Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс
Сборник задач заочного этапа

1. Спустя 3 года после рождения первого ребенка в семье Смирновых родились двойняшки. В этот момент папе было 40 лет, а маме на три года меньше. Сколько лет двойняшкам, если общий возраст семьи Смирновых 31 декабря 2010 года составил 200 лет? Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 24.

2. Сколько решений имеет уравнение

$$\text{НОК}(3x, 2x) = \text{НОД}(2010, 510)?$$

Целый ответ записать в предложенное поле
Ответ: 4.

3. На сторонах ромба $ABCD$ с острым углом 60° построены правильные треугольники, центры O_1, O_2, O_3, O_4 которых лежат вне ромба. Найти площадь ромба, если площадь четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ равна 100. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 75.

4. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\text{НОК}(2x+3,\ 8x-x^2-12)$, если под знаком НОК находятся натуральные числа. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 44.

5. В семье три ребенка. Старший, Костя, ест конфет больше, чем его брат Даня, который меньше 6 конфет никогда не ест. Их младшая сестра Саша съедает конфет всегда больше, чем оба брата вместе. В новогоднюю нось дети нашли под елкой 27 конфет. Сколько конфет съела Саша, если ни одной конфеты не осталось? Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 14.

6. Найти наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{(|x|-2)(|x+2|-3)}{x-1} \le 0.$$

Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 2.

7. Сколько имеется плоскостей, равноудаленных от четырех точек, не лежащих в одной плоскости? Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 7.

8. Параллелограмм со сторонами 2 и 6 сначала вращается вокруг стороны длины 2, а потом вокруг стороны длины 6. Найти отношение объемов тел вращения (большего к меньшему). Ответ ввести в предложенное поле.

Ответ: 3.

9. Объем правильной треугольной пирамиды с боковым ребром длины 1 равен $\frac{1}{6}$. Найти (в градусах) плоский угол при вершине. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 90.

10. В классе 24 человека, все они учатся без двоек. Отличников в классе в два раза больше, чем троечников, а число отличников относится к числу хорошистов как 2:3. На сколько троечников меньше, чем хорошистов? Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 8.

11. В банку собраны 84 мухи. Число мух с зелеными глазами относится к числу мух с серыми глазами как 8:9. Количество мух с желтыми глазами относится к числу мух с серыми, как 25:9. Мух с иным цветом глаз в банке нет. На сколько мух с желтыми глазами больше, чем с зелеными? Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 34.

12. Найти наименьшее число x на отрезке $[0;\pi]$, для которого $\sin x$, $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}$, $\cos x$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Ответ в радианах округлить до трех значащих цифр по правилам округления и записать в предложенное поле.
Ответ: 0,262.

13. Найти наибольшее число x на отрезке $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$, для которого $\cos 2x$, $\frac{\cos x}{\sqrt{2}}$, $\sin 2x$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Ответ в радианах округлить до трех значащих цифр по правилам округления и записать в предложенное поле.
Ответ: 4,451.

14. На катетах прямоугольного треугольника ABC построены квадраты. Найти квадрат расстояния между центрами этих квадратов, если сумма длин катетов равна 3,5. Ответ округлить до трех значащих цифр по правилам округления и записать в предложенное поле.
Ответ: 6,125.

15. Сколько натуральных решений имеет уравнение НОД$(26;x) = 2$ на отрезке $[1;100]$? Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 47.

16. Найти наименьшее целое положительное число, которое при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 имеет остатки 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 59.

17. В какой системе исчисления число 16324 есть точный квадрат числа 125? В поле ответа введите основание этой системы.
Ответ: 7.

18. В книге некоторое число страниц. Для нумерации всех страниц наборщик использовал 1890 цифр, начиная с 1. Сколько страниц в книге? Число страниц в книге введите в

предложенное поле.
Ответ: 666.

19. Найти обыкновенную несократимую дробь, равную сумме всех дробей вида $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ для натуральных чисел $n \in [1; 101]$. Знаменатель этой дроби ввести в указанное поле.
Ответ: 102.

20. Найти наибольшее целое x, для которого $4^{18} + 4^{507} + 4^{x-5}$ является квадратом целого числа.
Ответ: 1000.

21. Через $S(a)$ обозначим наименьшую площадь прямоугольника на плоскости со сторонами параллельными координатным осям, содержащего точки, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенствам $x^2 + 2x + y + 1 - 2a \leq 0$ и $x^2 - 2x - y + 1 - 4a^2 \leq 0$. Найти наименьшее значение $S(a)$ на отрезке $[2; 3]$.
Ответ: 120.

22. Найти x, для которого дробь

$$\frac{\frac{x}{2+\frac{x}{2+\frac{x}{2+\dots}}}}{2+\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}},$$

в записи которой участвуют k двоек, равна y.
Ответ: $y^2 + 2y$.

