Комбинаторика

Правила суммы и произведения

1. aut(b) Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999. Сколько существует номеров:

1) Все цифры которых четны?
2) В которых любые две соседние цифры различны?
3) Все цифры которых различны?
4) В которых есть не менее двух одинаковых цифр?
5) Содержащих цифру 7?
6) В которых сумма всех цифр четная?
7) В которых ровно две одинаковые цифры?
8) В которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?
9) В которых сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр?

2. pvg(b) Для нумерации всех парковочных мест на стоянке (подряд от первого до последнего) рядом с каждым местом был установлен его номер, составленный из табличек, на каждой из которых написано по одной цифре. В общей сложности было использовано 2148 табличек.

1) Сколько мест на парковке?
2) Каких цифр было использовано больше всего, а каких — меньше всего?
3) Каково количество номеров цифры которых идут в порядке возрастания?

3. fiz(b) В заборе 20 досок, каждую надо покрасить в черный, синий, зеленый или желтый цвет, причем соседние доски красятся в разные цвета.

1) Сколькими способами это можно сделать?
2) Если требуется, чтобы хоть одна из досок обязательно была синей?
3) Если требуется, чтобы было использовано не менее, чем три цвета?

4. aut(b) Сколько существует различных 10-ти разрядных последовательностей-полиндромов:

1) Которые можно составить, используя цифры 1 и 0?
2) Представляющих собой десятизначные числа, которые кратны 5?
3) Представляющих собой десятизначные числа, которые не кратны ни 5, ни 9?

5. lom(b) В классе 12 учеников. Их нужно разбить на две группы (первую и вторую). Сколькими способами это можно сделать, если:

1) В каждой группе хотя бы один человек
2) В каждой группе должно быть четное кол-во человек
3) В каждой группе хотя бы три человека

6. sbu(b) Даны карточки, на которых написаны буквы "а" , "а" , "а" , "б" , "в" , "г" , "д" (карточки с одинаковыми буквами неразличимы). Сколько различных n буквенных слов можно составить, используя данные карточки?

1) При n=7
2) При n=4
3) При n=6, чтобы в слово начиналось с буквы "в" и заканчивалось буквой "а"

7. aut(b) Найдите коэффициент в разложении:

1) Выражения $(a+b)^{20}$ при a^4b^{16}
2) Выражения $(a+b+c)^{18}$ при $a^6b^6c^6$
3) Выражения $(x^2+x+1)^{20}$ при x^6

8. lom(b) В разложении функции $f(x)=(1+x-x^2)^{20}$ по степеням найдите:

1) Сумму всех коэффициентов при всех степенях x
2) Сумму всех коэффициентов при четных степенях x
3) Коэффициент при x^{3n}, где n равно сумме всех коэффициентов разложения

9. lom(b) Найдите количество слагаемых в разложении функции:

1) $(x+y+z)^{10}$
2) $(x^{-1}+1+x)^{2016}$
3) $(1+x)(1+x^2)...(1+x^{14})$

10. aut(b) Найдите количество кротчайших путей, состоящих из единичных векторов, параллельных осям координат, из начала координат

1) В точку $(6;6)$
2) В точку $(6;6)$, проходящих через точку $(3;3)$
3) В точку $(6;6;6)$

11. aut(b) Комбинаторно докажите следующие свойства чисел сочетаний. Другими словами, вас просят на примере различных решений одной задачи получить выражения, стоящие в разных частях данных равенств:

1) $C_n^k=C_n^{n-k}$ и $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$
2) $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$ и $C_n^0-C_n^1+...+(-1)^n\cdot C_n^n=0$
3) $0\cdot C_n^0+1\cdot C_n^1+...+n\cdot C_n^n=n\cdot 2^{n-1}$ и $C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+...+C_n^kC_m^0=C_{m+n}^k$

12. aut(b) В выпуклом n-угольнике $(n>4)$ никакие три диагонали не проходят через одну точку.

1) Найдите количество диагоналей в данном многоугольнике
2) Найдите количество неравнобедренных треугольников в данном многоугольнике
3) Найдите число точек (отличных от вершины) пересечения пар диагоналей

13. lom(b) Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 50 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зеленые, фиолетовые и голубые саквояжи. Саквояжи одного цвета считаются идентичными. Сколькими способами она может сделать покупку, если:

1) У нее должно быть хотя бы по одному саквояжу каждого типа?
2) Какие-то типы саквояжей могут быть и не куплеными?
3) Саквояжей каждого вида должно быть не менее десяти?

