1. Общая характеристика заданий

Задание олимпиады Росатом по математике составляется так, чтобы наиболее точно проранжировать участников олимпиады. Задачи олимпиадного задания значительно различаются по сложности. Но и простые и сложные задачи обязательно содержат элементы новизны и оригинальности, требуют для своего решения творческого применения математических теорем и их глубокого понимания. Такая форма задания позволяет, с одной стороны, наиболее точно проранжировать участников олимпиады и выявить наиболее талантливых и способных из них, с другой, «не оттолкнуть» от освоения математики и физики недостаточно подготовленных участников и мотивировать их к дальнейшей самостоятельной работе.

Задачи охватывают все разделы школьной программы и, как правило, носят комплексный характер, требующий объединения различных математических методов. Тем не менее, для решения олимпиадного задания совершенно достаточно знания школьной программы по физике или математике и не требуются какие-то специальные знания и навыки.

Поскольку и отборочный и заключительный тур олимпиады проходят на нескольких региональных площадках в разные сроки, методическая комиссия в рамках единого методического подхода готовит несколько комплектов заданий для отборочного тура и несколько комплектов для заключительного одного уровня сложности.

2. 2013-2014 учебный год

2.1 Олимпиада им. И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

Ответы и решения

Задача 1

Разделим числитель на знаменатель с остатком: $x^3+3x^2+5=(x+1)(x^2+2x-3)+x+8$

$\frac{x^3+3x^2+5}{x^2+2x-3}=x+1+\frac{x+8}{x^2+2x-3}$. Если $\left|\frac{x+8}{x^2+2x-3}\right|<1$ и $x\neq-8$, то выражение не может быть целым при целых x. Решения неравенства $x\in\left(-\infty;-\frac{1+3\sqrt{5}}{2};\right)\cup\left(\frac{3\sqrt{5}-1}{2};+\infty\right)$.

Целых чисел x, не вошедших в это множество, конечное число их надо проверить.

$f(x)=x+8,\quad g(x)=x^2+2x-3$, $x\neq-3;1$

$x=-2\rightarrow\frac{f(-2)}{g(-2)}=-2\in Z$

$x=-1\rightarrow\frac{f(-1)}{g(-1)}=-\frac{7}{4}\notin Z$

$$x=0 \to \frac{f(0)}{g(0)} = -\frac{8}{3} \notin Z$$

$$x=2 \to \frac{f(2)}{g(2)} = 2 \in Z$$

$$x=-8 \to \frac{f(-8)}{g(-8)} = 0 \in Z$$

Задача 2

Решение. Замена $t=\cos 2x$

$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = t$

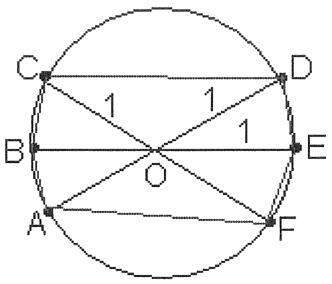
$\cos^6 x - \sin^6 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x) =$

$= t\left(\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)^2 + \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) = t\left(t^2 + \frac{3}{4}(1-t^2)\right) = \frac{1}{4}\left(t^3+3t\right),$

$4\left(t^3+3t\right) - 19t + 3 = 0 \to 4t^3 - 7t + 3 = 0 \to (t-1)(2t-1)(2t+3) = 0$

$\cos 2x = 1 \to x = \pi k, \quad \cos 2x = \frac{1}{2} \to x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$

На рис. изображены соответствующие точки на единичном круге:



$$S_{ABCDEF} = 4S_{ODE} + 2S_{OCD} = 4\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} + 2\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Задача 3

Решение. $S-$ площадь луга (га), $p-$ начальное количество корма на 1 га, $a-$ прирост массы травы за 1 день на 1 га, b – потребление травы 1 коровой за 1 день, t – время (день), $P(t)$ – зависимость массы травы от времени, k – количество коров на лугу.

Основное соотношение: $P(t) = pS + aSt - kbt$.

По условию: $\begin{cases} pS_1 + aS_1t_1 = k_1bt_1 \\ pS_2 + aS_2t_2 = k_2bt_2 \end{cases} \to$

$$a = \frac{t_1k_1S_2 - t_2k_2S_1}{t_1t_2\left(k_2S_1 - k_1S_2\right)}p \qquad b = \frac{S_1S_2(t_1-t_2)}{t_1t_2\left(k_2S_1 - k_1S_2\right)}p$$

Из соотношения: $pA + aAT - kbT = 0$ находим $k = \frac{A}{b}\left(a + \frac{p}{T}\right)$. Подставляя найденные значения a и b, получим

$$k = \frac{A}{T}\cdot\frac{t_1t_2\left(k_2S_1 - k_1S_2\right) + T\cdot(t_1k_1S_2 - t_2k_2S_1)}{S_1S_2(t_1-t_2)}$$

Вариант 1. $S_1 = 100,\ k_1 = 32, t_1 = 180,\ S_2 = 50,\ k_2 = 20, t_2 = 108, A = 30,$
$T = 36$

Ответ: 24 коровы

Задача 4

Решение. . $x = \dfrac{p}{q}$, варианты $p = \pm 1; \pm 5,\ q = 1; 2; 4$

$4p^2 + apq - 5q^2 = 0 \rightarrow a = \dfrac{5q}{p} - 4\dfrac{p}{q}$

Случай 1. $q = 1 \rightarrow a = \dfrac{5}{p} - 4p \rightarrow a = \pm 1; \pm 8; \pm 19$

Случай 2. $q = 2 \rightarrow a = \dfrac{10}{p} - 2p \rightarrow a = \pm 8$

Случай 3. $q = 4 \rightarrow b = \dfrac{20}{p} - p \rightarrow b = \pm 1; \pm 19$

Задача 5.

Решение.

