поступаем в вуз

математика

Г. И. Фалин
А. И. Фалин

Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ

БИНОМ

поступаем в вуз

Г. И. Фалин
А. И. Фалин

Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2007

УДК 51(079)
ББК 22.1
Ф19

Фалин Г. И.

Ф19 Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ / Г. И. Фалин, А. И. Фалин.— М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.— 327 с. : ил.— (Поступаем в вуз)

ISBN 978-5-94774-671-6

В сборнике собрано более 800 задач по тригонометрии, предлагавшихся на вступительных испытаниях по математике в МГУ им. М. В. Ломоносова (как основных, так и предварительных), а также задачи тестов и выпускных экзаменов подготовительного отделения МГУ. Задачи сгруппированы по типам, что позволяет составить представление о характере и сложности экзаменационных задач, а также основных методах их решения. Ко всем задачам даны ответы. Для наиболее характерных и сложных задач приведены подробные решения.

Книга будет полезна абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ.

УДК 51(079)
ББК 22.1

По вопросам приобретения обращаться:
БИНОМ. Лаборатория знаний
Телефон: (495) 157-5272,
e-mail: Lbz@aha.ru, http://www.Lbz.ru

ISBN 978-5-94774-671-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Задачи

Решения

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи вступительных испытаний по математике (как письменных, так и устных) ежегодно публикуются в «Справочнике для поступающих в Московский университет», разнообразных сборниках, регулярно издаваемых механико-математическим факультетом, факультетом вычислительной математики и кибернетики, физическим факультетом, другими факультетами. В этих изданиях задачи письменных экзаменов публикуются в виде вариантов, реально предлагавшихся на вступительных испытаниях, а задачи устных экзаменов публикуются общим списком. В этом виде задачи полезны на заключительном этапе подготовки, когда абитуриент репетирует будущий экзамен. Подготовка к экзамену по математике в строгом смысле этого слова предполагает изучение материала в определенной последовательности (которая определяется методическими взглядами преподавателя).

Предлагаемый вниманию читателя сборник задач составлен на основе тщательного анализа условий и методов решений задач по тригонометрии, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в МГУ им. М. В. Ломоносова, факультетских олимпиадах (которые фактически являются предварительными экзаменами), задач заочных туров и тестов, а также задач выпускных экзаменов подготовительного отделения. Составленный таким образом сборник дает представление о характере и сложности экзаменационных задач, основных идеях, на которых базируются методы их решения. Ко всем задачам приведены ответы.

Для наиболее характерных, трудных и теоретически важных задач каждого типа (номера этих задач отмечены знаком *) в последней главе приведены подробные решения. Задачи, для которых даны решения, составляют более трети от общего числа задач, включенных в книгу.

Для каждой задачи мы указываем факультет, на котором предлагалась задача, год и месяц, когда проводился экзамен (если в упомянутом году экзамен на этот факультет проводился только в июле, то месяц не указывается), номер задачи в варианте. Для названий факультетов используются обычные университетские сокращения: мех-мат (механико-математический факультет), ВМК (факультет вычислительной математики и кибернетики), физ. (физический факультет) и т. д. Особо отметим следующие сокращения: Севастополь (Черноморский филиал МГУ), Ташкент (филиал МГУ в г. Ташкенте), ФНМ (факультет наук о материалах; ранее он назывался ВКНМ — высший колледж наук о материалах), ФГУ (факультет государственного управления), ФГП (факультет глобальных процессов), ВШБ (высшая школа бизнеса), МШЭ (московская школа экономики), ФФМ (факультет фундаментальной медицины), МК-МГУ (олимпиада «Покори Воробьевы горы», проводимая МГУ совместно с газетой «Московский комсомолец»).

Несколько слов об обозначениях. Символом $\mathbb{R}$ мы обозначаем множество всех действительных чисел, $\mathbb{Z}$ — всех целых чисел, $\mathbb{Z}_+$ — неотрицательных целых чисел, $\mathbb{N}$ — натуральных чисел, $\mathbb{Q}$ — рациональных чисел.

Настоящий сборник задач является естественным продолжением пособия авторов «Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ» (М.: БИНОМ, 2006), в котором собраны задачи по основным разделам алгебры.

Следует отметить, что в последние годы появилось несколько сборников задач для поступающих в МГУ, составленных на базе реальных экзаменационных задач, что позволяет каждому абитуриенту выбрать для подготовки тот, который в наибольшей степени соответствует его индивидуальной ситуации.