14. lom(b) Найдите сумму всех 4-х значных четных чисел, которые можно получить из карточек следующих видов:

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 если каждую цифру можно использовать не более одного раза
2) 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5 если каждую цифру можно использовать не более одного раза
3) 1, 2, 3, 4 если каждая цифра может быть использована более одного раза

15. pvg(b) Найдите количество шестизначных чисел

1) У которых пятая цифра меньше шестой на 2
2) У которых каждая следующая цифра меньше предыдущей
3) У которых каждая цифра больше 4 и все цифры идут в порядке неубывания

16. pvg(b) Из двенадцати школьников и трёх учителей нужно составить школьный комитет, в состав которого войдет девять человек. При этом в нём должен участвовать хотя бы один учитель. Сколькими способами может быть составлен комитет?

17. fiz(b) Сколькими способами можно выложить в ряд три красных, четыре синих и пять зелёных шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

18. aut(b) В волейбольной секции 24 спортсмена. Сколькими способами их можно разделить на 4 команды по 6 спортсменов в каждой для проведения тренировочного турнира? А сколькими способами можно разбить 7 мальчиков и 7 девочек на пары?

19. vpr(b) В младшей группе детского сада есть две разные маленькие елки и пять детей. Воспитатели хотят разделить детей на 2 хоровода, причем в каждом хороводе должен быть хоть 1 ребенок. При этом воспитатели различают детей и елки: 2 таких разбиения считаются одинаковыми, если одно из них можно получить из другого повращав каждый из хороводов вокруг своей елки. Сколькими способами можно разбить детей на хороводы?

20. omm(b) Для всех нечетных чисел от 1 до 2013 посчитали сумму всех цифр, использованных для их записи. То же сделали для всех четных чисел в том же диапазоне. Насколько первая сумма больше второй?

21. lom(b) Сколько страниц в книжке, если для полной нумерации ее страниц в троичной системе счисления (от первой до последней) потребовалось 1503 цифр?

22. aut(b) Петя вычислил произведение $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$. Вася доказал, что, имея по одной гире в 1, 2, 4, 8 и 16 граммов, можно набрать любой вес от 1 до 31 грамма, причём единственным способом. Юра сказал Пете и Васе: «Вы решали одну и ту же задачу». Почему он так сказал?

23. lom(b) Таблицу размера 3 x 3 надо заполнить числами 2014, 2015 и 2016 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была одинаковой. Сколькими различными способами можно это сделать?

24. vpr(b) Сколькими способами можно раскрасить грани куба в чёрный и белый цвета (каждую грань в один цвет, и оба цвета должны быть использованы)? Раскраски считаются одинаковыми, если одну можно получить из другой, повертев куб в руках.

25. fiz(m) Найдите количество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, таких, что точка (14; 22) содержится внутри (но не на границе) каждого из них, абсциссы вершин являются натуральными числами меньше 29, а ординаты — натуральны и меньше, чем 31.

26. fiz(m) На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке (60, 45). Найдите количество таких квадратов.

27. fiz(m) На клетчатой доске размера 22×25 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 7 и 4 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

28. fiz(m) На каждой из прямых $y = 1$ и $y = 12$ отмечено по 200 точек с абсциссами 1, 2, 3, . . . , 200. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

29. lom(m) На окружности пытаются разместить 20 черных и 50 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

30. lom(m) На каждой из двух параллельных прямых, расстояние между которыми равно 2 см, отмечено по 10 точек с интервалом между соседними точками по 1 см. Из этих 20 точек нужно выбрать 9 так, чтобы каждые две из них отстояли друг от друга не менее чем на 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

31. vpr(m) В классе за контрольную 6 учеников получили оценку 5, 7 оценку 4 и 1 оценку 3. Учитель сказал им разбиться на пары с разными оценками, где получивший лучшую оценку рассказал бы получившему худшую, где тот ошибся. Сколькими способами ученики могли бы разбиться на пары при таком условии?

32. pvg(m) Три пирата: Джо, Билл и Том нашли клад, содержащий 70 одинаковых золотых монет, и хотят разделить их. Сколько существует способов это сделать, чтобы каждому из них досталось хотя бы одна? А чтобы каждому досталось не менее 10 монет? А чтобы каждому досталось не более 40?

33. pvg(m) Числа 1, 2, . . . , 9 расставлены в квадрате 3 x 3. Будем называть фэншуйными такие расстановки, у которых при выборе любых трёх клеток, расположенных в разных столбцах и разных строках, сумма чисел, стоящих в выбранных клетках, будет равна 15. Найдите число всех фэншуйных расстановок.

34. aut(m) В таблицу размера k x l записывают числа $+1$ и -1 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равнялось 1. Сколькими способами это можно сделать?