$y \in E_y \rightarrow \exists x \neq 1$, для которого $y(x-1) = x^2 - px + 3$, т.е. уравнение
$x^2 - (p+y)x + y + 3 = 0$ имеет решение $x \neq 1$. $D = (p+y)^2 - 4(y+3) \geq 0 \rightarrow$
$g(y) = y^2 + 2(p-2)y + p^2 - 12 \geq 0$ для всех $y \in [1; 2]$. Если $D = 0$, то
единственное решение $x = \dfrac{p+y}{2} \neq 1 \rightarrow p \neq 2 - y \rightarrow y^2 - 2y^2 + (2-y)^2 - 12 \neq 0 \rightarrow$
$y \neq -2 \notin [1; 2]$

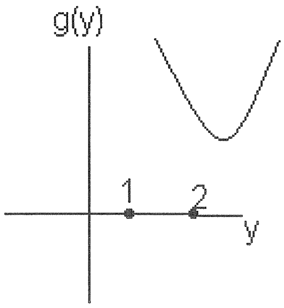


рис 1

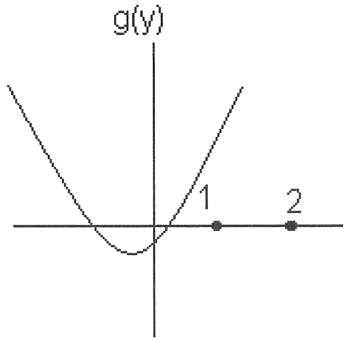


рис 2

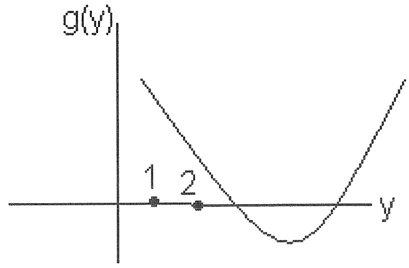


рис 3

Случай 1, рис 1. $D_1/4=(p-2)^2-p^2+12=-4p+16<0\to p>4$ и

$g(y)>0\ \forall y$. При $D_1=0\leftrightarrow p=4\to g(y)=(y+2)^2>0\ \forall y\in[1;2]$

Случай 2, рис 2. $D_1>0\to p<4$, оба корня левее $1\to\begin{cases}p<4\\ g(1)=p^2-2p-15>0\\ y_b=2-p<1\end{cases}$

$\to\begin{cases}1<p<4\\ p\in(-\infty;-5)\cup(3;+\infty)\end{cases}\to p\in(3;4)$. При $p=3$ $g(y)\ge 0$ для $y\in[1;2]$.

Случай 3, рис 3. Оба корня правее $2.\to\begin{cases}p<4\\ g(2)=p^2+4p-16>0\to\\ y_b=2-p>2\end{cases}$

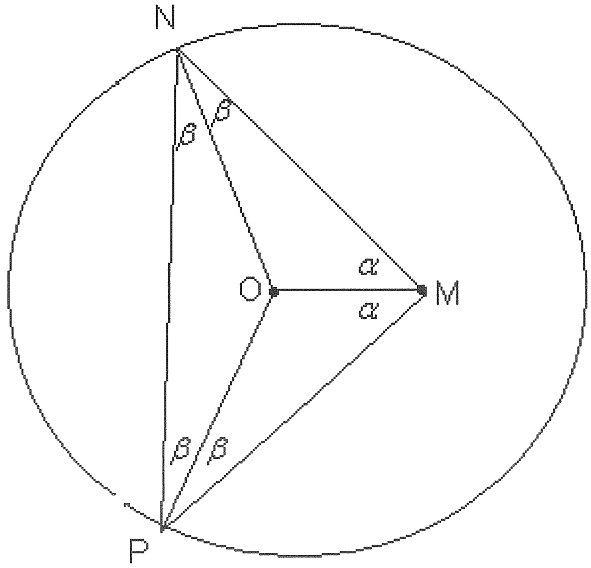
$\begin{cases}p<0\\ p\in(-\infty;-2-2\sqrt{5})\cup(-2+2\sqrt{5};+\infty)\end{cases}\to p\in(-\infty;-2-2\sqrt{5})$

При $p=-2-2\sqrt{5}$ $g(y)\ge 0$ для $y\in[1;2]$.

Ответ: $p\in\left(-\infty;-2-2\sqrt{5}\right]\cup[3;+\infty)$

Задача 6

Решение. На рис. отражен траектория шара, направленного в точку N.



Пусть шар направлен в точку N, под углом α к лучу OM.

$\measuredangle MNO=\beta$. Тогда по закону бильярда $\measuredangle ONP=\beta$.

$\triangle ONP$ равнобедренный $\to\measuredangle NPO=\beta$ и $\measuredangle OPM=\beta$.

Связь между α и β: $2\alpha+4\beta=\pi\to\alpha=\frac{\pi}{2}-2\beta$

По теореме синусов: $\frac{R}{\sin\alpha}=\frac{d}{\sin\beta}\to R\sin\beta=d\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)=d\cos 2\beta$

$d(1-2\sin^2\beta)=R\sin\beta\to 2d\sin^2\beta+R\sin\beta-d=0$

В варианте $R=2\sqrt{2},\ d=1\to 2\sin^2\beta+2\sqrt{2}\sin\beta-1=0$

$\sin\beta=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

2.3. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

Ответы и решения

Задача 1 Ответ 345

Решение варианта 1. $a_1 = \log_{1+\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = 2$

$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = 2(2+d) + 2(2+2d) + (2+d)(2+2d) = 2(d^2 + 6d + 6)$

Решение уравнения $x = 66 \to d^2 + 6d - 27 = 0 \to \left[\begin{array}{l} d = 3 \\ d = -9 \end{array}\right. \to$

возрастающая $\to d = 3$, $a_{15} = 2 + 14 \cdot 3 = 44$, $S_{15} = \dfrac{2+44}{2} \cdot 15 = 345$

Задача 2 Ответ: $a = \pi n, \quad n = 2;3;...7$

Решение.

Случай 1. $\begin{cases} x+y=a \\ \sin x=\sin y \end{cases} \to \begin{cases} x+y=a \\ \left[\begin{array}{l} a)\ \ y=x+2\pi k \\ b)\ y=\pi-x+2\pi m \end{array}\right. \end{cases}$

Бесконечное число решений может дать только пункт $b)$ при $a=\pi+2\pi m$
при условии, что прямая $x+y=a$ пересекает прямоугольник:
вершины $(5\pi;3\pi)$ и $(2\pi;-\pi)$ лежат по разные стороны от прямой

$x+y-\pi-2\pi m=0 \leftrightarrow \begin{cases} 7\pi-2\pi m>0 \\ -2\pi m<0 \end{cases} \to m=1;2;3 \to a=3\pi;5\pi;7\pi$

Случай 2. $\begin{cases} x+y=a \\ \sin x=-\sin y \end{cases} \to \begin{cases} x+y=a \\ \left[\begin{array}{l} a)\ \ y=-x+2\pi k \\ b)\ y=x-\pi+2\pi m \end{array}\right. \end{cases}$

Бесконечное число решений может дать только пункт $a)$ при $a=2\pi k$
при условии, что прямая $x+y=a$ пересекает прямоугольник:
вершины $(5\pi;3\pi)$ и $(2\pi;-\pi)$ лежат по разные стороны от прямой

