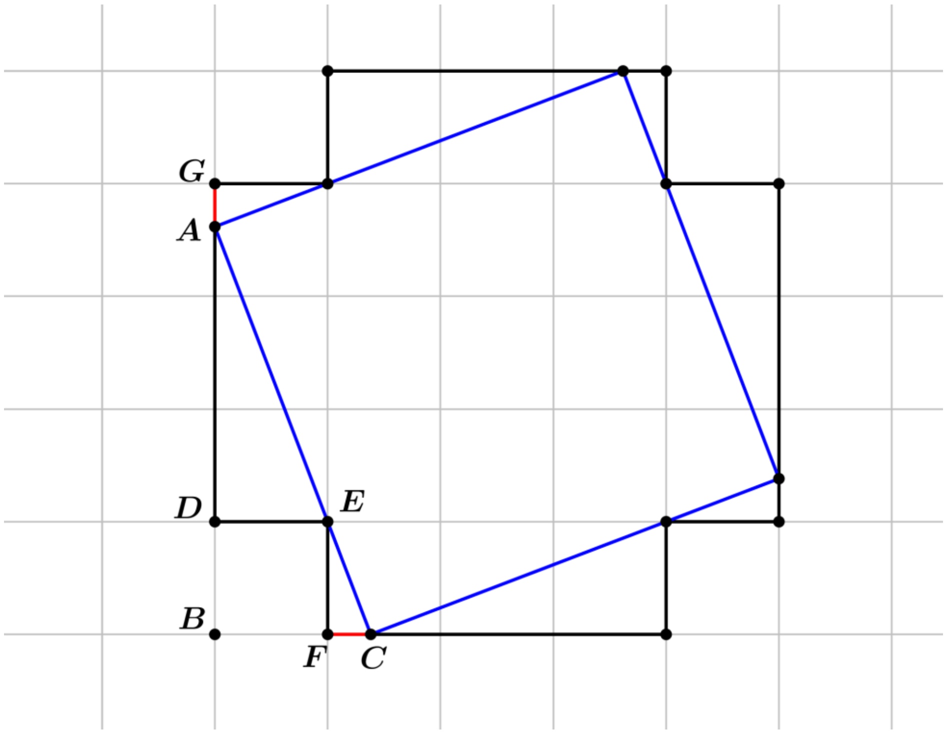
Переходя через единственный ноль, производная меняет знак с плюса на минус, значит найденная точка – точка максимума, что нам и нужно.

$$S_{min} = \frac{1}{y_{max}} = \frac{1}{0{,}5 - 0{,}25} = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 3. Из всех углов квадрата со стороной 5 вырезали по квадратику со стороной 1. Найдите площадь наибольшего квадрата, который можно вырезать из оставшейся фигуры. Если необходимо, округлите ответ с точностью до 0,01.

Решение.



Из соображений симметрии, вписанный квадрат наибольшей площади качественно выглядит именно так.

Обозначим

$$GA = FC = x.$$

С одной стороны,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2}(4 - x)(1 + x).$$

С другой стороны,

$$S_{ABC} = S_{ADE} + S_{BDEF} + S_{EFC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 - x) + 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x.$$

Получаем уравнение:

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \qquad x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Вершина вписанного квадрата делит сторону исходного на два отрезка. Поэтому и корня тоже два. Нас интересует меньший, потому что меньший отрезок мы обозначили через x.

Остается найти квадрат длины AC, это число и будет искомой площадью.

$$\left(4-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)^2}{4}+\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)^2}{4}=15.$$

Ответ: 15.

Задача 2. Из набора {1, 2, 3, ..., 10} наугад выбираются два различных числа. Найдите вероятность того, что их произведение чётно. Если необходимо, округлите ответ с точностью до 0,01.

Решение.

Произведение чисел может быть либо чётным, либо нечётным. Поэтому можно найти вероятность нечётного произведения, а потом из единицы вычесть эту вероятность.

Произведение двух различных чисел из указанного набора будет нечётным в том случае, если оба выбранных числа будут нечётными. Из 10 указанных чисел только 5 – нечётные.

Вероятность выбрать наугад в первый раз нечётное число равна 5/10, а во второй – уже 4/9, ведь мы уже выбрали одно нечётное число.

Окончательно,

$$1 - \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{70}{90} \approx 0{,}78.$$

Ответ: 0,78.

Задача 1. Карл решил расставить вдоль периметра своего прямоугольного сада 20 клумб. Четыре клумбы он поставил в углах сада, а остальные расставил по периметру так, что расстояние между соседними клумбами равняется 4 м. Оказалось, что на длинной стороне сада стоит вдвое больше клумб, чем на короткой. (Считается, что клумба, стоящая в углу, стоит на обеих сторонах.) Чему равняется площадь сада в квадратных метрах?

Решение.

Пусть a – количество не угловых клумб, расположенных вдоль длинной стороны сада, b – количество не угловых клумб, расположенных вдоль короткой стороны.

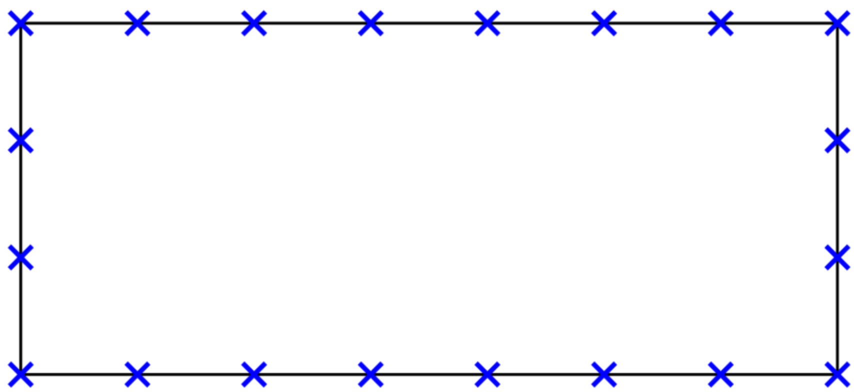
Тогда всего клумб вдоль длинной стороны будет $a + 2$, а вдоль короткой – $b + 2$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + 2 = 2(b + 2), \\ 4 + 2a + 2b = 20; \end{cases} \quad a = 6, \qquad b = 2.$$

Промежутков длиной 4 м между n клумбами ровно $n - 1$. Поэтому площадь сада найдется так:

$$S = 4(a + 2 - 1) \cdot 4(b + 2 - 1) = 336.$$

Карлов сад выглядит так:



Ответ: 336.