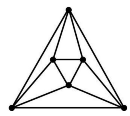
35. fiz(m) Отметили все вершины правильного 12-тиугольника. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся одиннадцатизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках? А десятизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках?

36. fiz(m) Каких целых чисел от 1 до 8^{1020} (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

37. aut(m) Каких чисел больше среди всех чисел от 100 до 999: тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних, или тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних?

38. krp(m) Треугольником Паскаля называют бесконечную треугольную таблицу чисел, у которой на вершине и по бокам стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух стоящих над ним чисел. Так, например, третья строка треугольника (1,2,1) содержит два нечетных числа и одно четное. Сколько четных чисел содержится: а) в строке с номером 1024? б) в строке с номером 1050?

39. vpr(m) На рисунке изображена схема из 6 городов и 12 дорог. Сколько есть способов закрыть на ремонт 7 дорог одновременно, чтобы все еще можно было проехать из любого города в любой?



40. spu(m) Сколькими способами можно на клетчатой доске размером 10×10 расставить 18 шахматных слонов, не бьющих друг друга? Напомним, что шахматный слон бьет по диагонали любое число клеток.

41. lom(m) Все натуральные числа, сумма цифр каждого из которых равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 125-м месте?

42. aut(m) В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на своё место?

43. aut(m) Сколько хороводов можно составить из n различных человек? А бус из n различных бусинок? Каждого человека и бусинку можно использовать один раз.

44. aut(m) У Пети имеется набор из 24 кубиков, окрашенных в 4 цвета: красный, синий, желтый и зеленый, при этом кубиков каждого цвета поровну. Сколько различных стенок 4 x 6 он может из них построить, если известно, какая сторона стенки является передней. А если не известно, какая сторона стенки передняя, а какая задняя?

45. aut(a) Сколькими способами, используя 20 цветов, можно закрасить:

1) Вершины p-угольника, где p - простое, если цвета вершин могут повторяться?
2) Грани тетраэдра, если цвета граней могут повторяться?
3) Грани куба, если их цвета не могут повторяться?
4) Вершины четырехугольника, если цвета вершин могут повторяться?

46. fiz(a) Дан правильный 24-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45° . (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

47. itm(a) Сколькими способами из числе 1, 2, 3, ..., 11 можно выбрать несколько чисел так, чтобы среди выбранных не было трех идущих подряд?

48. vpr(a) В стране шесть городов: А, Б, В, Г, Д и Е. Их хотят связать пятью авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (быть может, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

49. fiz(a) В клубе собрались 11 путешественников. Когда зашел разговор о стране N, оказалось, что вместе любые 6 путешественников побывали во всех городах страны N (то есть каждый город посетил хоть один из этих 6 путешественников), а любые 5 - нет (то есть найдется город, в котором не был ни один из этих 5 путешественников). При каком минимальном количестве городов в стране N это могло быть?

50. fiz(a) В некотором государстве 35 городов. Каждая пара городов соединена авиарейсом одной из двух авиакомпаний. Оказалось, что из каждого города выходит ровно 12 авиарейсов первой авиакомпании. Назовем тройку городов A, B, C замкнутой, если все три авиарейса AB, BC, CA осуществляются одной авиакомпанией. Каково наибольшее возможное количество замкнутых троек городов может быть в этом государстве?

51. fiz(a) В выпуклом 17-угольнике проводят все его диагонали. На какое наибольшее число частей они могут его разбить?

52. fiz(a) На клетчатой бумаге по линиям сетки выделили прямоугольник 10×15 клеток. В нем отметили все узлы, в том числе и лежащие на его границе. Какое наибольшее число отмеченных узлов можно выбрать так, чтобы никакие три из них не являлись вершинами прямоугольного треугольника?

53. aut(a) Билеты стоят 50 центов, и $2n$ покупателей стоят в очереди в кассу. Половина из них имеет по одному доллару, остальные – по 50 центов. Кассир начинает продажу билетов, не имея денег. Сколько существует различных порядков в очереди, таких, что кассир всегда может дать сдачу?

54. lom(a) Круг разбили на 4 равных сектора по 90°. Сколькими способами можно его раскрасить, если есть 7 цветов и каждый сектор можно красить в любой цвет? Раскраски, которые совпадают при повороте круга, считать одинаковыми.

55. vse(a) На окружности отмечено 20 точек. Сколько существует таких троек хорд с концами в этих точках, что каждая хорда пересекает каждую (возможно, в концах)?

56. fiz(a) Прямоугольный параллелепипед $30 \times 35 \times 42$, разбитый на 44100 единичных кубиков, проткнули иглой по его диагонали. Сколько единичных кубиков протыкает игла?

