Олимпиада «ФизТех» по математике

Заочный этап
11 класс, 2019 год

1. Вычислите $\log_x(x^4 - 8x^2 + 2)$, если известно, что $x^{10} - 2x^6 + 4x^2 - 1 = 0$.

Решение. Из равенства следует, что

$$2x^{10} - 4x^6 = -8x^2 + 2$$

$$2x^{10} - 4x^6 + x^4 = x^4 - 8x^2 + 2$$

$$x^4(2x^6 - 4x^2 + 1) = x^4 - 8x^2 + 2$$

$$x^{14} = x^4 - 8x^2 + 2$$

$$\log_x(x^4 - 8x^2 + 2) = \log_x x^{14} = 14$$

Примечание. Можем удостовериться, что выражение $\log_x x^{14}$ определено при данных x, так как уравнение $x^{10} - 2x^6 + 4x^2 - 1 = 0$ имеет корень на отрезке $[0; 1]$ (по теореме о промежуточном значении).
Ответ: 14.

2. Положительные числа a и b таковы, что числа $\frac{a^2+b^2}{a+b}$, $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ и $\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Известно, что $a + b = 8$. Найдите **наибольшее** возможное значение выражения $a^2 + b^2$.

Решение. Исходное условие равносильно системе

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} \\ a + b = 8. \end{cases}$$

Осуществим замену $x = \frac{a}{8}$, $y = \frac{b}{8}$. Тогда в силу однородности первое уравнение не изменится, а второе превратится в $x + y = 1$.

Заметим, что

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 1 - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = 1 - 3xy$$

$$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = (1-2xy)^2 - 2x^2y^2 = 1 - 4xy + 2x^2y^2$$

и положим, что $xy = t$, тогда из первого следует, что

$$\frac{2-6t}{1-2t} = \frac{1-2t}{1} + \frac{1-4t+2t^2}{1-3t}$$

$$16t^3 - 8t^2 + t = 0$$

$$t(4t-1)^2 = 0$$

Получается, что $t = 0, \frac{1}{4}$. При этом $t = 0$ не удовлетворяет ограничению на a и b. Следовательно, $t = \frac{1}{4} <=> \frac{ab}{64} = \frac{1}{4} <=> ab = 16$, тогда

$$\begin{cases} ab = 16 \\ a + b = 8. \end{cases}$$

Следовательно, $a = b = 4$. Тогда $a^2 + b^2 = 32$.
Ответ: 32.

3. Пусть x и y - положительные числа такие, что $x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 24xy = 1024$. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма $x + y$?

Решение.

$$x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 24xy = 1024$$

Осуществим замену $x + y = a$ и $xy = b$. Тогда

$$a^3 - 3ab + a^3 + 24b = 1024$$

$$3b(8-a) = 1024 - 2a^3$$

$$(8-a)3b = (8-a)(64 + 8a + a^2) \cdot 2$$

Тогда либо $a = 8$, либо $3b = 2a^2 + 16a + 128$. Но если мы вспомним, что $a^2 \geq 4b$, тогда $2a^2 - 16a + 128 - 3b \geq 1\frac{1}{4}a^2 - 16a + 128 > a^2 - 16a + 128 = (a-8)^2 + 64 > 0$. Следовательно, решений нет. Тогда $a = 8$ - единственное решение. $8 = a = x + y$.
Ответ: 8.

4. Дана парабола Π: $y = 4x^2$. Касательные к параболе Π, проведенные через точки K_1 и K_2, пересекают ось соответственно в точках P_1 и P_2. Прямые, перпендикулярные этим касательным, и проходящие соответственно через точки P_1 и P_2, пересекаются в точке Q. Какую **наибольшую** площадь может иметь треугольник QP_1P_2, если расстояние между проекциями точек K_1 и K_2 на ось абсцисс равно 20?