$x+y-2\pi k=0 \leftrightarrow \begin{cases} 8\pi-2\pi k>0 \\ \pi-2\pi k<0 \end{cases} \to k=1;2;3 \to a=2\pi;4\pi;6\pi$

Объединяя решения, получим $a=\pi n,\ n=2;3;\ldots,7$

Задача 3 Ответ: 1) $(0;t;1),(t;t;1),\ t\in Z,\ (\pm1;\pm3;-1),\ (\pm2;\pm3;-1)$

2) $(0;3;1),\ (2;3;-1)$

Решение

$(x^2+1)z=xyz+1 \to$ левая часть делится на $z \to$ правая часть делится на z только при $z=\pm1$

Случай $z=1. \to x^2+1-xy+1 \to \left[\begin{array}{l} x=0,\ y=t,\ t\in Z \\ x=t,\ y=t,\ t\in Z \end{array}\right.$

Случай $z=-1 \to -x^2-1=-xy+1 \to xy=x^2+2 \to y=x+\dfrac{2}{x}$

Целочисленность $\to x=\pm1;\pm2$

Решения (1;3;−1); (-1;−3;−1); (2;3;−1); (-2;−3;−1)

Второму условию задачи удовлетворяют тройки:

(0;3;1), (2;3;−1).

Задача 4 Ответ: $x=3,\ y=5$ или $x=5,\ y=3$

Решение.

Случай 1. $x\neq y, x\neq 2, y\neq 2$

Сумма делителей числа a, не содержащих множителем числа x и y равна

$S_1=1+2+2^2+\ldots+2^6=2^7-1=127$

Сумма делителей числа a, содержащих множителем число x, но не содержащее y, равна $S_2=xS_1$, сумма делителей числа a, содержащих множителем число y, но не содержащих x, равна $S_3=yS_1$, сумма делителей числа a, содержащих множителем числа x и y, $S_4=xyS_1$. Общая сумма делителей числа a равна

$S=(1+x+y+xy)S_1=127(1+x+y+xy)$. По условию

$$\frac{S}{a}=\frac{127}{40}\leftrightarrow 40(1+x+y+xy)=2^6xy\to 3xy=5(x+y+1)$$

Левая часть равенства делится на 5, т.е. либо x, либо y делится на 5. С учетом, простоты чисел, либо $x=5$, либо $y=5$. Из $x=5\to y=3$ и наоборот.

Случай 2.

$x=y\neq 2$

Сумма делителей $S=S_1(1+x+x^2)$, $a=2^6x^2$,

$$127*(1+x+x^2)=\frac{127}{40}*2^6x^2\to 3x^2-5x-5=0,$$ целых решений нет.

Случай 3.

$x=2, x\neq y,\ (y=2, x\neq y)$

$a=2^7*y,\ S_1=2^8-1=255,\quad S=S_1*(1+y)$

$$255*(1+y)=\frac{127}{40}*2^7y$$ (целых решений нет)

Случай 4.

$x=2, y=2,\quad S=S_1=2^9-1,\ a=2^8,$

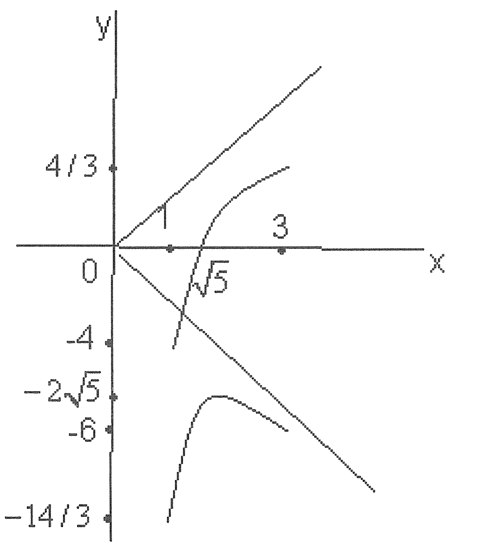
$$S\neq\frac{127}{40}a$$

Задача 5 Ответ: $a\in\left[-\frac{14}{3};-6\right)\cup\left[-4;\frac{4}{3}\right]\cup\left\{-2\sqrt{5}\right\}$

Решение варианта 1.

$$\left[\begin{array}{l}ax+5=x^2\\ ax+5=-x^2\end{array}\right.\to a_1=\frac{x^2-5}{x},\quad a_2=-\frac{x^2+5}{x}$$

На рис изображены графики этих функций на отрезке $[1;3]$:

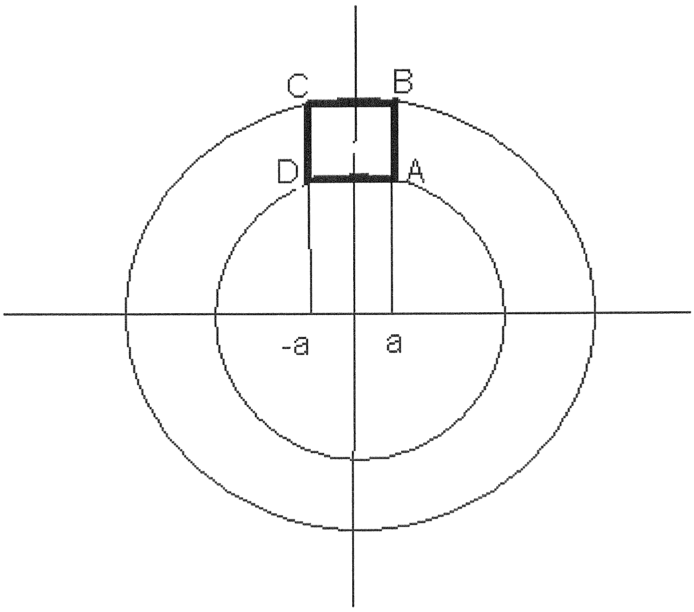


Функция $a_1(x)$ монотонно растет на отрезке $[1;3]$ и принимает значения на отрезке $\left[-4;\frac{4}{3}\right]$. Функция $a_2(x)$ возрастает на отрезке $\left[1;\sqrt{5}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\sqrt{5};3\right]$.

В точке $x=\sqrt{5}$ функция имеет максимум, равный $-2\sqrt{5}<-4$. Каждой точке графиков с ординатой a соответствуют абсциссы – решения уравнения. Поэтому решение единственно, если $a\in\left[-\frac{14}{3};-6\right)\cup\left[-4;\frac{4}{3}\right]\cup\left\{-2\sqrt{5}\right\}$.