57. kur(a) Куб со стороной 5 сложен из 125 кубиков со стороной 1. Сколько маленьких кубиков пересекает плоскость, перпендикулярная одной из диагоналей куба и проходящая через её середину?

58. pvg(a) Для 50 детей детского сада закуплены 50 одинаковых тарелок. По краю каждой тарелки равномерно расположены 5 белых кружочков. Воспитатели хотят перекрасить какие-либо из этих кружочков в другой цвет так, чтобы все тарелки стали различными. Какое наименьшее число дополнительных цветов потребуется им для этого?

59. spu(a) В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов с различными рейтингами ($n > 4$). Во всех партиях, кроме двух, победил участник с более высоким рейтингом, но теннисист с самым маленьким рейтингом выиграл у теннисиста с самым большим рейтингом. Сколькими способами можно расставить спортсменов в ряд таа, чтобы каждый (кроме самого первого) выигрывал у своего соседа справа?

60. spu(a) Какое наибольшее количество подмножеств множества $\{1, 2, ..., 2013\}$ можно выбрать так, чтобы любые два различных выбранных подмножества имели ровно 2011 общих элементов?

61. vsi(a) В множестве X из 17 элементов выделено семейство из N различных непустых подмножеств таких, что каждый элемент множества X содержится ровно в двух подмножествах из этого семейства. Каково максимальное значение N? Найдите число всех возможных различных типов таких семейств для максимального N. Два семейства подмножеств имеют различные типы, если не получаются друг из друга перестановкой элементов X.

62. itm(a) Сколько различных векторов можно получить, складывая векторы в пространстве с целочисленными координатами и длиной $\sqrt{3}$, если каждый из 8 такиз векторов в одной сумме может использоваться не более одного раза?

Комбинаторика + ТЧ

1. pvg(b) Найдите количество натуральных делителей у числа:

1) $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^{11}$
2) $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^{11}$, которые являются четными числами
3) $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^{11}$, которые не являются ни квадратом, ни кубом натурального числа

2. fsb(b) У числа $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^{11}$ найдите:

1) Сумму всех его делителей
2) Сумму всех его делителей, которые кратны шести
3) Сумму квадратов всех его натуральных делителей

3. aut(b) Найдите количество натуральных чисел меньших n и взаимно простых с ним, если:

1) $n = p$, где p — простое
2) $n = p^n$, где p — простое
3) $n = p^n \cdot q^k$, где p и q — простые

4. aut(b) Найдите количество решений уравнения $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ (решения, отличающиеся порядком, считаются различными)

1) В натуральных числах
2) В целых неотрицательных числах
3) В целых числах таких, что $x_i \geq -i$

5. aut(b) У числа 100! найдите:

1) Степень двойки в разложении
2) Количество нулей на конце цисла
3) Максимальное n такое, что 100! делится на 288^n

6. fiz(b) Найдите количество решений уравнения:

1) $xyz = 15^{15} \cdot 20^{20}$ в целых числах
2) $x^3 \cdot y^2 = 15^{150} \cdot 20^{200}$ в целых числах
3) $x^2 + xy = 300000$ в целых числах
4) $5x^2 - 6xy + y^2 = 6^{1000}$ в целых числах
5) $3^x + 7y = 3^{2016}$ в натуральных числах
6) $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{13}^4 = 2017$ в целых числах

7. fiz(b) Сколько целых решений имеет

1) Неравенство $|x| + |y| < 100$?
2) Уравнение $7|x| + 11|y| = 10000$?
3) Уравнение $2^{a+3b+2c} \cdot 3^{a-b+c} \cdot 5^{2a+2b+3c} = 33750$, таких, что $|a + b + c| \leq 120$?

8. lom(b) Найдите количество пар целых чисел (m, n), для которых $n^2 + 2^{2014} = m^2$.

9. rat(b) Сколько существует различных, целых, положительных, двенадцатиразрядных чисел, делящихся на 9, в записи которых используется две цифры 3 и 4?

10. lom(b) Сколько 9-значных чисел, делящихся на 5, можно составить путѐм перестановки цифр числа 377 353 752?

11. fiz(b) Число 58964 написали 8 раз подряд. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

12. fiz(b) Дано число 5300 . . . 0035 (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

13. fiz(b) Есть семь карточек с цифрами 0; 1; 2; 3; 3; 4; 5. Сколько существует различных *шестизначных* чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

14. pvg(b) Сколько натуральных чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат в десятичной записи ни одной из цифр 3, 4, 5, 7 и 9?