Книга будет полезна абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ.

Мы были бы благодарны читателям за советы и пожелания по поводу книги, которые просим направлять по адресу: Москва 119992, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, проф. Г. И. Фалину.

д. ф.-м. н., проф. Г. И. Фалин,
к. ф.-м. н., доцент А. И. Фалин

12 января 2007 г.

ЗАДАЧИ

Глава 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1.1. Значения для конкретных углов

1 (*геолог., 2000, устный*). Вычислить
$$\frac{1}{1-2\cos 30^\circ}+\frac{1}{1+2\sin 60^\circ}.$$
Ответ: -1.

2* (*почвовед., 2004, май, № 1*). Вычислить $\sin 255^\circ$.

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3 (*эконом., полит. эконом., 1982, № 1*). Определить, что больше: $\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{3}{2}\pi}$ или $\sqrt[3]{5}$.

Ответ: первое число больше.

4 (*эконом., отд. кибернетики, 1982, № 1*). Определить, что больше: $\sqrt[7]{2+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$ или $\sqrt[3]{-2\cos\pi}$.

Ответ: второе число больше.

5 (*эконом., 1968*). Проверить справедливость равенства
$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6 (*эконом., отд. менеджмента, 2004, июль, № 1*). Вычислить сумму всех решений уравнения
$$1-\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)}{x}=\frac{x}{3\operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{6}\right)}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

7 (*эконом., 2004, июль, № 1*). Вычислить произведение всех отрицательных корней уравнения
$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{3}\right)}{12x}=2x^3\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)+\sqrt{2}x.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

8* (*почвовед., 2002, июль, № 2*). Вычислить $\cos\frac{5\pi}{8}$.

ОТВЕТ: $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

9* (*ВМК, 2001, устный*). Вычислить $\operatorname{tg} 37^\circ 30'$.

ОТВЕТ: $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$.

10 (*ВМК, 2002, устный*). Вычислите без помощи таблиц и калькулятора $\operatorname{tg} 142^\circ 30'$.

ОТВЕТ: $2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

11 (*фил., 1969*). Доказать, что число $\operatorname{tg} 142^\circ 30' - \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ есть целое число.

12 (*ВМК, 2006, устный*). Число

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{16}\right)$$

является рациональным. Найти его.

ОТВЕТ: $\frac{3}{2}$.

1.2. Преобразование выражения $a\sin x + b\cos x$

13* (*ВМК, 2002, устный,*). Вычислить $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

ОТВЕТ: 4.

1.3. Вычисление значений по заданным условиям

14* (*хим., 1995, май, № 2*). Найти $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

ОТВЕТ: $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$.

15 (*Севастополь, 2006, № 3*). Вычислите $\cos\alpha$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{8}$ и $90^\circ<\alpha<180^\circ$.

ОТВЕТ: $-\frac{1}{3}$.

16 (*геолог., 2006, устный*). Вычислите значение $\cos 2x$, если

$$2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x - 3 = 0$$

и $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

ОТВЕТ: $-\frac{3}{5}$.

17 (*геолог., 2000, июль, № 2*). Вычислить $\operatorname{tg} 2x$, если $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{5}$.

Ответ: $\operatorname{tg} 2x = \frac{120}{119}$.

18 (*физ., 1987, № 3*). Известно, что $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{4\pi}{3}$. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{5}$.

19 (*психолог., 1986, № 1*). Найти $\operatorname{tg}^2 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $\operatorname{tg}^2 2\alpha = \frac{112}{9}$.

20 (*почвовед., 2000, июль, № 3*). Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, а $\sin 4\alpha > 0$.

Ответ: $\frac{24}{7}$.

21 (*почвовед., 1996, май, № 1*). Найдите $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, если известно, что $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, а $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$.

22 (*ВМК, 1994, апрель, № 2*). Вычислить $\cos 2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

23* (*ВМК, 2000, устный*). Вычислить $\sin\alpha$, если известно, что $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = 1{,}4$.

Ответ: 0,96.

24 (*ВМК, эконом., физ., подгот. отд., 1999, № 1*). Вычислить $4\cos 2\left(2\alpha - \frac{9\pi}{2}\right)$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} - 2$.

Ответ: -2.

25 (*почвовед., 1998, июль, № 2*). Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$. Установите без таблиц и калькуляторов, какое число больше: $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$ или $\frac{2}{7}$.