Задача 6 Ответ: $s=\frac{25\pm\sqrt{527}}{2}$

Решение: (вариант 1)



1 случай $A(a;\sqrt{9-a^2})$

Условие квадрата: $AB=2a\to\ \sqrt{16-a^2}-\sqrt{9-a^2}=2a$

Решение иррационального уравнения: $u=\sqrt{16-a^2},\quad v=\sqrt{9-a^2}\ \to\begin{cases}u-v=2a\\u^2-v^2=7\end{cases}$

$$\begin{cases}u-v=2a\\u+v=\dfrac{7}{2a}\end{cases}\quad\begin{cases}u=\dfrac{4a^2+7}{4a}\\v=\dfrac{7-4a^2}{4a}>0\end{cases}\ \to\quad a^2<\frac{7}{4}$$ - условие разрешимости системы.

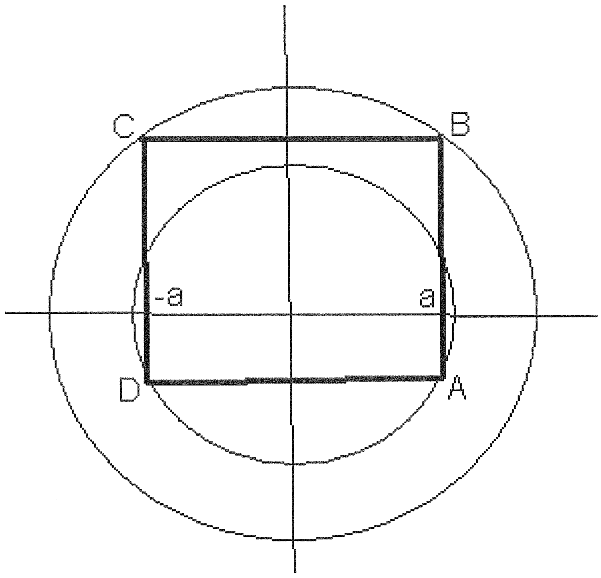
$$\sqrt{16-a^2}=\frac{4a^2+7}{4a}\to\ 16a^2\left(16-a^2\right)=16a^4++56a^2+49\to 32a^4-200a^2+49=0$$

Первый корень $a^2=\frac{25-\sqrt{527}}{8}\approx 0{,}25$ удовлетворяет условию разрешимости, второй

$a^2=\frac{25+\sqrt{527}}{8}\approx 5{,}99\ 0$ - нет.

$s=4a^2=\frac{25-\sqrt{527}}{2}\approx 1{,}02$

2 случай $A(a;-\sqrt{9-a^2})$



Условие квадрата: $AB = 2a \to \sqrt{16 - a^2} + \sqrt{9 - a^2} = 2a$

Решение иррационального уравнения: $u = \sqrt{16 - a^2}, \quad v = \sqrt{9 - a^2} \to \begin{cases} u + v = 2a \\ u^2 - v^2 = 7 \end{cases} \to$

$$\begin{cases} u + v = 2a \\ u - v = \dfrac{7}{2a} \end{cases} \quad \begin{cases} u = \dfrac{4a^2 + 7}{4a} \\ v = \dfrac{4a^2 - 7}{4a} > 0 \end{cases} \to \quad a^2 > \frac{7}{4}$$ - условие разрешимости системы.

$$\sqrt{16 - a^2} = \frac{4a^2 + 7}{4a} \to 32a^4 - 200a^2 + 49 = 0 \to$$

Второй корень $a^2 = \dfrac{25 + \sqrt{527}}{8} \approx 5{,}99$ удовлетворяет условию разрешимости, первый

$a^2 = \dfrac{25 - \sqrt{527}}{8} \approx 0{,}25$ - нет.

$$s = 4a^2 = \frac{25 + \sqrt{527}}{2} \approx 23{,}98$$

2.4. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: $b_{55} = 2^{31}$

Решение.

$$b_n : q + b_n + b_n q = \frac{7}{2} b_n \to \frac{1}{q} + 1 + q = \frac{7}{2} \to q = 2(\text{ возрастающая})$$

$$b_{55} = b_{24} q^{31} = 2^{31}$$

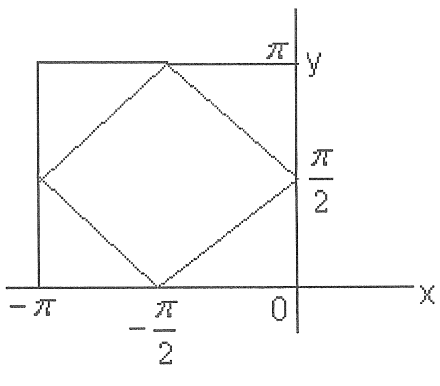
Задача 2 Ответ: 7 точек.

$$\left(-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right);\left(-\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right);\left(0;\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right);\left(0;\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right);$$

$$\left(-\pi;\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right);\left(-\pi;\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right);\left(\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{2\sqrt{3}};\frac{\pi}{2}\right)$$

Решение.

ОДЗ внутри квадрата, кроме точек выделенных на рис. красным цветом:



Вычитаем и складываем уравнения: $\begin{cases} \dfrac{\sin 2y}{\cos(x+y)\cos(x-y)} = 2\cos y \\ \dfrac{\sin 2x}{\cos(x+y)\cos(x-y)} = -2\sqrt{3}\sin x \end{cases}$.

Случай А. $\cos y = 0 \to y = \dfrac{\pi}{2} \to \dfrac{2\sin x\cos x}{-\sin^2 x} = -2\sqrt{3}\sin x$

$\sin x \neq 0$ (ОДЗ) $\to \cos x = \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{3}(1-\cos^2 x) \to \sqrt{3}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{3} = 0$

$\cos x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2\sqrt{3}} \approx -1,32; 0,75$ т.е. $\left(\arccos\dfrac{\sqrt{13}-1}{2\sqrt{3}}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ – решение

Случай В. $sinx = 0 \to x = 0,\ x = -\pi$

$\dfrac{2\sin y\cos y}{\cos^2 y} = 2\cos y \to \cos y \neq 0 \to siny = \cos^2 y \to \sin^2 y + \sin y - 1 = 0$

$\sin y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \to \left(0; \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right); \left(-\pi; \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$\left(0; \pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right); \left(-\pi; \pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; еще четыре решения.