15. fiz(b) На столе лежат 130 различных карточек с числами 502, 504, 506, . . . , 758, 760 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

16. lom(b) На 21 карточке написаны числа 11, 12, 13, . . . , 31 соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка, и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа? Ответ дайте в виде целого числа.

17. fiz(b) Бесконечная геометрическая прогрессия состоит из натуральных чисел. Оказалось, что произведение первых шести её членов равно 162^{603}. Найдите количество таких прогрессий.

18. vpr(b) Компьютерные часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59. Сколько секунд в течение суток сумма всех цифр, горящих на табло, равна 36?

19. vpr(b) Найдите количество таких натуральных n, что $1 \leq n \leq 1012$ и НОК(16;n)=16n.

20. aut(b) Найдите все натуральные числа, делящиеся на 30 и имеющие ровно 30 различных делителей.

21. rat(b) Найти натуральное число, делящееся на 225 и имеющее 15 различных делителей.

22. aut(b) Пусть натуральное число n таково, что $n + 1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех натуральных делителей n делится на 24.

23. fsb(b) Найдите какое-нибудь натуральное число, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна 2016.

24. lom(b) Определите количество кратных трём натуральных делителей числа 11!

25. aut(b) Существует ли натуральное число, у которого нечётное количество чётных натуральных делителей и чётное количество нечётных?

26. aut(m) Доказать, что число делителей n не превосходит $2\sqrt{n}$.

27. itm(m) Доказать, что если s — число всех делителей натурального числа n, то произведение всех делителей равно $\sqrt{n^s}$.

28. aut(m) Может ли сумма всех делителей чила превосходить данное число более, чем в 100 раз?

29. aut(m) Сколько существует натуральных n меньших 10000 таких, что $2^n - n^2$ делится на 7?

30. aut(m) Сколько существует пар натуральных чисел $(x; y)$ меньших 10000 таких, что $x^2 + y^2$ делится на 49?

31. aut(m) Найдите натуральное число вида $n = 2^x 3^y 5^z$, зная, что половина его имеет на 30 делителей меньше, треть – на 35 и пятая часть – на 42 делителя меньше, чем само число.

32. mmo(a) Обозначим через $d(N)$ число делителей N (числа 1 и N также считаются делителями). Найти все такие N, что число $\frac{N}{d(N)}$ – простое.

33. rat(m) Найти зависимость от n числа целых неотрицательных решений уравнения $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ при $m = 2$ и $m = 3$. При каком n число решений для $m = 3$ будет в четыре раза большим, чем число решений для $m = 2$?

34. aut(m) Окружность разделена n точками на n равных частей. Сколько можно составить различных замкнутых ломаных из n равных звеньев с вершинами в этих точках?

35. fiz(m) Есть 207 различных карточек с числами 1, 2, 3, 2^2, 3^2,...,2^{103},3^{103} (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки, чтобы произведение чисел выбранных карточек было квадратом целого числа, делящегося на 6?

36. rat(m) Положительное целое число x при делении на 7 имеет остаток 2, а его квадрат x^2 при делении на 49 имеет в остатке 39. Сколько таких чисел находится на отрезке $[100; 1000]$?

37. rat(m) Найти все целые числа на отрезке $[500; 5000]$, остатки от деления которых на 3, 5 и 7 равны 2, 4 и 6 соответственно.

38. rat(m) Сколько решений имеет уравнение НОД$(x; 15)$ = НОД$(x; 3) \cdot$ НОД$(x; 7)$ при $x \in [23; 157]$?

39. lom(m) Сколькими различными способами можно выбрать целые числа $a, b, c \in [1; 100]$ так, чтобы точки с координатами $A(-1, a), B(0, b)$ и $C(1, c)$ образовывали прямоугольный треугольник?

40. fiz(m) Натуральное число имеет ровно два простых делителя. Его квадрат имеет 51 различный натуральный делитель. Какое наибольшее количество различных натуральных делителей может иметь куб этого числа?

41. kur(m) Пусть d_1, d_2, ..., d_n — это все натуральные делители числа 10!. Найдите сумму $\frac{1}{d_1+\sqrt{10!}} + \frac{1}{d_2+\sqrt{10!}} + \ldots + \frac{1}{d_n+\sqrt{10!}}$.

42. vpr(m) Все точки с целыми координатами на числовой прямой отметили либо красным, либо синим цветом, причем так, что любые два числа с разностью 7 закрашены одним цветом. Известно, что числа 31, 144 и 39 отмечены синим цветом, а числа 75, 41 и 700 - красным. Сколько существует различных раскрасок, удовлетворяющих всем перечисленным условиям?

43. fiz(m) Найдите количество различных приведенных квадратных трехчленов (т. е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 3 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 27^{47}.