Ответ: $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| > \frac{2}{7}$.

26 (*почвовед., 2002, май, № 2*). Вычислить $\operatorname{tg} 3\alpha$, если $\sin\alpha = 2\cos\alpha$.
Ответ: $\frac{2}{11}$.

27 (*почвовед., 2006, № 1*). Найти $\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 2\alpha\right)$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.
Ответ: $\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$.

28 (*мех-мат, 1994, май, № 1*). Число x удовлетворяет условиям $\operatorname{tg} 2x = -\frac{3}{4}$ и $\sin 2x > 0$. Обязательно ли при этих условиях определено выражение $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x$, и чему оно тогда равно?
Ответ: обязательно определено и равно -2.

29 (*геолог., 2000, устный*). Найти $\operatorname{tg} x$, если
$$\frac{\sin x - 3\cos x}{2\sin x - \cos x} = 2.$$
Ответ: $-\frac{1}{3}$.

30 (*ВМК, 2001, устный*). Известно, что
$$5\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta).$$
Чему равно значение $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}$?
Ответ: $\frac{3}{2}$.

31 (*эконом., 1992, № 1*). Вычислить
$$\log_{\frac{11}{25}} |\sin 3\beta| + \log_{\frac{11}{25}} |\sin\beta|,$$
если
$$\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$
Ответ: 1.

32 (*эконом., 1992, № 1*). Вычислить
$$\log_{\frac{18}{7}} \left|\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \log_{\frac{18}{7}} \left|\cos\left(3\gamma + \frac{\pi}{4}\right)\right|,$$
если известно, что
$$\cos\gamma + \sin\gamma = -\sqrt{\frac{1}{3}}.$$
Ответ: -1.

33 (*физ., 1966, № 3*). Сумма трех положительных чисел α, β и γ равна $\frac{\pi}{2}$. Вычислить произведение $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma$, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\gamma$ образуют арифметическую прогрессию.
Ответ: 3.

34 (*физ., 1965, № 3*). Зная, что $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ — корни квадратного уравнения:

$$x^2 + px + q = 0,$$

вычислить

$$\sin^2(\alpha+\beta) + p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + q\cos^2(\alpha+\beta).$$

Ответ: q.

1.4. Тождества

35* (*эконом., 1968*). Доказать тождество

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}.$$

36 (*психолог., 1968, № 1*). Вычислить выражение

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha} + \frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha},$$

зная, что $\cos 4\alpha = \frac{1}{2}$.

Ответ: 194.

37 (*биолог., 1972, № 2*). Упростить выражение

$$\frac{\sin(2x-540^\circ)\cdot\sin(4x-180^\circ) - \sin(2x-270^\circ)\cdot\sin(450^\circ-4x) - 1}{\left[4+16\left(\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{3x}{2}\right)^{-2}\right]^{-1}}.$$

Ответ: -8.

38 (*биолог., 1972*). Упростить выражение

$$\operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}(70^\circ-x) + \operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}(20^\circ-x) - \operatorname{ctg}(20^\circ-x)\operatorname{ctg}(70^\circ-x).$$

Ответ: -1.

39 (*ВМК, 2005, устный*). Доказать, что $\sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = 0$.

40 (*почвовед., 2000, май, № 2*). Найдите

а) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$,

б) $\cos(\alpha-\beta)$,

если известно, что выполняются равенства:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 0{,}3; \quad \sin\alpha + \sin\beta = -1{,}1.$$

Ответ: а) $-\frac{11}{3}$; б) $-0{,}35$.

41* (*мех-мат, 2000, май, № 4*). Найти

$$\frac{\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\gamma)}{\cos\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta+\gamma)},$$

если

$$\frac{\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{4}{9}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$.

42 (*мех-мат, 2002, май, № 1*). Найти дроби $\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}$ и $\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$, если числа α, β и γ выбраны так, что обе дроби положительны и одна из них втрое больше другой.

Ответ: первая дробь равна $\frac{2}{3}$, вторая дробь равна 2.