Случай С. $\sin x \neq 0,\ \cos y \neq 0 \to \begin{cases} \sin y = \cos(x+y)\cos(x-y) \\ \cos x = -\sqrt{3}\cos(x+y)\cos(x-y) \end{cases} \to$

$\begin{cases} -\sqrt{3}\sin y = \cos x \\ 2\sin y = \cos 2y + \cos 2x \end{cases} \to \cos 2x = 6\sin^2 y - 1 \to 2\sin y = \cos 2y + 6\sin^2 x - 1$

$2\sin y = 4\sin^2 y \to \sin y \neq 0 \to \sin y = \dfrac{1}{2}; \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\left(-\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right); \left(-\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right)$ – еще два решения.

Задача 3 Ответ: $\begin{cases} x = 100 - 2k \\ y = 2k \end{cases},\ 1 \le k \le 50,\ k \in Z$

Решение.

Число 2^{2x+1} целое при $2x+1 \ge 0 \to x = 0,1,2...$, Число 2^{3y-2} целое при $3y-2 \ge 0 \to y = 1,2...$

Число $2^{2x+1} = (3-1)^{2x+1} = 3u-1,\ u \in Z, u \ge 1$ при любых $x \ge 0$ Для того, чтобы число $2^{2x+1} + 2^{3y-2}$ делилось на 3 необходимо, чтобы $2^{3y-2} = (3-1)^{3y-2} = 3v+1$, $v \in Z, v \ge 0$. Последнее бывает, если $3y - 2 = 2m$ – четное число.

Решая это уравнение в целых числах, получим $\begin{cases} y = 2k \\ m - 3k - 1 \end{cases}, k = 1,2,...$

Откуда $\begin{cases} x = 100 - 2k \\ y = 2k \end{cases}, k = 1,2,...,50$

Задача 4 Ответ: 15

Решение.

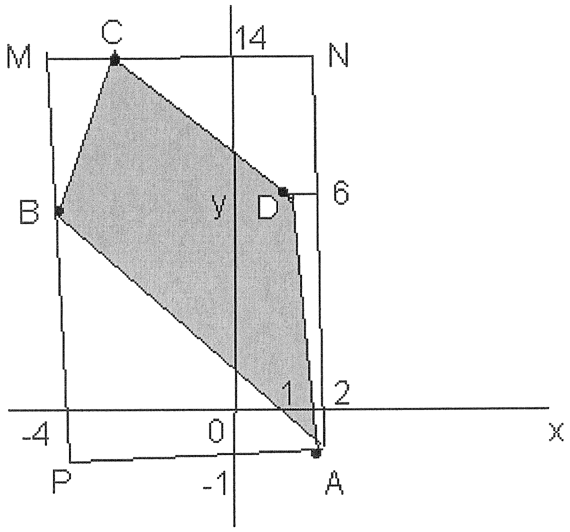
Замена $\begin{cases} u = x^2 + 2x \\ v = 2x + y \end{cases} \to \begin{cases} uv = 24 \\ u + v = 11 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} u = 8 \\ v = 3 \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} u = 3 \\ v = 8 \end{array}\right.$

Случай 1. $\begin{cases} x^2 + 2x = 8 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \to y_1 = -1 \\ x_2 = -4 \to y_2 = 11 \end{array}\right.$

Координаты вершин $A(2;-1)$, $B(-4;11)$

Случай 1. $\begin{cases} x^2 + 2x = 3 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} x_3 = 1 \to y_1 = 6 \\ x_4 = -3 \to y_4 = 14 \end{array}\right.$

Координаты вершин $D(1;6)$, $C(-3;14)$



Прямоугольник $ANMP$, описанный около многоугольника, имеет площадь 80.
Площадь кусков (треугольники, трапеция) лежащих вне многоугольника и внутри прямоугольника $ANMP$ равна 65. Площадь многоугольника $ABCD$ равна 80-65=15.

Задача 5 Ответ: $a = \dfrac{4k+2}{10}$, $k \in Z$

Решение.

Замена: $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - 16} \\ v = \sqrt{x^2 - 9} \end{cases} \to x^2 = u^2 + 16, x^2 = v^2 + 9 \to$

$$\begin{cases} u^2 + 16 = 3u + 4v \to u(u-3) = 4(v-4) \\ (u-3)(u+3) = (v-4)(v+4) \end{cases}$$

Случай 1. $\begin{cases} u = 3 \\ v = 4 \end{cases} \to x^2 = 25 \to x = \pm 5$

Случай 2. $\begin{cases} u \neq 3, u \neq 0 \\ v \neq 4 \end{cases} \to \dfrac{u+3}{u} = \dfrac{v+4}{4} \to uv = 12 \to v = \dfrac{12}{u}$

$$\begin{cases} v^2 - u^2 = 7 \\ v = \dfrac{12}{u} \end{cases} \to u^4 + 7u^2 - 144 = 0 \to \left[\begin{array}{l} u^2 = -16 \\ u^2 = 9 \end{array}\right. \to u = 3 \quad \varnothing$$

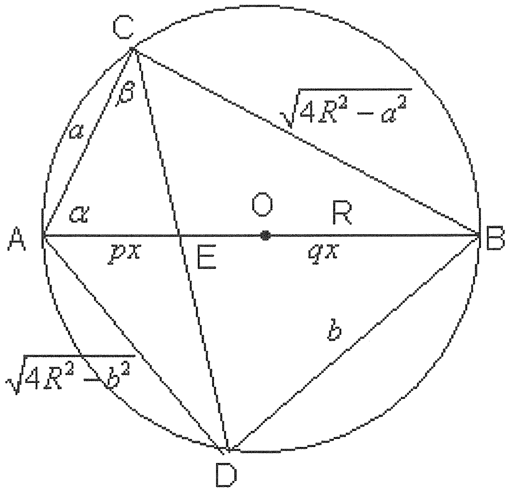
$$x=5\rightarrow \sin(5\pi a)-\cos(5\pi a)=1\rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=\dfrac{4m_1+1}{10} \\ a_2=\dfrac{4m_2+2}{10}\end{array}\right.$$

$$x=-5\rightarrow \left[\begin{array}{l} a_3=-\dfrac{4m_3+1}{10} \\ a_4=-\dfrac{4m_4+2}{10}\end{array}\right.$$

Пересечение серий происходит по серии $a=a_2=a_4=\dfrac{4m+2}{10},\ m\in Z$

Задача 6 Ответ: $R^2=\dfrac{a^2b^2\left(q^2-p^2\right)}{4(a^2q^2-b^2q^2)}=\dfrac{64}{10}\rightarrow R=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

Решение.