44. fiz(m) Найдите количество пар целых чисел (a, b) таких, что $1 \le a \le 700$, $1 \le b \le 700$, сумма $a + b$ делится на 7, а произведение ab делится на 5. (При $a \neq b$ пары (a, b) и (b, a) считаются различными.)

45. fiz(m) Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 291000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 291.

46. fiz(m) В числе 2*0*1*6*0*2* нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

47. lom(m) Петя выписал одно за другим 2019 чисел вида $\frac{1\cdot2}{2}, \frac{2\cdot3}{2}, \ldots, \frac{2018\cdot2019}{2}$ и вычислил их. Сколько из получившихся чисел имеют в десятичной записи последнюю цифру 8?

48. fsb(m) Найти количество целых чисел от 1 до 1000 включительно, дающие одинаковый остаток от деления на 11 и на 12.

49. kur(a) Митя сложил все нечётные натуральные делители некоторого чётного числа N (включая единицу), а Ваня сложил все чётные натуральные делители числа N (включая само число). Затем Ванину сумму умножили на Митину. Может ли произведение быть квадратом натурального числа?

50. fiz(a) Дан клетчатый прямоугольник размера 1×55. Сколькими способами его можно разрезать на клетчатые прямоугольники размера 1×3 и 1×4?

51. lom(a) Андрею нравятся все числа, не делящиеся на 3, а Тане нравятся все числа, в которых нет цифр, делящихся на 3. Сколько четырёхзначных чисел нравятся и Андрею, и Тане? Найдите общую сумму цифр всех таких четырёхзначных чисел.

52. fiz(a) Скольким способами можно разменять 120000 рублей монетами в 1, 2 и 5 рублей?

53. fiz(a) Пусть S — множество делителей числа 2275^{90}. Обозначим через T подмножество S, в котором нет двух элементов, один из которых делится на другой. Какое наибольшее число элементов может быть в множестве T?

54. kur(a) Определите количество возможных значений произведения $a \cdot b$, где a, b — целые числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$2019^2 \leq a \leq b \leq 2020^2$$

55. sam(a) В семизначном числе, имеющем 108 делителей, первая цифра (слева) 1, вторая 0. Это же число, уменьшенное в 12 раз, имеет 70 делителей, а увеличенное в 18 раз - 160 делителей. Найти это число.

Реккурентное соотношение

1. aut(a) Сколькими способами можно выложить прямоугольник размера 10 x 2 доминошками размера 1 x 2?

2. aut(a) Найдите количество 7-мибуквенных слов, которые:

1) Состоят из букв а и б и никакие 2 буквы а не идут подряд
2) Состоят из букв а, б и с, где никакие 2 буквы а не идут подряд
3) Состоят из букв а, б и с, где буквы а и б не стоят рядом

3. lom(a) Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается на школьное крыльцо по лестнице, имеющей 10 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо подняться на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вверх (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами?

4. aut(a) Головоломка «Ханойская башня» представляет собой 8 дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Докажите, что эта головоломка имеет решение. Какой способ решения головоломки будет оптимальным (по числу перемещений)?

5. aut(a) Сколько имеется разбиений отрезка длины 8 на отрезки длины 1, 2 и 3? (Разбиения, отличающиеся порядком следования отрезков, считаются различными.)

6. aut(m) Петя выписывает все возможные 2018-буквенные слова, состоящие только из букв а, б, в. В скольких из них а встречается четное количество раз?

7. aut(m) n человек выстраиваются по кругу и нумеруются числами от 1 до n. Затем из них исключается каждый второй до тех пор, пока не останется только один человек. Например, если $n = 10$, то порядок исключения таков: 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, так что остается номер 5. Для данного n будем обозначать через $J(n)$ номер последнего оставшегося человека. Докажите, что $J(2n) = 2J(n) - 1$.

8. pvg(m) Пусть a_n - количество перестановок $(k_1, k_2, ..., k_n)$ чисел $(1, 2, \ldots, n)$ таких, что выполнены два условия: $k_1 = 1$; для любого номера $i = 1, 2, \ldots, n-1$ выполнено неравенство $|k_i - k_{i+1}| \leq 2$. Каково число a_{34}?

9. aut(m) Лягушка прыгает по вершинам шестиугольника $ABCDEF$, каждый раз перемещаясь в одну из соседних вершин. а) Сколькими способами она может попасть из A в C за n прыжков? б) Тот же вопрос, но при условии, что ей нельзя прыгать в D?

10. fiz(m) Кузнечик прыгает по вершинам правильного треугольника ABC, прыгая каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами он может попасть из вершины A обратно в вершину A за 12 прыжков?