23. Какое наименьше число выстрелов надо произвести в игре «морской бой» на поле 9×9 клеток, чтобы наверняка ранить большой четырехклеточный корабль?
Ответ: 20.

24. На сторонах равноберденного прямоугольного треугольника ABC, $\angle C = 90°$, построены квадраты так, что сторона квадрата совпадает со стороной треугольника, а центры O_1, O_2, O_3 квадратов лежат вне треугольника. Найти площадь треугольника $O_1O_2O_3$, если катет AC равен 7. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 49.

25. Положительные числа x и y удовлетворяют уравнению: $\cos\frac{\pi(x+y)}{6} = \frac{1}{2}$. Какое наименьшее значение может принимать величина $4(y + x^2)$? Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 7.

26. Внутри квадрата со стороной $a = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{\pi}}$ расположены два круга так, что расстояние между их центрами не меньше суммы радиусов. Какое наибольшее значение может принимать сумма площадей кругов? Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 24.

27. Целочисленные координаты $(x; y)$ вершин треугольника, расположенного в первой четверти, удовлетвояют уравнению: $2x^2 - xy + x - y + 50 = 0$. Найти площадь треугольника. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 224.

28. Числа p и $8p^2+1$ - простые. Найти p. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 3.

29. Числа p, $p+10$ и $p+14$ - простые. Найти p. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 3.

30. Число 17 - простое. Сколько существует натуральных чисел, взаимно простых с числом 17^3 и меньших, чем 17^3? Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 4624.

31. Решить уравнение $x^3-[x]=3$, где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x. Ответ округлить до 3 значащих цифр и ввести в предложенное поле.
Ответ: 1,587.

32. В трапеции сумма углов при основании равна $90°$, а разность длин оснований равна 10. Найти длину отрезка, соединяющего середины оснований. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 5.

33. Прямоугольный лист бумаги размерами 60×450 см разрезают по прямой на две части так, что одна из них - квадрат. С оставшейся неквадратной частью поступают точно так же: отрезают квадрат и т. д. Какую часть площади листа составляет площадь последнего отрезанного квадрата? Ответ округлить до 3 значащих цифр и ввести в предложенное поле.
Ответ: 0,033.

34. Прямоугольный лист бумаги размерами 78×396 см разрезают по прямой на две части так, что одна из них - квадрат. С оставшейся неквадратной частью поступают точно так же: отрезают квадрат и т. д. Сколько разрезов надо совершить, чтобы все отрезанные части были квадратами? Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 17.

35. В плане гора имеет форму прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами длины 3 и гипотенузой AB в основании. В начальный момент колесо радиуса 1 находится вне горы и касается прямой AB в точке $P: \; PA=2$. Колесо катится от точки P сначала по прямой AB, затем забирается на горку и спускается с нее, потом опять катится по прямой AB до точки $Q: \; BQ=1$. Какой путь проходит при этом центр колеса? Ответ округлить до 3 значащих цифр и ввести в предложенное поле.
Ответ: 8,914.

36. В плане яма имеет форму прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами длины 5 и гипотенузой AB. В начальный момент колесо радиуса 2 находится вне ямы и касается прямой AB в точке $P: \; PA=3$. Колесо катится от точки P сначала по прямой AB, затем опускается в яму и поднимается из нее, потом опять катится по прямой AB до точки $Q: \; BQ=4$. Какой путь проходит при этом центр колеса? Ответ округлить до 3 значащих цифр и ввести в предложенное поле.
Ответ: 16,142.

37. На сторонах AD и BC квадрата $ABCD$ со стороной 5 расположены соответственно точки M и N так, что $AM = 2$, $BN = 3$. Точки P и Q расположены на сторонах AB и CD так, что $MP = PN$ и $NQ = QM$. Найти площадь четырехугольника $MPNQ$. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 13.

38. На сторонах AD и BC квадрата $ABCD$ со стороной 8 расположены соответственно точки M и N так, что $AM = 5$, $BN = 3$. Точки P и Q расположены на сторонах AB и CD так, что $MP = PN$ и $NQ = QM$. Найти площадь четырехугольника $MPNQ$. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 34.

39. Найдите наибольшее на отрезке $[0; 10\pi]$ решение уравнения

$$|2\sin x - 1| + |2\cos 2x - 1| = 0.$$

Ответ округлить до 3 значащих цифр и ввести в предложенное поле.
Ответ: 27,751.

40. Найти длину ломанной на плоскости, координаты точек $(x; y)$ которой удовлетворяют условию:

$$\begin{cases} |2y - |x|| - x = 2 \\ -2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ответ округлить до 3 значащих цифр и ввести в предложенное поле.
Ответ: 7,243.