$<CAB=<CDB=\alpha$, $<ACD=<ABD=\beta$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$, $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2R}$,

$\triangle ACE\sim\triangle DBT$, коэф. подобия $k=\dfrac{a}{b}$

$\dfrac{AE}{\sin\beta}=2R_1, \dfrac{EB}{\sin\alpha}=2R_2\rightarrow\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{a}{b},$

$AE:EB=\dfrac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}=\dfrac{a\sqrt{4R^2-b^2}}{b\sqrt{4R^2-a^2}}=\dfrac{p}{q}\rightarrow 4R^2=\dfrac{a^2b^2\left(q^2-p^2\right)}{a^2q^2-b^2p^2}$

В варианте: $p=1, q=3, a=2,\ b=4\rightarrow R=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

2.4. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

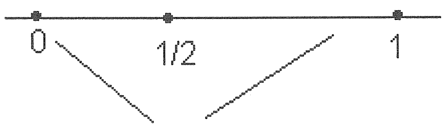
Ответы и решения

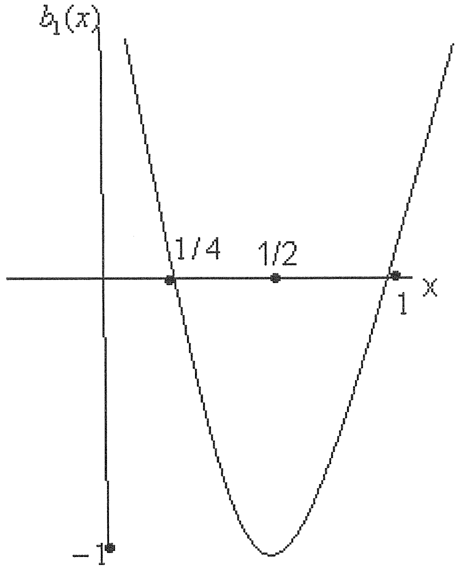
Задача 1 Ответ: $b_1 = -1$ (при $x = 1/2$)

Решение.

$$f(x) = \frac{1-4x}{x} = \frac{b_1(x)}{1-x} \to b_1(x) = \frac{(4x-1)(x-1)}{x} = \frac{4x^2-5x+1}{x},\ \ 0 < x < 1$$

$$b_1'(x) = \frac{4x^2-1}{x^2} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}$$





Минимальное значение $b_1(x)$ достигается при $x = 1/2$ и равно -1.

Задача 2 Ответ: $E_f = \{0; 0,75\}$

Решение варианта 1.

Преобразование: $3\sin x - 4\sin^3 x + 2\cos^3 x = 2\cos x$

$\cos x \neq 0$, Делим на $\cos^3 x$ правую и левую части равенства:

$$3tgx(1+tg^2x) - 4tg^3x + 2 = 2(1+tg^2x) \to tg^3x + 2tg^2x - 3tgx = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} tgx = 0 \\ tg^2x + 2tgx - 3 = 0 \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{c} tgx = 0 \\ tgx = 1 \\ tgx = -3 \end{array}\right.$$

$tg2x = \dfrac{2tgx}{1-tg^2x} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,75 \end{array}\right.$ Для решений, при которых $tgx = 1$, значения $tg2x$ не определены.

Задача 3 Ответ: $L_{\min} = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$ Решения системы $\left\{\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \\ z = \pm\sqrt{\dfrac{1}{6}} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$

Решение.

$$\left\{\begin{array}{l} y + z = axyz, \\ z + x = bxyz, \\ x + y = cxyz \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{c} y - x = (a-b)xyz \\ x + y = cxyz \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} 2x = (b+c-a)xyz \\ 2y = (a+c-b)xyz \end{array}\right.$$

$\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{a+c-b}{b+c-a}x \\ z = \dfrac{a+b-c}{b+c-a}x \end{array}\right. \to$ подстановка в первое уравнение:

$$\frac{2a}{b+c-a}x = a\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(b+c-a)^2}x^3 \to x^2 = \frac{2(b+c-a)}{(a+c-b)(a+b-c)}$$

Аналогично, $y^2 = \dfrac{2(a+c-b)}{(a+b-c)(b+c-a)}$, $z^2 = \dfrac{2(a+b-c)}{(b+c-a)(a+c-b)}$

$L_{\min} = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$a=3,\, b=4,\, c=5 \rightarrow b+c-a=6,\; a+c-b=4,\, a+b-c=2$$

В варианте: $x^2 = \dfrac{2\cdot 6}{2\cdot 4} = \dfrac{3}{2}$, $y^2 = \dfrac{2\cdot 4}{6\cdot 2} = \dfrac{2}{3}$, $z^2 = \dfrac{2\cdot 2}{4\cdot 6} = \dfrac{1}{6}$

$$L_{\min} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

Задача 4 Ответ:

$x = 2^n \cdot 7^m$, где

1)$n=6, m=37$; 2) $n=7, m=21$; 3) $n=9, m=13$; 4) $n=13, m=9$

5) $n=21, m=7$; 6) $n=37, m=6$

Решение.

$x = 2^n \cdot 7^m$, $m \ge 0, n \ge 0, m+n \ge 1, m,n \in Z$

Число делителей x равно $(n+1)(m+1)$, число делителей $x^3 = 2^{3n} \cdot 7^{3m}$ равно $(3n+1)(3m+1)$. Условие задачи: $3n+3m+9mn+1 = 8\left(m+n+nm+1\right) \rightarrow$

$mn = 5(m+n)+7 \rightarrow m = \dfrac{5n+7}{n-5} = 5 + \dfrac{32}{n-5} \ge 0 \rightarrow n \ge 6$ или $n = \dfrac{5m+7}{m-5} \ge 0$ $m \ge 6$

Условие целочисленности: $n-5 = 1; 2; 4; 8; 16; 32$

Условие положительности:1

1)$n=6, m=37$; 2) $n=7, m=21$; 3) $n=9, m=13$; 4) $n=13, m=9$

5) $n=21, m=7$; 6) $n=37, m=6$

Задача 5 Ответ: $a = \pm 1, \dfrac{8t+1}{2t-1}, \dfrac{4t+3}{2t-1}$ при $t = 1,2,3,\ldots$

Решени.

Целые решения первого уравнения системы имеют вид: $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t-1 \end{cases}, t \in Z$.