11. aut(a) Найдите количество разбиений правильного 8-миугольника на треугольники не пересекающимися диагоналями.

12. aut(a) Пусть B_n - число всех неупорядоченных разбиений n-элементного множества, найдите B_6.

13. tur(a) Шеренга солдат называется неправильной, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Сколько неправильных шеренг можно построить а) из четырёх б) из пяти солдат разного роста?

14. aut(a) Сколькими способами можно выложить прямоугольник размера 10 х 3 доминошками размера 1 х 2? А если можно дополнительно использовать тришиношки 1 х 3?

15. vpr(a) Рассмотрим алфавит из 2 букв. Словом будем считать любое конечное сочетание букв. Назовем слово непроизносимым, если в нем встречается больше 2 одинаковых букв подряд. Сколько всего существует непроизносимых слов из 7 букв?

16. fiz(a) В турнире участвовали 89 теннисистов. Все игры проходили на одном корте. Спортсмен, проигравший хотя бы одну игру, выбывает из турнира. Известно, что у участников каждой встречи количество предыдущих побед отличалось не более чем на одну. Какое наибольшее число игр мог сыграть победитель турнира?

17. fiz(a) В депо три пути для формирования составов. Пути расположены с севера на юг. На пути №1 стоит состав из 34 вагонов. За одну операцию маневрирования тепловоз может перевезти один вагон с любого пути на любой другой путь. Причем он может брать и ставить вагоны только с одной (южной) стороны. За какое наименьшее количество операций тепловоз сможет собрать все вагоны на пути №1 в порядке, обратном исходному?

18. pvg(a) Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в два слоя по 6 карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче его?

Вероятность

1. omm(m) Два игрока подбрасывают монету. Один считает выпавшие орлы, другой решки. Выигрывает тот, кто первым наберет 20 очков. Сейчас счет 19:17 в пользу первого игрока. Какова вероятность того, что он выиграет? (Ответ запишите в виде несократимой дроби a/b.)

2. omm(m) В одной урне лежат 4 зеленых и 6 красных шариков, а в другой - 16 зеленых и N красных. Из каждой урны наугад вытаскивают по одному шарику. Вероятность того, что шарики окажутся одного цвета, равна 0,58. Найдите N.

3. omm(m) Из набора $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ наугад выбираются два различных числа. Найдите вероятность того, что их произведение чётно. Если необходимо, округлите ответ с точностью до 0,01.

4. omm(m) На гранях игрального кубика написаны числа от 1 до 6. Однако вес кубика распределён неравномерно и вероятность выпадения числа k прямо пропорциональна k. Кубик бросают два раза подряд. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел будет равняться 7? Если необходимо, округлите ответ с точностью до 0,01.

5. rat(m) Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 510 шагов и останавливаться, а также проходить по той же прямой 390 шагов назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 20 таких маневров. Задача робота – остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 692 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?

6. rat(m) На сторонах BA и BC треугольника ABC совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь треугольника BMN окажется не больше половины площади треугольника ABC.

7. rat(m) В квадрате $ABCD$ со стороной 4 расположена точка O, отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 1. Через точку O совершенно случайно проведена прямая L, разделяющая квадрат на две части. Найти вероятность того, что одна из частей будет иметь площадь, не превосходящую 3.

8. rat(m) На окружности совершенно случайно взяты три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC тупоугольный.

9. rat(m) Робот может совершать равные по длине шаги по дорожке вперед и назад, при этом выбор направления движения каждого шага является случайным и равновозможным. Робот сделал 10 шагов и остановился. Найти вероятность того, что он окажется на расстоянии более двух шагов от начала движения.

10. rat(m) Код замка состоит из трех цифр от 0 до 9. Замок открывается, если сумма цифр кода делится на 3. Найти вероятность того, что случайно набранный код откроет замок.

11. rat(m) Случайно выбранное шестизначное целое положительное число оканчивается на 32. Найти вероятность того, что оно делится на 14.

12. rat(m) Через случайно выбранные три вершины куба с ребром 2 проводится плоскость. Найти вероятность того, что площадь сечения превзойдет 5. Допускается, что эти вершины принадлежат одной грани куба.

13. rat(m) Игральная кость имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с двугранным углом 60° при основании. На боковых гранях пирамиды нарисованы цифры от 1 до 4, на основании – 5. Вероятность того, что при бросании кость ляжет на плоскость, закрывая определенную цифру, пропорциональна площади грани или основания с этой цифрой. Найти вероятность того, что сумма цифр, закрытых костью при трех бросаниях, равна 13.