Решение. Воспользуемся уравнением касательной

$$y = 4x^2$$

$$y_x = 8x_0(x - x_0) + 4x_0^2 = 8x_0x - 4x_0^2$$

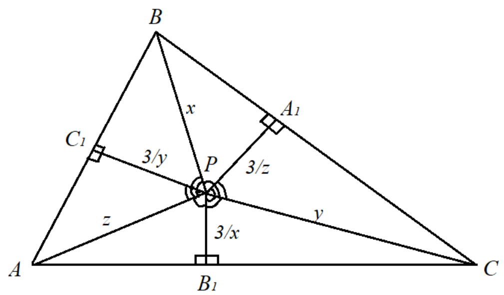
$$y_1 = 8x_1x - 4x_1^2$$

$$y_2 = 8x_2x - 4x_2^2$$

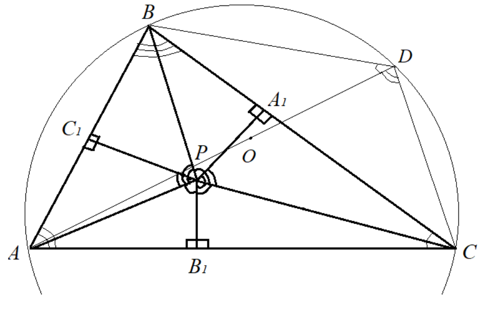
Заметим, что y_1 и y_2 пересекают ось x в точках $(\frac{x_1}{2}; 0)$ и $(\frac{x_2}{2}; 0)$ соответственно. Приравнивая их уравнения, осознаем, что y_1' и y_2' пересекаются в точке $(0; \frac{1}{16})$. Тогда искомый треугольник имеет основание 10 и высоту $\frac{1}{16}$. Отсюда его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125$.
Ответ: 0,3125.

5. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка P так, что для нее произведение расстояния до вершины на расстояние до стороны треугольника, противоположной этой вершине, одинаково для каждой вершины и равно 3. Окружность с диаметром AD проходит через вершины B и C. Известно, что $DB = 7$. Найдите длину отрезка PC.

Решение. Примем, что $BP = x$, $PC = y$, $AP = z$. Тогда по условию $PB_1 = \frac{3}{x}$, $PC_1 = \frac{3}{y}$, $PA_1 = \frac{3}{z}$.



Заметим, что $\triangle APB_1$ подобен $\triangle BPA_1$,так как $\frac{z}{x} = \frac{3/x}{3/z}$, так как 2 стороны в прямоугольном треугольнике пропорциональны. Следовательно, и 3 сторона будет пропорциональная, поэтому треугольники подобны.
Тогда $\alpha = \angle APB_1 = \angle BPA_1$, аналогично $\angle B_1PC = \angle C_1PB = \beta$ и $\angle APC_1 = \angle A_1PC = \gamma$. Тогда $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$. Следовательно, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ => $\angle APA_1 = 180°$. Тогда точка P лежит на прямой AA_1. Следовательно, AA_1 - высота. Аналогично с остальными. Получается, что P - ортоцентр.



Дополнительно заметим, что по свойству суммы углов четырехугольников $\angle C = \alpha$, $\angle B = \gamma$, $\angle A = \beta$. Из условия следует, что окружность является описанной, тогда $\angle D = 180 - \beta$, то $180 - \beta = \alpha + \gamma$. Следовательно, $\angle BPC = \angle BDC$. При этом, $\angle ACD = \angle ABD = 90°$ (AD - диаметр), $\angle CBD = 90 - \gamma$, $\angle BCD = 90 - \alpha$, при этом $\angle C_1CB = 90 - \gamma$ и $\angle B_1BC = 90 - \alpha$. Следовательно, $\angle PBD =$

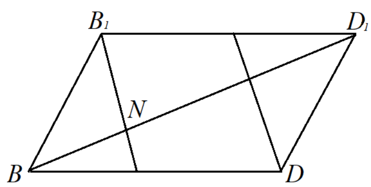
$\angle PCD => PBPC$ - параллелограмм. Тогда $BD = PC = 7$.
Ответ: 7.

6. Дан клетчатый прямоугольник размера 1×55. Сколькими способами его можно разрезать на клетчатые прямоугольники размера 1×3 и 1×4?

Решение. Пусть x - количество домино 1×3 и y - количество домино 1×4. Тогда $3x + 4y = 55$, где $x, y \in N$.
Заметим, что пара $(1; 13)$ является решением. Следовательно, все решения имеют вид $(1 + 4t; 13 - 3t)$. Чтобы решения были натуральными, нужно, чтобы $t \in [0; 4]$.
Получается, что имеется всего 5 пар решений $(1; 13)$, $(5; 10)$, $(9; 7)$, $(13; 4)$, $(17; 1)$. То есть мы получили все возможные варианты для количества доминошек каждого вида. Осталось узнать сколько вариантов дает каждый из способов с учетом перестановок.
Очевидно, что для каждого из вариантов число способов равно C_{14}^1, C_{15}^5, C_{16}^9, C_{17}^{13}, C_{18}^{17} соответственно (по свойству числа сочетаний). Тогда итоговый ответ - $C_{14}^1 + C_{15}^5 + C_{16}^9 + C_{17}^{13} + C_{18}^{17} = 14 + 3003 + 11440 + 2380 + 18 = 16855$.
Ответ: 16855.