41. Сумма двух натуральных чисел равна 2013. Если у одного из них зачеркнуть две последние цифры, прибавить к полученному числу единицу, а затем умножить результат на пять, то получится другое число. Найти эти числа. Наибольшее из них ввести в предложенное поле.
Ответ: 1913.

42. Сумма двух натуральных чисел равна 2014. Если у одного из них зачеркнуть две последние цифры, умножить полученный результат на три, то получится число на шесть большее другого числа. Найти эти числа. Наименьшее из них ввести в предложенное поле.
Ответ: 51.

43. Найти дробь $\frac{p}{q}$ с наименьшим возможным натуральным знаменателем, для которой $\frac{1}{2014} < \frac{p}{q} < \frac{1}{2013}$. Знаменатель этой дроби введите в предложенное поле.
Ответ: 4027.

44. Сколько существует пар натуральных чисел $(a; b)$, для которых число $5a - 3$ кратно b, а число $5b - 1$ кратно a? Количество пар указанных чисел ввести в предложенное поле.
Ответ: 17.

45. Петя находится в точке A прямолинейного участка реки и хочет попасть в деревню B, находящуюся на расстоянии 4 км от A (шириной реки можно пренебречь). Прямая AB составляет с береговой линией угол 60°. Петя может плыть по реке до точки C, а затем

идти пешком из C в B, причем скорость движения по суше в $\sqrt{13}$ раза меньше, чем по воде. На каком расстоянии от A должна находиться точка C, чтобы время, затраченное на путь из A в B, было минимальным? Расстояние AC в километрах ввести в предложенное поле.
Ответ: 1.

46. Окружность радиуса 20 нарисована на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 так, что она не касается сторон клеток и не проходит через их вершины. Какое минимальное количество клеток может пересечь такая окружность?
Ответ: 159.

47. Найти углы (в градусах) правильного $n-$угольника, $n > 5$, для которого разность между длинами большей и меньшей диагоналей равна длине его стороны.
Ответ: 140.

48. Натуральные числа x и y связаны соотношением $x^3 - y^3 = 2xy + 40$. Найти $x + y$.
Ответ: 6.

49. Для любых положительных чисел x и y определено два числа $a = y + \frac{1}{x}$ и $b = \frac{1}{y}$. Число c равно минимальному из чисел x, a, b. Какое наибольшее значение может принимать число c^2?
Ответ: 2.

50. Числа a и b таковы, что неравенство $a\cos x + b\cos 3x \leq 0$ выполняется при любых x. Найти наибольшее число b, при котором это возможно.
Ответ: 0.

51. При каких значениях a уравнение $x^2 + 6x + 5^{x-1} + 5^{3-x} = 1 + 2a(x+3) - a^2$ имеет решение? Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 5.

52. Кусок сыра имел форму куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 30 см. Мыши съели весь сыр, лежащий ниже плоскости, проходящей через вершину C_1 и точки M, N, лежащие на ребрах AB и AD, делящие их в отношении 2:1 и 1:1, считая от вершины A. Сколько сыра съели мыши, если его плотность 0,8 г/см^3? Ответ в граммах ввести в предложенное поле.
Ответ: 6960.

53. При каких значениях p и q область значений функции $y = 4\sqrt{x-p} + 3\sqrt{q-x}$ совпадает с ее областью определения? Произведение $p \cdot q$ записать в предложенное поле.
Ответ: 60.

54. Координаты $(x; y; z)$ точки M являются последовательными членами геометрической прогрессии, а числа xy, yz, xz в указанном порядке являются членами арифметической прогрессии, при этом $z \geq 1$ и $x \neq y \neq z$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение квадрата расстояния от точки M до точки $N(1; 1; 1)$. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 18.

55. Жители деревни Разумеево, удаленной от реки на 3 км, любят ходить в гости в деревню Вкуснотеево, расположенную на 3,25 км ниже по течению, на другом берегу реки, удаленную от берега на 1 км. Ширина реки 500 м, скорость течения 1 км/час, берега - параллельные прямые. Жители Разумеево проложили самый короткий маршрут с учетом того, что переплывают реку всегда в направлении перпендикулярном береговой линии с собственной скоростью 2 км/час. Сколько времени занимает этот путь, если по земле можно передвигаться со скоростью не большей 4 км/час? Ответ в часах ввести в предложенное поле.
Ответ: 1,5.

56. Найти последние две цифры числа $14^{14^{14}}$. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 36.

57. Найти число двоек в разложении на множители числа $2011 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot \ldots \cdot 4020$. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 2010.

58. При каких a уравнение $|x| = ax - 2$ не имеет решений? Длину промежутка значений параметра a введите в предложенное поле.
Ответ: 2.

59. При каких a уравнение $|x - 3| = ax - 1$ имеет два решения? Середину промежутка значений параметра a введите в предложенное поле. Ответ округлить до 3 значащих цифр и ввести в предложенное поле.
Ответ: 0,667.