Подставляем их во второе уравнение системы:

$\left|3t+1-\left|3t+1-a(2t-1)\right|\right| = 2t-1 \rightarrow t \ge 1$

$$\left[\begin{array}{l} \left|3t+1-a(2t-1)\right| = t+2 \rightarrow \left[\begin{array}{l} a(2t-1) = 4t+3 \rightarrow a = \dfrac{4t+3}{2t-1} \\ a(2t-1) = 1-2t \rightarrow a = -1 \end{array}\right. \\ \left|3t+1-a(2t-1)\right| = 5t \rightarrow \left[\begin{array}{l} a(2t-1) = 8t+1 \rightarrow a = \dfrac{8t+1}{2t-1} \\ a(2t-1) = 2t-1 \rightarrow a = 1 \end{array}\right. \end{array}\right., t = 1,2,3,\ldots$$

Задача 6 Ответ: $x = \dfrac{\sqrt{70}-\sqrt{26}}{\sqrt{3}}, y = \dfrac{\sqrt{70}+\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$

2.5. Олимпиада имени академика И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады Росатом), 11 класс

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: 1) $x=1,\ b=\sqrt[3]{16}$ 2) $x=3,\ b=16$

Решение

Условие арифметической прогрессии:

$$\sqrt{4x-3}+4=x+4\rightarrow\sqrt{4x-3}=x\rightarrow\begin{cases}x\geq 0,75\\4x-3=x^2\rightarrow x^2-4x+3=0\end{cases}\rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$$

Случай 1.

$x_1 = 1 \to a_1 = 1,\ a_2 = \frac{5}{2},\ a_3 = 4 \to q = b^{a_2 - a_1} = b^{3/2} = 4$

$b_1 = \sqrt[3]{16}$

Случай 2.

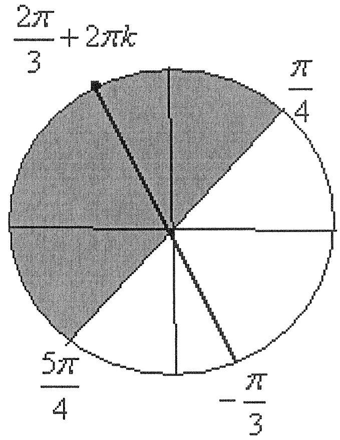
$x_2 = 3 \to a_1 = 3,\ a_2 = \frac{7}{2},\ a_3 = 4 \to q = b^{a_2 - a_1} = b^{1/2} = 4$

$b_2 = 16$

Задача 2 Ответ: 1) $\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z \end{array}\right.$ 2) пять решений, $k = -2; -1; 0, \quad m = -1; 0$

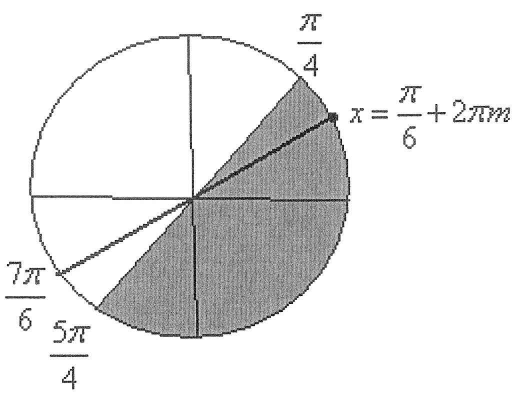
Решение

1. $\begin{cases} \sin x \ge \cos x \\ f(x) = \sin x \end{cases} \to \left(1 - \sqrt{3}\right)\sin x = \sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 1\right)\cos x \to tgx = -\sqrt{3}$



Серия $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

2. $\begin{cases} \cos x \ge \sin x \\ f(x) = \cos x \end{cases} \to \left(1 + \sqrt{3}\right)\cos x = \sqrt{3}\left(1 + \sqrt{3}\right)\sin x \to tgx = \frac{1}{\sqrt{3}} \to x = \frac{\pi}{6} + \pi m$



Серия $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z$

3. Отбор решений.

$-\frac{7\pi}{2} \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le \pi \to -\frac{25}{12} \le k \le \frac{1}{6} \to k = -2; -1; 0$

$-\frac{7\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + 2\pi m \le \pi \to -\frac{11}{6} \le m \le \frac{5}{12} \to m = -1; 0$

Задача 3 Ответ: 1) $n_{\min} = 3$

2) общий фонд 39 т.р.

3) $x_1 = 20, x_2 = 10, x_3 = 5$, остаток 4 т.р.

Решение. x – количество денег в призовом фонде.

1 команда. $\frac{x+1}{2}$ получено, $x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2}$ остаток.

2 команда. $\frac{x-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$ – получено, $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4}$ – остаток

3 команда. $\frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$ – получено, $\frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{8} = \frac{x-7}{8}$ – остаток

....

n команда. $\frac{x+1}{2^n}$ – получено, $\frac{x+1-2^n}{2^n}$ – остаток (индукция)

$$\frac{x+1-2^n}{2^n} = p \to x = 2^n(p+1) - 1 \geq 37$$

$$(p+1) \geq \frac{38}{2^n} \to \frac{38}{2^n - 1} \leq p \leq 4 \to 2^n \geq \frac{38}{5} = 7{,}8 \to n_{\min} = 3$$

$$\frac{38}{8} - 1 \leq p \leq 4 \to 3{,}75 \leq p \leq 4 \to p = 4$$

2)общий фонд 39 *т.р.*

$x_1 = 20, x_2 = 10, x_3 = 5$

Задача 4. Ответ: $x = 35$

Решение варианта 1

Число 1600000000=$2^4 \cdot 2^8 \cdot 5^8 = 2^{12} \cdot 5^8$

Произведение чисел кратных 5:

$5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 30 \cdot 35$=$2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 5^8$, поэтому для чисел $x < 35$

$x!$ не делится на 1600000000.

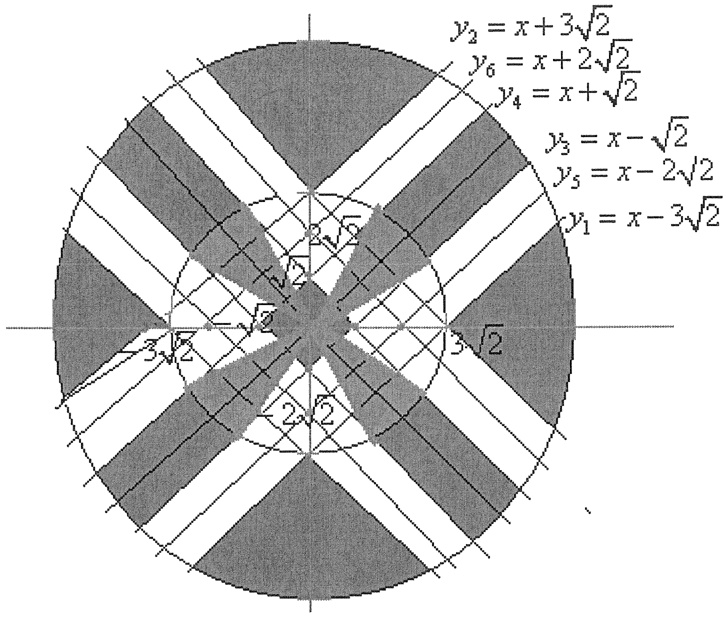
Произведение чисел кратных 2:

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16$=$3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^{15}$, т.е. для числа $x \geq 15$ число $x!$

делится на 2^{12}. Таким образом, 35! делится на 5^8 и 2^{12}, т.е. на 1600000000

Задача 5 Ответ: $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in Z$

Решение.