7. Какой **наибольший** объем можеи иметь параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого диагонали A_1C_1, C_1D, BD_1, B_1C имеют в некотором порядке длины 6, 14, 19, 25? В ответ запишите квадрат объема.

Решение. Заметим, что $V_{ABCB_1} = \frac{1}{6}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$, тогда для максимизации объема параллелепипеда нам необходим максимальный V_{ABCB_1}. При этом, для любого распределеная значения длины сторон мы однозначно вычисляем S_{AB_1C} по формуле Герона.
Пусть n - точка пересечения BO_1 и AB_1C, тогда $BN + \frac{BD_1}{3}$ (из теоремы Фалеса). При этом, высота из B на AB_1C не превосходит BN. Тогда для любого конкретного значения S_{AB_1C} $V_{ABCB_1} \leq \frac{BD_1}{3} \cdot S_{AB_1C} \cdot \frac{1}{3}$. При этом очевидно, что неравенство может обращаться в равенство. Отсюда следует, что максимальный $V_{AB\ldots D_1} = AD_1 \cdot S_{AB_1C} \cdot \frac{2}{3}$.



Осталось посмотреть все возможные значения $\left(\frac{2}{3}BD_1 \cdot S_{AB_1c}\right)^2$ и следует, что сторонами AB_1C могут быть только числа 6, 14, 19 и 14, 19, 25. Тогда нам остается сравнить 2 числа $\frac{4}{9} \cdot 625 \cdot \frac{1}{16} \cdot 39 \cdot 1 \cdot 27 \cdot 11$ и $\frac{4}{9} \cdot 36 \cdot \frac{1}{16} \cdot 58 \cdot 8 \cdot 30 \cdot 20$. Вычисляет оба значения и понимаем, что второе больше. Оно и пойдет в ответ.
Ответ: 278400.

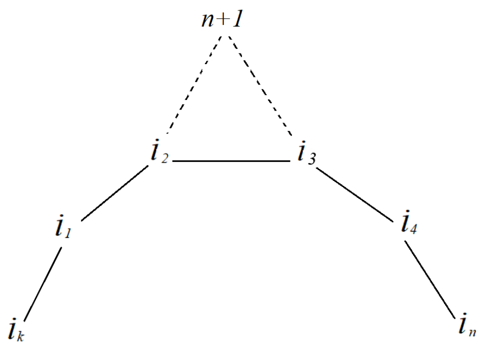
8. Для каждого натурального n, не являющегося точным квадратом, вычисляются все значения переменной x, для которых оба числа $x + \sqrt{n}$ и $x^3 + 964\sqrt{n}$ являются целыми.

Найдите общее количество таких значений x.

Решение. Пусть $x + \sqrt{n} = k$, где $k \in Z$, тогда $x = k - \sqrt{n}$. Следовательно, $x^3 + 964\sqrt{n} = (k - \sqrt{n})^3 + 964\sqrt{n} = k^3 - 3k^2\sqrt{n} + 3nk - \sqrt{n^3} + 964\sqrt{n} = k^3 + 3kn - \sqrt{n}(n + 3k^2 - 964)$, тогда $k^3 + 3kn$ - целое. Тогда для того, чтобы $x^3 + 964\sqrt{n}$ было целым, коэффициент при $\sqrt{n}$ должен обращаться в 0, что равносильно $n + 3k^2 = 964$, и это уравнение необходимо решить при целых k и натуральных n. Тогда заметим, что $|k| \leq 17$ (если $|k| \geq 18$, то n - отрицательное), а так как каждому k из этого промежутка соответствует одно n, то решений у уравнения ровно $17+17+1 = 35$ (не забываем про $k = 0$). Но не стоит забывать про условие, что n - не квадрат. Для исключения этих вариантов переберем k из нашего промежутка и заметим, что при $k = \pm 16; \pm 15; \pm 1$ n будет являться полным квадратом. Следовательно, исключим эти 6 вариантов из найденных решений. В итоге, получим 29 решений уравнения, а поскольку каждому решению соответствует одно значение x, то и подходящих x будет 29.
Ответ: 29.