1.5. Тождества для углов треугольника

43* (*физ., 1961*). Доказать, что если α, β, γ — углы треугольника, то

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

44 (*ВМК, 2000, 2003, 2006, устный*). Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma=1.$$

45 (*ВМК, 1996, устный*). Доказать, что при условии $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ выполняется тождество

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$$

46 (*ВМК, 2004, устный*). Пусть $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Доказать, что

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

47 (*ВМК, 2002, устный*). Доказать тождество

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}3\alpha=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha.$$

48 (*ВМК, 2001, устный*). Известно, что

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma.$$

Какие значения может принимать сумма $\alpha+\beta+\gamma$?

Ответ: πn, $n\in\mathbb{Z}$.

49 (*ВМК, 2003, устный*). Углы α, β, γ некоторого треугольника удовлетворяют соотношению

$$\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=1.$$

Доказать, что один из углов α, β или γ равен 120°.

1.6. Неравенства

50 (*ВМК, 2005, устный*). Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что тогда

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n.$$

51* (*мех-мат, 1963, устный*). Доказать, что если α — угол первой четверти, то

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2.$$

52* (*мех-мат, 1997, устный*). Зная, что $\sin\alpha > 0$ и $\sin 3\alpha > \frac{1}{4}$, доказать, что

$$\sin\alpha > \frac{109}{1296}.$$

53 (*мех-мат, 1963, № 4*). Доказать, что при любом действительном значении α справедливо неравенство

$$4\sin 3\alpha + 5 \geqslant 4\cos 2\alpha + 5\sin\alpha.$$

54* (*ВМК, 2005, устный*). Что больше, $\cos(\sin x)$ или $\sin(\cos x)$?

ОТВЕТ: первое выражение больше второго при всех значениях x.

55* (*мех-мат, 2001, Олимпиада, 10 кл., № 3*). Доказать, что если

$$\sin x + \sin y + \sin z \geqslant \sqrt{5},$$

то

$$\cos x + \cos y + \cos z \leqslant 2.$$

56* (*ВМК, 2003, устный*). Пусть α, β и γ — углы остроугольного треугольника. Доказать, что

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2.$$

57 (*ВМК, 2006, устный*). Доказать, что для любых положительных α и β выполняется неравенство

$$\sin(\alpha+\beta) \leqslant \sin\alpha + \beta.$$

58* (*ВМК, 1998, устный*). Сравнить $\sin 200^\circ$ и $\sin(-300^\circ)$.

ОТВЕТ: $\sin 200^\circ < \sin(-300^\circ)$.

59 (*фил., 1970, № 5*). Не пользуясь таблицами (и калькулятором), доказать, что $\operatorname{tg} 208^\circ < \sin 492^\circ$.

60* (*геолог., 2001, устный*). Сравните числа $\sin 3$ и 0,5.

ОТВЕТ: $\sin 3 < 0{,}5$.

61 (*геолог., 2001, 2004, 2006, устный*). Сравните числа $\cos 5$ и 0,5.

ОТВЕТ: $\cos 5 < 0{,}5$.

62 (*геолог., 2005, устный*). Сравните $\cos(5.15)$ и $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\cos(5.15) < \frac{1}{2}$.

63 (*геолог., 2002, устный*). Сравните числа $\cos 9$ и $\cos 10$.

Ответ: $\cos 9 < \cos 10$.

64 (*географ., 1979, № 5*). Найти все решения неравенства $\cos\frac{3}{2} - 4x - x^2 \geqslant 0$, лежащие в интервале $-\frac{21}{5} < x < 0$.

Ответ: $-2 - \sqrt{4 + \cos\frac{3}{2}} \leqslant x < 0$.

65* (*ВМК, 1999, устный*). Что больше: $6\cos^2 1 + \cos 1$ или $2\sin 1$?

Ответ: первое число больше.

66* (*ВМК, 1995, устный*). Какое из чисел больше: $\sin 31^\circ$ или $\frac{1}{\sqrt{3}}$?

Ответ: $\sin 31^\circ < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

67* (*ВМК, 2003, устный*). Сравнить числа $\cos\frac{3\pi}{11}$ и 0,67.

Ответ: $\cos\frac{3\pi}{11} < 0{,}67$.

68* (*ВМК, 1994, устный*). Определить первый знак после запятой у числа $\sin 75^\circ$.

Ответ: $\sin 75^\circ = 0{,}9\ldots$.

69 (*ВМК, 1994, устный*). Определить первый знак после запятой у числа $\sin 80^\circ$.

Ответ: $\sin 80^\circ = 0{,}9\ldots$.