14. rat Игральная кость представляет собой кубик, на гранях которого отмечено другим цветом от одного до шести очков. Петя случайным образом бросает на стол три игральных кости одновременно и считает сумму числа очков, выпавших на всех костях. Каждое значение s этой суммы, расположенное от 3 до 18, может появится с определенной вероятностью. Найти s, при котором эта вероятность максимально возможная.

15. rat(m) Петя и Вова играют в кости на фантики. Ведущий игру Петя выигрывает, если при бросании им двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков не превосходит 4 и проигрывает во всех остальных случаях. Проиграв, Петя отдаёт Вове 1 фантик, выиграв – получает от Вовы k фантиков. Игра считается справедливой, если среднее значение выигрыша каждым игроком равна нулю. Найти значение k, при котором игра будет справедливой.

16. vsi(m) Восемь теннисистов проводят турнир по олимпийской системе: они разбиты на 4 четвертьфинальных пары, победители в которых образуют две полуфинальных пары, победители которых играют финальную игру. Силы всех теннисистов равны, каждый из них побеждает в игре с любым другим с вероятностью $\frac{1}{2}$, расписание игр составлено случайным образом. Проигравший очередную игру больше в турнире не участвует. Какова вероятность того, что Вася и Петя, участвующие в турнире, встретятся между собой?

17. vpr(m) Петя решает задачу: Из множества натуральных чисел от 1 до ... включительно выбрано наугад одно число. Найти вероятность того, что это число будет делиться на 17. Петя решил задачу правильно и получил ответ 0,056. Какое наибольшее натуральное число могло стоять в условии задачи вместо многоточия?

18. vpr(m) В двух ящиках лежат белые и чёрные шары. Если из каждого ящика вынуть по одному шару, то вероятность того, что они оба окажутся белыми, равна 0,115, а вероятность того, что оба окажутся чёрными - 0,405. В одном из ящиков все чёрные шары перекрасили в белый цвет, а все белые перекрасили в чёрный цвет, после чего из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что эти шары будут одного цвета. (Дробную часть ответа отделяйте от целой части точкой).

Общие слова и рекомендации

Хотя данная подборка и рассчитана на то, что никаких дополнительных знаний от читателя для работы с ней не требуются, и все необходимые понятия и приемы будут выведены и замечены в процессе кропотливого решения задач, я уверен, что будет полезно обозначить в списке литературы все основные материалы, которые помогут в работе с предложенными задачами и с изучением комбинаторики в целом. Материалы даны в порядке, предполагаемом для изучения с нуля: от материалов, в которых описываются наиболее простые и общие идеи, до книг с разбором достаточно узких тем и приемов, которые хоть и избыточны для участников РСОШовских олимпиад, но очень полезны для желающих хорошенько разобраться в комбинаторике. Разумеется, во всех крупных сборниках нужно смотреть на разделы, которые связаны с комбинаторикой (хотя по большей части и другие разделы данных книг очень хороши и содержательны, но сейчас речь идет про комбинаторику). Самое главное — это не торопиться воплотить в жизнь свое желание загуглить задачу после первой неудачи или прочитать какой-то теоретический материал сразу: все-таки будет намного интереснее и полезнее, если вы будете обращаться к списку литературы или гуглу только в тех случаях, когда вы действительно увязли в примере (за 2 дня неинтенсивной работы решение так и не было придумано), а, по возможности, доходить до всего самим и не лишать себя радости "первооткрываетля". Надеюсь, что данная подборка из задач и материалов поможет вам открыть для себя и углубиться в такой интересный и полезный раздел, как комбинаторика. Все комментарии, предложения и коррективы можно отправлять в личку группы.

Список литературы

[1] Коновалов С.П. "Материалы ЗФТШ"

[2] Лекция Бояршинова М.

[3] Курс лекций Храброва А.

[4] Иванов Ю. "Сколько вариантов?"

[5] Виленкин Н. "Комбинаторика""

[6] Мешойрер Р. "Комбинаторные доказательства формулы Ньютона"

[7] Материалы 179-ой школы

[8] Гарднер М. "Числа Каталана"

[9] Ширшов А. "Об одной комбинаторной задаче"

[10] Коновалов С.П. "Сколько вариантов?", журнал "Квант"

[11] Генкин С.А. "Ленинградские математические кружки"

[12] Алфутова Н. "Алгебра и ТЧ для матшкол"

[13] Яковлев И. "Комбинаторика олимпиаднику"

[14] Прасолов В. "Задачи по алгебре, арифметике и анализу"

[15] Горбачев Н. "Сборник олимпиадных задач"

[16] "Математика в задачах"

[17] Виленкины "Комбинаторика"

[18] problems.ru