Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2019 год
1 комплект

1. Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 510 шагов и останавливаться, а также проходить по той же прямой 390 шагов назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 20 таких маневров. Задача робота – остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 692 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?

2. При каком значении a уравнение $|\sin(2x-y)|+|\cos(x+2y)|+1=\frac{2a}{a^2+1}$ имеет решения? НАйдите минимальное R, при котором любой круг радиуса R на плоскости содержит хотя бы одну точку с координатами $(x;y)$ - решениями уравнения.

3. Ученикам на входе в школу разрешалось брать из коробки любое количество карандашей. Позже выяснилось, что не менее 60% карандашей, полученных любой группой из десяти человек, оказывались у одного ученика из этой группы. Доказать, что в школе есть ученик, забравший более 58% карандашей, взятых всеми школьниками из коробки.

4. На боковых ребрах DA и DB правильной треугольной пирамиды $ABCD$ совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь боковой поверхности пирамиды $MNCD$ с вершиной в точке D составляет не более половины площади боковой поверхности пирамиды $ABCD$.

5. При каких b следующая система уравнений имеет решения при любых a?

$$\begin{cases} x-a)^2+(y-a+b)^2=2 \\ x-y+3)(x-y-1)=0 \end{cases}$$

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N так, что $AM=CN=\sqrt{3}$. Точка P – середина отрезка MN, точка Q – середина стороны AC. Угол при вершине B треугольника ABC равен $60°$. Найти длину отрезка PQ.

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2019 год
2 комплект

1. На проволоку в форме окружности радиуса 6 нанизаны 5 одинаковых бусинок, равноотстоящих друг от друга. В некоторый момент времени 4 бусинки начали двигаться со скоростью $\frac{\pi}{2}$ (1/сек) в направлении против часовой стрелки, а оставшаяся бусинка – с той же скоростью в обратном направлении. После столкновения любых двух бусинок величина скорости их движения сохраняется, а направление мгновенно меняется на противоположное. Сколько столкновений произойдет между бусинками за 48 секунд?

2. На плоскости расположено множество параллелаграммов, для которых:

1) Координаты (x,y) их вершин являются решениями системы:

$$\begin{cases} \sin x + y = \cos 2x - y \\ \sin x + 2y = \cos x - y \end{cases}$$

2) Координаты $(x;y)$ граничных точек являются решениями объединения

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + y = \cos 2x - y \\ \sin x + 2y = \cos x - y \end{array} \right.$$

Найти наименьшее возможное значение площади таких параллелограммов.

3. Известно, что дробь $\frac{m(n+69m)}{n(m+69n)}$ сократимая для некоторых взаимно простых целых чисел m и n. Найти наибольшее простое число d, на которое делится числитель и знаменатель дроби.

4. На сторонах BA и BC треугольника ABC совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь треугольника BMN окажется не больше половины площади треугольника ABC.

5. При каких значениях параметра a следующая система уравнений имеет единственное решение?

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 25)(4x + 3y - 25) = 0 \\ (x - 6\cos a)^2 + (y - 6\sin a)^2 = 1 \end{cases}$$

6. Расстоянием между двумя точками на поверхности прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ называют наименьшую длину ломаной на поверхности, соединяющей эти точки. По поверхности параллелепипеда с размерами AB=2, AD=$2\sqrt{2}$, AA'=4 ползет муравей так, что расстояние на поверхности между ним и вершиной A всегда постоянное и равно $2\sqrt{2}$. Нарисовать замкнутую траекторию движения муравья по поверхности параллелепипеда и найти ее длину.

Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2019 год
3 комплект

1. Сколько различных пар целых чисел x и y, принадлежащих к отрезку [1;100] удовлетворяют уравнению НОД($\log_2 x$; 36) = $\log_3^2 y$?

2. Координаты $(x;y)$ вершин треугольника ABC являются решениями уравнения $|\cos(x-2y)|=$ - $|\cos(x+y)|$. Найдите наименьшее возможное значение площади данного треугольника.

3. Найти наибольшее число окружностей радиуса 1, не имеющих общих точек, которые могут одновременно касаться окружности радиуса 3.

4. В квадрате $ABCD$ со стороной 4 расположена точка O, отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 1. Через точку O совершенно случайно проведена прямая L, разделяющая квадрат на две части. Найти вероятность того, что одна из частей будет иметь площадь, не превосходящую 3.

5. При каких a множество решений неравенства $x^2+(|y|-a)^2 \leq a^2$ содержит все пары чисел (x;y) для которых $(x-4)^2+(y-2)^2 \leq 1$?

6. Около выпуклого четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и по длине равны 5 и 6, можно описать окружность с центром в точке O. Найти площадь четырехугольника $ABCO$.