1.7. Равенства

70* (*ВМК, 1998, устный*). Доказать, что

$$\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = 1.$$

71 (*ВМК, 2000, устный*). Вычислить

$$\frac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \sin 66^\circ}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \cos 51^\circ \sin 69^\circ}.$$

Ответ: -1.

72 (*ВМК, 2000, 2002, 2006, устный*). Вычислить

$$\frac{20\sin 80^\circ \sin 65^\circ \sin 35^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 110^\circ}.$$

Ответ: 5.

73 (*ВМК, 2001, устный*). Доказать тождество

$$\sin 70^\circ + 8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2\cos^2 10^\circ.$$

74 (*ВМК, 2004, устный*). Сравнить два числа:

$$\operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ$$

и

$$\operatorname{tg} 50^\circ.$$

Ответ: $\operatorname{tg} 50^\circ$ больше (первое число равно 1).

75 (*ВМК, 2006, устный*). Сколько положительных чисел есть среди первых пятидесяти членов последовательности $\sin 1^\circ$, $\sin 10^\circ$, $\sin 100^\circ, \ldots$?

Ответ: 3 (все члены последовательности, начиная с четвертого, равны $\sin 1000^\circ = -\sin 80^\circ$).

76* (*ВМК, 2001, 2004, устный*). Вычислить

$$\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 100^\circ + \operatorname{tg} 130^\circ + \operatorname{tg} 160^\circ.$$

Ответ: $-2\sqrt{3}$.

77* (*ВМК, 1999, устный*). Доказать, что

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}.$$

78 (*ВМК, 2006, устный*). Вычислите

$$8\cos 260^\circ \cdot \sin 130^\circ \cdot \cos 160^\circ.$$

Ответ: 1.

79 (*ВМК, 2003, 2006, устный*). Число

$$\sin\frac{\pi}{18} \cdot \sin\frac{3\pi}{18} \cdot \sin\frac{5\pi}{18} \cdot \sin\frac{7\pi}{18} \cdot \sin\frac{9\pi}{18}$$

является рациональным. Найти его.

Ответ: $\frac{1}{16}$.

80 (*ВМК, 2000, 2005, устный*). Вычислить $8\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ$.

Ответ: 1.

81* (*физ., 1961*). Вычислить без помощи таблиц

$$\cos\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7}.$$

Ответ: $-\frac{1}{8}$.

82* (*мех-мат, 1960; ВМК, 2000, устный*). Доказать, что

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

83* (*мех-мат, 1963, № 4*). Доказать, что при любом целом положительном n справедливо равенство:

$$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{3}=2\sin\frac{n\pi}{6}\sin\frac{(n+1)\pi}{6}.$$

84* (*хим., 2002, заочный тур*). Доказать, что

$$\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}.$$

85* (*МК-МГУ, 2006, очный тур-ВМК, № 2*). Какое из двух чисел больше:

$$3\sin 54^\circ \text{ или } 6\cos^2 36^\circ-\sqrt{2}.$$

ОТВЕТ: второе.

86 (*ВМК, 2004, устный*). Доказать равенство

$$\prod_{k=1}^{179} 2\sin k^\circ \equiv 2\sin 1^\circ\cdot 2\sin 2^\circ\cdot\dots\cdot 2\sin 179^\circ=180.$$

1.8. Прочие задачи

87* (*мех-мат, 1996, устный*). Является ли рациональным число $\operatorname{tg} 5^\circ$?
ОТВЕТ: нет.

88* (*мех-мат, 1996, устный*). Является ли рациональным число $\sin 25^\circ$?
ОТВЕТ: нет.

89* (*психолог., 1978, № 4*). Найти множество всех пар чисел (a, b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a(\cos x-1)+b^2=\cos(ax+b^2)-1.$$

ОТВЕТ: $(0;0), (1;0)$.

90* (*мех-мат, 2001, март, № 4*). Можно ли подобрать числа A, B, ϕ, ψ так, чтобы выражение

$$\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\right)^2+A\cos(x+\phi)+B\sin(2x+\psi)$$

принимало при всех x одно и то же значение C? Если да, то какие значения может принимать константа C?

ОТВЕТ: да; $C=\dfrac{9}{2}$.

Глава 2

СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

2.1. Четность/нечетность

91* (*ВМК, устный, 2001*). Представьте функцию $f(x)=\dfrac{3^x+x^2}{\sin x}$ в виде суммы четной и нечетной функций в области, где она определена.