9. В окружность вписан правильный 95-угольник, в вершинах которого записаны различные натуральные числа. Пару несоседних вершин многоугольника A и B назовем *интересной*, если хотя бы на одной из двух дуг AB во всех вершинах дуги записаны числа, большие чем числа, записанные в вершинах A и B. Какое **наименьшее** количество интересных пар вершин может быть у этого многоугольника?

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть x_n - количество интересных пар для правильного n-угольника. Тогда докажем, что $x_{n+1} \geq x_n + 1$ (для определенности будем заполнять вершины n-угольника числами от 1 до n (на выполнение условия это не повлияет)). Заметим, что любой $(n+1)$-угольник можно получить из n углов добавлением ко второму вершины со значением $n+1$. Положим, что мы «вставим» $n+1$ между i_2 и i_3. Тогда может произойти следующее: интересная пара $(i_k; i_n)$ в n-угольнике в $(n+1)$-угольнике перестает быть интересной, но на ее место придут сразу 2 интересные вершины $(i_k; n+1)$ и $(i_n; n+1)$, то есть общее количество интересных пар в $(n+1)$-угольнике вырастет хотя бы на 1, если элементы i_k и i_n не совпадают с i_2 и i_3 (в этом случае количество интересных вершин не изменится), но так как



мы всегда можем получить новую интересную вершину, соединив $(n+1; n+1)$ и вершины $(n; n+1)$ (которые точно дадут нам хотя бы одну новую вершину, кроме того случая, когда $n+1$ встало между n и $n-1$, то тогда у нас появляется новая интересная вершина $(n; n-1)$), то общее количество вершин в $(n+1)$-угольнике будет хотя бы на i больше, чем в n-угольнике. Тогда $x_{95} \geq x_{94}+1 \geq x_{93}+2 \geq ... \geq x_4+91 \geq 92$ (перебором убеждаемся, что $x_4 = 1$). При этом при расстановке по часовой стрелке от 95 все четные числа подряд от 2 до 94, а против все нечетные числа подряд оценка 92 достигается.

Ответ: 92.

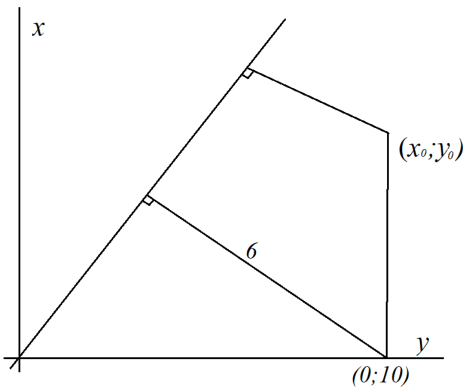
10. Найдите минимум x^2+y^2-4y при условии $|4x-3y|+5\sqrt{x^2+y^2-20y+100}=30$.

Решение. Для начала перепишем выражение в виде:

$$\frac{|4x-3y|}{5}+\sqrt{x^2+(y-10)^2}=6.$$

Первое слагаемое можно воспринимать как расстояние от точки $(x;y)$ до прямой $4x=3y$, а второе как расстояние от $(x;y)$ до точки $(0;10)$, то есть данному равенству удовлетворяют все точки $(x;y)$ такие, что суммарное расстояние от нее до $(0;10)$ и до прямой $4x=3y$ равно 6. Следовательно, по неравенству между длинной ломаной и отрезка, соединяющего концы ломаной, следует, что все $(x;y)$, удовлетворяющие равенству, лежат на перпендикуляре, проведенном из $(0;10)$ на прямую $4x=3y$. Этот отрезок можно задать как прямую $y=-\frac{3}{4}x+10$ при $x \in [0;4,8]$.

Теперь положим, что $x^2+y^2-4y=a <=> x^2+(y-2)^2=a+4$. Тогда нам осталось найти минимальные значения параметра a, при котором окружность и прямая имеют общую точку. Посмотрим когда окружность касается прямой $y=-\frac{3}{4}x+10$. Для этого расстояние от центра $(0;2)$ до прямой должно равняться радиусу. Вычислим расстояние от $(0;2)$ до прямой $y=-\frac{3}{4}x+10$. Оно равно 6,4 (просто пользуемся формулой расстояния от точки до прямой).



Тогда для касания $a+4=6,5^2$. Следовательно $a=36,96$.

Дополнительно можем заметить, что касание при данном a происходит в точке $(\frac{96}{25};\frac{178}{25})$ и так как $0 \leq \frac{96}{25} \leq 4,8$, то мы коснемся прямой там, где существует наш отрезок. Следовательно, $a=36,96$.

Ответ: 36,96.