Олимпиада «Ломоносов» по математике

Отборочный тур

11 класс, 2020 год

1. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $\sqrt{7}x^2 - \sqrt{116}x + \sqrt{112} = 0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}|$. Ответ дайте в виде действительного числа, округлив его при необходимости стандартным образом до сотых. Целую и дробную части разделяйте точкой.

Решение. Пусть $\sqrt{7} - a$, $\sqrt{116} - b$, $\sqrt{112} - c$.
Тогда

$$x_1x_2 = \frac{c}{a},\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}. =>$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}.$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}}.$$

Тогда

$$\left|\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right| = \frac{|x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2|}{|x_1^2x_2^2|} = \frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}} \cdot \frac{b}{a}}{\frac{c^2}{a^2}} = 0,19.$$

Ответ: 0.19.

2. Найти наименьшее значение x, удовлетворяющее неравенству

$$(3x - x^2 - 2)\sqrt{4x + 4x^2 + x^3} \geq 0.$$

Ответ дайте в виде целого числа.

Решение.

$$-(x-1)(x-2) \cdot \sqrt{x(x+2)^2} \geq 0.$$

Написав ОДЗ и применив метод интервалов получаем, что $x = -2$ — наименьшее значение.
Ответ: -2.

3. Вычислите $(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha + \cos\beta = -\frac{4}{5}$ и $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{3}$. Ответ дайте в виде действительного числа, округлив его при необходимости стандартным образом до сотых. Целую и дробную части разделяйте точкой.

Решение.

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta \cos\alpha\cos\beta = \frac{16}{25} \\ \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{9}. \end{cases} \quad =>$$

$$2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \frac{16}{25} + \frac{1}{9} - 2.$$

$$\cos(\alpha - \beta) = -0,62(4).$$

Ответ: -0.62.

4. Каждое утро член семьи Ивановых выпивает 190-граммовую чашку кофе с молоком. Количество молока и кофе в чашках у них разное. Оля Иванова выяснила, что она выпила $\frac{1}{5}$ часть всего выпитого в это утро молока и $\frac{2}{13}$ части всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье? Ответ дайте в виде целого числа.

Решение. Пусть Оля выпила x_1 молока и y_1 кофе, тогда i-тый член семьи выпил x_i молока и y_i кофе соответственно. Тогда получим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 190 \\ ... \\ x_n + y_n = 190. \end{cases}$$

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{5} = x_1, \ \frac{2(y_1 + ... + y_n)}{13} = y_1 => \\ 190n = 5x_1 + 6,5y_1.$$

Тогда

$$\begin{cases} 1,5y_1 = 190n - 5 \cdot 190 \\ 1,5x_1 = 6,5 \cdot 190 - 190n. \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} 190n > 5 \cdot 190 \\ 190n < 6,5 \cdot 190. \end{cases}, \text{ так как } x_1 \text{ и } y_1 > 0$$

$$\begin{cases} n > 5 \\ n < 6,5. \end{cases}$$

Следовательно, в семье 6 человек.
Ответ: 6.

5. BL — биссектриса треугольника ABC. Найдите его площадь, если известно, что $|AL| = 2$, $|BL| = 3\sqrt{10}$, $|CL| = 3$. Ответ дайте в виде действительного числа, округлив его при необходимости стандартным образом до сотых. Целую и дробную части разделяйте точкой.

Решение. Положим $BLA = \beta$; $ABL = \alpha$

$$S_{ABC} = S_{ALC} + S_{ALB} = \frac{1}{2}(15\sqrt{10}) \cdot sin\beta.$$

По теореме синусов

$$\begin{cases} \frac{3\sqrt{10}}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2}{\sin\alpha} \\ \frac{3}{\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{10}}{\sin(\beta-\alpha)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) = 3\sqrt{10}\sin\alpha \\ 3(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = 3\sqrt{10}\sin\alpha. \end{cases}$$

$$2 \cdot 6\sin\alpha\cos\beta = (-3\sqrt{10})\sin\alpha.$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{4} \ => \ \sin\beta = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$S = \frac{15\sqrt{5}}{4} = 14,52.$$

Ответ: 11.85.

6. Решите уравнение
$$2x^3 + 54x = 9 + 18x^2.$$
Ответ дайте в виде действительного числа, округлив его при необходимости стандартным образом до сотых. Целую и дробную части разделяйте точкой.

Решение.
$$x^3 - 9x^2 + 27x = 4,5$$
$$(x-3)^3 = -22,5$$
$$x = 3 - \sqrt[3]{22,5}$$

Ответ: 0.18.

7. Вычислите значение выражения $\arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} - \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$. Запишите полученное выражение в виде $\frac{a\pi}{b}$, где a и b — целые, взаимно простые числа и укажите в ответе значение $|a+b|$. Ответ дайте в виде целого числа.