Ответ: $f(x)=\left(\dfrac{3^x-3^{-x}}{2\sin x}\right)+\left(\dfrac{3^x+3^{-x}+2x^2}{2\sin x}\right)$.

2.2. Периодичность

92 (*географ., 1996, июль, № 2*). $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T=\frac{1}{3}$. Найти значение $f(1)$, если известно, что $f^2(2)-5f(0)+\frac{21}{4}=0$ и $4f^2(-1)-4f\left(\frac{10}{3}\right)=35$.

Ответ: $f(1)=\frac{7}{2}$.

93* (*ВМК, 1996, устный*). Доказать, что функция $y=\sin\dfrac{1}{x}$ — непериодическая.

94* (*ВМК, 2000, устный; геолог., 2003, устный*). Найдите основной период функции

$$y=\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $T=\frac{\pi}{3}$.

95 (*ВМК, 2003, устный*). Найти главный период функции

$$y=|\operatorname{tg}x|+|\operatorname{ctg}x|.$$

Ответ: $T=\frac{\pi}{2}$.

96 (*ВМК, 2006, устный*). Существуют ли две функции f и g, каждая из которых имеет главный период T, а $f+g$ имеет главный период $\frac{T}{2}$?

Ответ: да, например, $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\sin 2x-\sin x$ $(T=2\pi)$.

97 (*геолог., 2000, устный*). Найти период T функции

$$y(x) = 2\sin\frac{2x}{15} - 3\cos\frac{8x}{35},$$

удовлетворяющий условию $0 < T < 500$.

Ответ: $T = 105\pi$.

98 (*ВМК, 2005, устный*). При каких значениях n функция

$$y = \cos(nx)\cdot\sin\left(\frac{5}{n}x\right)$$

имеет период 3π?

Ответ: $n = \pm1, \pm3, \pm5, \pm15$.

99* (*психолог., 1996, июль, № 5*). Пусть t_1 t_2 — корни квадратного уравнения

$$t^2 - (5b-2)^2t - 3b^2 - 7b + 1 = 0.$$

Найти все значения параметра b, при каждом из которых для любого значения параметра a функция

$$f(x) = \cos(a\pi x)\cdot\cos\left(\left(t_1^3 + t_2^3\right)\cdot\pi x\right)$$

является периодической.

Ответ: $b = \frac{2}{5}$.

2.3. Область значений

100 (*ВМК, 2000, устный*). Найти область значений функции

$$f(x) = \sin\left(\cos(\cos x^2)\right).$$

Ответ: $\left[\sin(\cos 1); \sin 1\right]$.

101* (*ФГП, 2005, июль, № 5*). Выясните, верно ли следующее утверждение:

множество значений функции $y = \cos 2x - 3\sin x$ является подмножеством отрезка $[-4; \sqrt{5}]$.

Ответ надо обосновать.

Ответ: верно; это множество — отрезок $\left[-4; \frac{17}{8}\right]$.

102 (*геолог., 2005, устный*). Найдите область изменения значений функции

$$y = \cos x - \sin x + \sin 2x - 1.$$

Ответ: $\left[-\frac{9}{4}; \sqrt{2}\right]$.

103* (*геолог., отд. общей геологии, 1981, № 6*). Показать, что функция

$$y = \sin^2 x - 12\sin x\cos x + 3\cos^2 x - 2\sqrt[3]{66}$$

может принимать неотрицательные значения.

104 (*психолог., 2005, июль, № 6*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$f(x) = \frac{4\cos x + 6a}{4a - \cos x}$$

принимает все значения из отрезка $[1, 2]$.

Ответ: $a \in \left[-\frac{5}{2}\,;0\right) \cup \left(0;\frac{5}{2}\right]$.

2.4. Графики

105* (*геолог., 2003, 2004, устный*). Постройте график функции

$$y = \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x.$$

106 (*геолог., 1998, устный*). Построить графики функций

$$y = \sin|x + \pi|,$$

$$y = \left|\cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

107 (*ВМК, 1996, устный*). Построить график функции

$$y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}.$$

108 (*геолог., 2002, устный*). Постройте график функции

$$y = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}|x| - \operatorname{tg} x).$$