60. При каких a уравнение $|x - 2| = ax - 2$ имеет бесконечное число решений? Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 1.

61. При каких a уравнение $|x - 1| = ax - 3$ не имеет решений? Середину промежутка значений параметра a введите в предложенное поле.
Ответ: 0.

62. Найти наибольшее значение функции $y = \sqrt{2} - |x|$ на множестве чисел x, удовлетворяющих неравенству: $(x - 1)^2(x + 2) \leq 0$. Ответ округлить до 3 значащих цифр и ввести в предложенное поле.
Ответ: 0,414.

63. Один из углов треугольника ABC, вписанного в круг радиуса $R = 1$, равен $\alpha = 30°$. Найти наибольшее при этих условиях значение площади треугольника. твет округлить до 3 значащих цифр и ввести в предложенное поле.
Ответ: 0,933.

64. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами 7 и $\sqrt{8}$ проведена медиана CM из вершины прямого угла. В треугольники AMC и BMC вписаны окружности, касающиеся CM в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ. Ответ округлить до 3 значащих цифр и ввести в предложенное поле.

Ответ: 2,086.

65. Определить целое число $m \neq 0$, для которого уравнение $x^4-(3m+2)x^2+m^2=0$ имеет четыре действительных корня, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 6.

66. Числа p, q и r таковы, что уравнение $x^4+4x^3-2x^2-12x+9=(px^2+qx+r)^2$ имеет не менее пяти различных решений. Найти абсолютное значение произведения pqr.
Ответ: 6.

67. Числа a_1, a_2, a_3 являются тремя последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии, сумма которых равна 126. Числа b_1, b_2, b_3 - три последовательных члена геометрической прогрессии. Суммы a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 равны 85, 76 и 84 соответственно. Найти знаменатель q геометрической прогрессии. В поле ответа введите число $2q$.
Ответ: 1.

68. Сколько существует троек целых положительных чисел $(x;y;z)$, для которых

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{\text{НОД}(x,y)}+\frac{1}{\text{НОД}(x,)}+\frac{1}{\text{НОД}(y,z)}+\frac{1}{\text{НОД}(x,y,z)}=5?$$

Количество троек указанных чисел ввести в предложенное поле.
Ответ: 9.

69. Найти наибольшее возможное произведение целых чисел, если они являются решениями системы

$$\begin{cases} x^2+2y=5 \\ x+4y^2=17. \end{cases}$$

Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 2.

70. Пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+2y^2=2xy+6y$, являются координатами вершин многоугольника на плоскости. Найти его площадь. Ответ ввести в предложенное поле.
Ответ: 18.

71. M - множество точек на плоскости с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими уравнению $\frac{\cos^3 y}{\cos x}+\frac{\sin^3 y}{\sin x}=1$. Найти максимальное значение выражения $16(\sin^2(x+y)+\sin^2 y)$ на множестве M.
Ответ: 24.

72. Петя построил из одинаковых кубиков конструкцию в форме прямоугольного параллелепипеда и покрасил краской три его грани, имеющие общую вершину. Затем он развалил кубики и посчитал количество кубиков, у которых хотя бы одна грань окрашена. Оказалось, что число таких кубиков равно числу неокрашенных кубиков. Какое наименьшее количество кубиков мог использовать Петя?
Ответ: 120.

73. Десятичная запись целого числа $P = \underbrace{aa...a}_{n}6\underbrace{bb...b}_{n}4$ использует цифры $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Известно, что $\sqrt{P}$ - целое число при любых $n \geq 1$. Найти $a + b$.
Ответ: 6.

74. Найти $\cos\alpha$, если последовательность $a_n = \cos(2^{n-1}\alpha)$, $n = 1, 2, ...$ содержит только отрицательные члены. Абсолютное значение $\cos\alpha$ запишите в предложенное поле.
Ответ: 0,5.

75. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 построены две окружности K_1 и K_2, расположенные в пространстве. Первая K_1 - в плоскости ACB_1, проходит через точки A, C, B_1. Вторая K_2 - вписана в квадрат основания $ABCD$. Докажите, что окружности не имеют общих точек. Найти наименьшее расстояние между точками окружностей. Ответ округлить до трех значащих цифр и ввести в предложенное поле.
Ответ: 0,318.

76. В правильном многоугольнике с количеством вершин 2014 отмечены красным цветом середины всех его сторон и середины всех его диагоналей. Какое максимальное количество красных точек может лежать на одной окружности?
Ответ: 2014.

77. Найти наибольшее значение выражения $x^2y^2z^2u$, если x, y, z и u положительные числа, для которых $2x + xy + z + yzu = 4$.
Ответ: 0,5.

78. Сколько решений имеет уравнение $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{97}{128}$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$?
Ответ: 2.