Решение.
$$\cos\left(\arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} - \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
При этом, так как $\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} > \sqrt{\frac{2}{3}}$, оба аргумента больше 0. Следовательно, второе отрицательно и лежит на $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Тогда искомое значение - это $-\frac{\pi}{6}$.
Ответ: 5.

8. Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $3, 10, 17, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $2, 5, 8, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел. Ответ дайте в виде целого числа.

Решение.
$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 7 = 7n - 4;$$
$$b_k = 2 + (k-1) \cdot 3 = 3k - 1,$$
Тогда
$$3k - 1 = 7n - 4;$$
$$3(k-1) = 7n;$$
$$k = 7m - 1;$$
$$n = 3m =>$$
$$a_n = 21m - 4.$$
При этом $3m \leq 100$, поэтому $m \leq 33$. Тогда $a_1 = 17$, $a_{99} = 33 \cdot 21 - 4$. Сумма равна $\frac{17+33\cdot 21-4}{2} \cdot 33 = 11649$.
Ответ: 11649.

9. Найдите максимальное значение выражения $\cos(x-y)$, если известно, что

$$\sin x - \sin y = \frac{3}{4}.$$

Ответ дайте в виде действительного числа, округлив его при необходимости стандартным образом до сотых. Целую и дробную части разделяйте точкой.

Решение.

$$\sin x - \sin y = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{9}{64} \Rightarrow$$

$$\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right) \geq \frac{9}{64} \Rightarrow 1 - 2\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right) = \cos(x-y) \leq 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32}.$$

Очевидно, что при $y=-x$ оценка достигается.
Ответ: 0.72.

10. Кривая, заданная уравнением $y = 8^p x^2 + px - 2^{p^2}$, пересекает ось Ox в точках A и B, а ось Oy в точке C. Найдите сумму всех значений параметра p, при которых центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на оси Ox. Ответ дайте в виде целого числа.

Решение. Центр описанной окружности лежит на AB. Следовательно, ABC — прямоугольный. $\Leftrightarrow$ $h^2 = a \cdot b \Leftrightarrow |x_1 \cdot x_2| = |y(0)| \Leftrightarrow 2^{2p^2} = \frac{2^{p^2}}{8^p} \Leftrightarrow 2p^2 = p^2 - 3p \Leftrightarrow p = 0$ или $p = -3$.
Ответ: -3.

11. На столе в ряд лежит 14 гирек, упорядоченных по массе (слева — самая легкая, справа — самая тяжелая). Известно, что масса каждой гирьки равна целому числу грамм, массы любых двух соседних гирек отличаются не более, чем на 5 грамм, а суммарная масса не превосходит 2019 грамм. Найдите максимально возможную при этих условиях массу самой тяжелой гирьки. Ответ дайте в виде целого числа.

Решение. Докажите, что наибольшая масса будет, когда последующие массы отличаются на наибольшее число, после заметьте, что задача сводится к поиску такого наибольшего $n \leq 5 + 10 + ... + 5 \cdot 13$, что $14x + n = 2019$ разрешимо в целых. И поймите, что $n = 5 + 10 + ... + 65 - 4$ подходит. Это значит, что нужно увеличивать массу кажой гирьки на 5, по сравнению с предыдущей, а последнюю гирьку на 1. Отсюда получается ответ.
Ответ: .

12. Упростить выражение

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{6}} + 6\right) - \left(\frac{\sqrt[3]{6}+1}{5} - \frac{1}{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{6} + 1} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{6}}\right) : \frac{6 + \sqrt[3]{36} + 2\sqrt[3]{6}}{5}.$$

Ответ дайте в виде целого числа.

Решение. Введите замену $\sqrt[3]{6}$ и домножьте дроби с плохими знаменателями на сопряженные, чтобы получалась разность кубов. Дальше все тривиально.
Ответ: .

13. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $35°$, отрезки BB_1 и CC_1 — высоты, точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_{12} и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла B_1KB_2.

Решение. Совсем просто. РАссмотрите два прямоугольных треугольника, заметьте, что в них проведена медиана, которая делит их на 2 равнобедренных треугольника, вычислите с помощью этого все углы треугольника B_1KB_2.
Ответ: 75.

14. Уравнение $x^2 - 5x + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{7}}{1+x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{7}}{1+x_1}\right)^2.$$

Ответ дайте в виде целого числа.

Решение. Воспользуйтесь теоремой виета и выразите искомую величину через элементарные симметрические многочлены.
Ответ: .

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4y^2 - x^2 = 36 + 12x \\ 4y^2 + x^2 = 36 - 6xy. \end{cases}$$

Получив решение $(x_1; y_1), (x_2; y_2), ..., (x_n; y_n)$ в ответ запишите сумму квадратов $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2$. Ответ дайте в виде целого числа.

Решение. Вычтите из первого второе, выразите линейно x через y и рассмотрите 2 полученных случая.
Ответ: .

16. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\frac{\sin \pi x - \cos 2\pi x}{(\sin \pi x + 1)^2 + \cos^2 \pi x} = 0.$$

Ответ дайте в виде действительного числа, округлив его при необходимости стандартным образом до сотых. Целую и дробную части разделяйте точкой.

Решение. Расписываем косинус двойного через синус квадрат, а косинус квадрат через синус квадрат. Далее получаем рациональное уравнение относительно синуса.
Ответ: .

17. Семь чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Сумма их кубов равна нулю, а сумма квадратов — 756. Найдите наибольшее из этих чисел. Ответ дайте в виде действительного числа, округлив его при необходимости стандартным образом до сотых. Целую и дробную части разделяйте точкой.

Решение. Группируйте попарно крайние члены в сумме кубов, пользуясь формулой суммы кубов. За скобки выносится общий множитель, а второй полученный общий множите

всегда будет больше 0, отсюда $a_1 = -3d$. Подставляя во второе находите d и решаете задачку.
Ответ: .

18. Среди всевозможных треугольников ABC таких, что $BC = 8\sqrt[4]{3}$, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, найдите тот, площадь которого максимальна. Чему равна эта площадь? Ответ дайте в виде целого числа.

Решение. Максимальная площадь будет, когда треугольник ABC равнобедренный. Зная это проводите высоту и дальше все находится легко.
Ответ: .

19. Решите уравнение

$$5^{\sqrt{x^3-3x^2+3x-1}} = \sqrt[3]{\left(5^{\sqrt[4]{(x-1)^7}}\right)^4}.$$

В ответ запишите корень, если он один, или сумму корней, если их несколько. Ответ дайте в виде действительного числа, округлив его при необходимости стандартным образом до сотых. Целую и дробную части разделяйте точкой.

Решение. Под первым корнем выделить полный куб, преобразовать корни в степени и дальше все понятно.
Ответ: .

20. Сколько целочисленных корней уравнения

$$\cos 2\pi x + \cos \pi x = \sin 3\pi x + \sin \pi x$$

лежит между корнями уравнения

$$x^2 + 10x - 17 = 0?$$

Ответ дайте в виде целого числа.

Решение. Замечтаете, что при целых x каждое из слагаемых может быть равно 0,1,-1 в зависимости от четности x, осознаете, что равенство выполняется только для нечетных, решаете уравнение и определяете сколько нечетных числе находится между его корнями.
Ответ: .

21. Из пункта A в пункт B в 14:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт B автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте C в 14:10. Вернувшись в пункт A, автобус снова без задержки направился в пункт B и догнал пешехода в пункте D, находящемся на расстоянии $\frac{2}{15}$ км от пункта C. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами A и B равно 4 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны. Ответ дайте в виде целого числа.

Решение. Просто обычная текстовая задача. Вводите за переменные скорости автобуса и пешехода и получаете два равенства, подсчитывая время.
Ответ: .

22. Решите неравенство

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{32-x}>4.$$

Ответ дайте в виде целого числа.

Решение. Замечаете, что левая часть монотонно возрастает и при x=7 она равна 4, поэтому все 7<x<33 вам подходят. Осталось лишь просуммировать все целые числа из данного интервала.
Ответ: .

23. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x-12\operatorname{ctg} x+9\operatorname{ctg}^2 x-3$$

на интервале $(-\frac{\pi}{2};0)$. Ответ дайте в виде действительного числа, округлив его при необходимости стандартным образом до сотых. Целую и дробную части разделяйте точкой.

Решение. Вводите замену $t=\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x$, по неравенству о средних она не превосходит $2\sqrt{3}$, исследуете полученную квадратну функцию от t на данном промежутке.
Ответ: .

24. Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$\sin(\pi(x^2+3x+3))=\sin(\pi(x+1)),$$

принадлежащих отрезку $[-2;0]$. Ответ дайте в виде действительного числа, округлив его при необходимости стандартным образом до сотых. Целую и дробную части разделяйте точкой.

Решение. Переносим все в левую часть, раскладываем по разности синусов, приравниваем полученные сомножители к нулю, получаем два уравнения с целым параметром, написали на параметры ограничения на существования корней, воспользуйтесь теоремой виета.
Ответ: .

25. Найдите все пары целых чисел (x,y), являющиеся решениями уравнения

$$7xy+15x-13y-37=0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений x.

Решение. Домножить обе части на 7, разложить на скобки $(7y+15)(7x-13)=64$, перебрать все варианты для делителей 64.
Ответ: .

26. Найдите наименьшее из целых значений a, при которых уравнение

$$\sqrt[3]{x^2-(a-8)x-8a}+\sqrt[3]{5}=0$$

имеет хотя бы один целый корень. Ответ дайте в виде целого числа.

Решение. Разносите в разные части, выражаете a через x, делите полученный многочлен с остатком, замечаете, что целым a может быть только когда оставшаяся дробь равна натуральному числу, перебираете варианты делителей.