109 (*геолог., 2006, устный*). Постройте график функции

$$y = 0.5(\operatorname{tg}|x| - 2\operatorname{tg} x).$$

110* (*геолог., 2004, устный*). Постройте график функции

$$y = \sin x - |\sin x|.$$

111 (*геолог., 2005, устный*). Постройте график функции

$$y = \cos x - |\cos x|.$$

112 (*геолог., 2005, устный*). Постройте график функции

$$y = \frac{1 - \cos 2x}{2|\sin x|}.$$

113 (*ВМК, 2002, устный*). Построить график функции

$$f(x) = \sqrt{2\cos x + 2\sqrt{2\cos x - 1}} + \sqrt{2\cos x - 2\sqrt{2\cos x - 1}}.$$

114 (*геолог., 1999, устный*). Построить график функции

$$y = |\sin x| \cdot \operatorname{ctg} x.$$

115 (*геолог., 1999, устный*). Построить график функции

$$y = (\sin|x| + \cos|x|)^2.$$

116 (*геолог., 1998, устный*). Построить график функции

$$y = \sin|x + \pi|.$$

117 (*ВМК, 2003, устный*). Построить график функции

$$y = \log_{|\operatorname{tg} x|} 2.$$

118 (*психолог., 1966, № 5*). Построить график функции

$$y = 1 - 2^{1+\sin(x+1)}.$$

119 (*геолог., 1998, устный*). Построить график функций

$$y = \left|\cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

120 (*геолог., 2004, устный*). Построить график функции

$$y = \sin\sqrt{9\pi^2 - x^2}.$$

121 (*ВМК, 2000, устный*). На координатной плоскости Oxy изобразить множество, координаты точек которого удовлетворяют неравенству

$$\log_y |\sin x| \geqslant 0.$$

122 (*ВМК, 1998, устный*). Изобразить множество всех точек на плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют неравенству

$$|\sin x| + |\sin y| < 2.$$

123 (*ВМК, 2004, устный*). Построить множество точек на координатной плоскости (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенствам $\sin x < \sin y$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$.

124 (*геолог., 1998, устный*). Изобразить множество всех точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y = |y| \cdot \cos x.$$

125 (*геолог., 1998, устный*). Изобразить множество всех точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y = |y - \sin x|.$$

126 (*мех-мат, 1967, № 3*). На координатной плоскости указать все точки, координаты которых x, y таковы, что выражение

$$\cos 2(t+x)+2\sin(t+x)\cos y-\frac{1}{2}(\cos y-1)^2-\sin x$$

при всяком значении t меньше $\frac{1}{2}$, и изобразить область, образуемую этими точками.

127 (*ВМК, 2005, устный*). Изобразите на координатной плоскости все точки (x,y), удовлетворяющие равенству

$$\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)\left(1+\cos^2(x+y)\right)=1+5\sin^2(x+y).$$

128 (*соц., 2006, № 6*). Для каждого натурального значения параметра k найдите площадь фигуры, задаваемой на плоскости (x,y) условиями

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x\geqslant 0,\\ \sin y\leqslant 0,\end{array}\right.\\ -\pi k\leqslant x\leqslant \pi k,\\ -\pi k\leqslant y\leqslant \pi k.\end{cases}$$

Ответ: $S=3\pi^2k^2$.

2.5. Экстремумы

129* (*ВМК, 2002, устный*). Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y(x)=\sin^3 x-\sin^6 x+1.$$

Ответ: $y_{\min}=-1$; $y_{\max}=\frac{5}{4}$.

130 (*ВМК, 2006, устный*). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=5\cos^3 x+2\cos^6 x+1.$$

Ответ: $y_{\min}=-2$; $y_{\max}=8$.

131 (*фил., 1973, № 3*). Найти минимальное значение выражения $\cos 2x-8\cos x$.

Ответ: -7.

132 (*фил., 1978, № 4*). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\sin^2 x+\cos x-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $f_{\min}=-\frac{3}{2}$, $f_{\max}=\frac{3}{4}$.

133 (*геолог., 2004, устный; ВМК, 2005, устный*). Чему равны наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \cos^2 x + \frac{4}{3}\sin x$$

на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$?

ОТВЕТ: $y_{\min} = \frac{4}{3}$, $y_{\max} = \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

134 (*почвовед., 1975, № 2*). Найти все значения переменной x, при которых выражение $3 + \sin^2 2x - 2\sin^2 x$ достигает своего наибольшего значения.

ОТВЕТ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

135 (*ВМК, 2000, устный*). Найти наибольшее значение выражения $\cos x + \cos y$ при условии, что $x + y = \frac{\pi}{2}$.