Белые полосы соответствуют точкам плоскости, расстояние которых до одной из прямых $\left[\begin{array}{l} x+y=\pm 2\sqrt{2} \\ x-y=\pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ не превосходит 1. Если центр $\begin{cases} x=3\sqrt{2}\cos\alpha, \\ y=3\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases}$ $\alpha\in[0;2\pi)$ окружности $\left(x-3\sqrt{2}\cos\alpha\right)^2+\left(y-3\sqrt{2}\sin\alpha\right)^2=1$ находится в серой зоне, то система не имеет решений. (Зеленые сектора по α). Границы секторов:

1. $\begin{cases} y=x-\sqrt{2} \\ \begin{cases} x=3\sqrt{2}\cos\alpha, \\ y=3\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases} \quad \alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases} \to \sin\alpha-\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}\to\alpha_1=\dfrac{\pi}{4}-\arcsin\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

2. $\begin{cases} y=x+\sqrt{2} \\ \begin{cases} x=3\sqrt{2}\cos\alpha, \\ y=3\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases} \quad \alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \to \sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{3}\to\alpha_2=\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

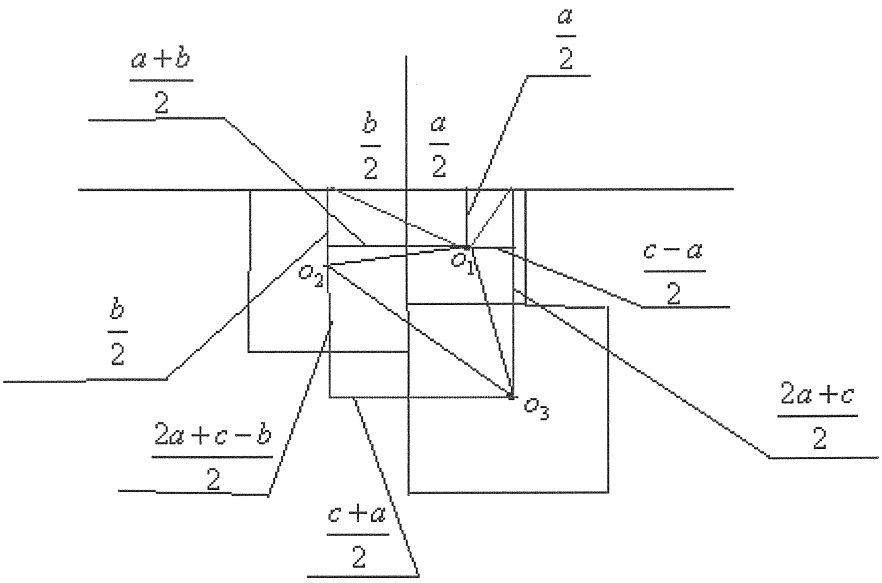
С учетом периодичности функций, получим ответ.

$\alpha\in\left(\alpha_1+\dfrac{\pi k}{2};\alpha_2+\dfrac{\pi k}{2}\right),\ k\in Z$

Задача 6 Ответ: $tg\varphi=\dfrac{\sqrt{b^2(c-a)^2+a^2(a-b)^2}}{(a+c)(a+b)}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

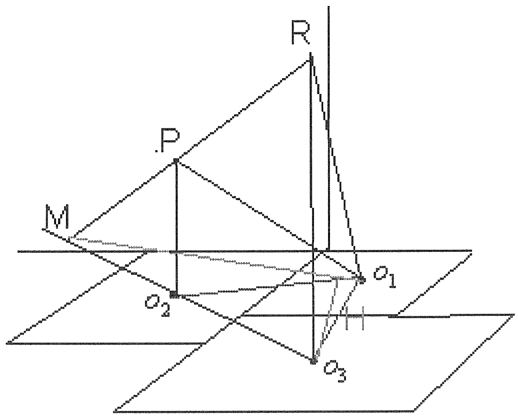
Решение. А. Плоскость должна проходить через центры кубов.

Б. Вычисление площади треугольника центров оснований на плоскости P .



$S_{o_1o_2o_3} = \frac{(a+c)(a+b)}{4}$ (из площади красного прямоугольника вычитается площадь четырех треугольников + преобразования)

В. Опускаются на $\frac{a}{2}$ центры всех кубов ($a<b<c$) Треугольник $O_1O_2O_3$ является проекцией треугольника с вершинами в центрах кубов.



Вычисления из подобия:

$$O_3M = \frac{c-a}{c-b}|O_2O_3|$$

$$O_2M = \frac{b-a}{c-b}|O_2O_3|$$

Вычисление площади треугольника O_1MO_3:

$$\frac{O_2O_3}{O_3M} = \frac{S_{o_1o_2o_3}}{S_{o_1Mo_3}} = \frac{c-b}{c-a} \to S_{o_1Mo_3} = \frac{c-a}{c-b} S_{o_1o_2o_3} = \frac{(c-a)(c+a)(a+b)}{4(c-b)}$$

Вычисление длины стороны MO_1:

Координаты вектора $\overrightarrow{O_1M} = \left\{ -\frac{b(c-a)}{c-b}; \frac{a(a-b)}{c-b} \right\}$

Длина вектора $\overrightarrow{O_1M}$: $O_1M = \frac{\sqrt{b^2(c-a)^2 + a^2(a-b)^2}}{c-s}$

Вычисление высоты треугольника O_1MO_3: $H = \dfrac{2S_{O_1MO_3}}{O_1M} = \dfrac{(c-a)(c+a)(a+b)}{2\sqrt{b^2(c-a)^2 + a^2(a-b)^2}}$

Вычисление угла между плоскостями P и Q:

$$tg\varphi = \frac{c-a}{2H} = \frac{\sqrt{b^2(c-a)^2 + a^2(a-b)^2}}{(a+c)(a+b)}$$

Варианты получаются вариацией параметров a, b и c.