ОТВЕТ: $\sqrt{2}$.

136 (*геолог., 2002, 2004, 2006, устный; ВМК, 2005, устный*). Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \sin x + \cos x + \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}.$$

ОТВЕТ: $y_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$, $y_{\max} = 3\sqrt{2}$.

137 (*ВМК, 2006, устный*). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \sin 2x - 4(\cos x + \sin x).$$

ОТВЕТ: $f_{\min} = 1 - 4\sqrt{2}$, $f_{\max} = 1 + 4\sqrt{2}$.

138* (*ВМК, 2001, устный*). Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x, y) = 6\sin x\cos y + 2\sin x\sin y + 3\cos x.$$

ОТВЕТ: $f_{\min} = -7$, $f_{\max} = +7$.

139* (*географ., 2000, июль, № 4*). Найдите наибольшее значение выражения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2 - \sqrt{1 + 3x - x^2}\right)\right)$$

при условии $\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}} \geqslant \frac{\pi}{6}$.

ОТВЕТ: $\operatorname{tg}\left(\log_3\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)$.

140* (*ВМК, 1998, устный*). Найти наибольшее значение функции

$$y = \sin^8 x + \cos^{14} x.$$

ОТВЕТ: $y_{\max} = 1$.

141 (*ВМК, 2004, устный*). Найти максимум и минимум функции

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x.$$

Ответ: $f_{\min} = \frac{1}{4}$, $f_{\max} = 1$.

142 (*ВМК, 1998, 2006, устный*). Найти при $x < 0$ наибольшее значение функции

$$y = 4x + \frac{\pi}{x} - \cos\left(4x^2\right).$$

Ответ: $y_{\max} = 1 - 4\sqrt{\pi} = y\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

143* (*ВМК, 2005, устный*). Найти при $x > 0$ наименьшее значение функции

$$y = 2x + \frac{3\pi}{x} + \sin\left(x^2\right).$$

Ответ: $y_{\min} = 2\sqrt{6\pi} - 1 = y\left(\frac{\sqrt{6\pi}}{2}\right)$.

144 (*ВМК, 1998, устный*). Найти минимальное и максимальное значения функции

$$y = a \cdot \cos^2 x + 2b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \sin^2 x.$$

Ответ: $y_{\max} = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}$, $y_{\min} = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}$.

145* (*географ., 1981, № 2*). Найти наибольшее значение функции

$$y(x) = \frac{x}{2} + \sin^2 x$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi+4}{4}$.

146 (*почвовед., 1990, № 4*). Найти наименьшее значение функции

$$y = 1 + 4 \cdot \sin x - 2x$$

на отрезке $[0; \pi]$.

Ответ: $1 - 2\pi$.

147* (*мех-мат, 1995, май, № 3*). Найти все числа k, для которых функция

$$y(x) = k\left(\sin^2 x + 2\cos x - 1\right)$$

не принимает значений, больших 3.

Ответ: $-1 \leqslant k \leqslant 3$.

148* (*мех-мат, 2003, заочный тур олимпиады, № 6*). Найти все значения параметра $\phi \in [0; 2\pi]$, при каждом из которых наибольшее значение функции

$$y = \cos x - \frac{3}{2}\cos\phi + \cos(x+\phi)$$

будет максимальным.

Ответ: $2\arccos\frac{1}{3}\,; 2\pi - 2\arccos\frac{1}{3}$.

149 (*почвовед., 1997, май, № 6*). Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\left(-3\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\cos x - 1\right) \times \\ \times \left(\frac{1-\cos 2y}{2} + \sqrt{11-\sqrt{3}}\cos y + 1\right).$$

Ответ: $\min = -\left(1+\sqrt{11-\sqrt{3}}\right)^2$, $\max = 10-\sqrt{3}$.

150 (*геолог., 1998, май, № 7*). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$\cos x + 4\cos\frac{x}{2} + 7\cos\frac{x}{4} + 6\cos\frac{x}{8}\,.$$

Ответ: $\min = -9; \max = 18$.

151* (*эконом., отд. кибернетики, 1980, № 4*). На отрезке $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right]$ найти наибольшее значение функции

$$y = 2\sin x + \sin 2x.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

152* (*ВМК, 2006, устный*). Пусть α, β, γ — углы треугольника. Найти наименьшее значение выражения

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\,.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

153* (*ВМК, 2004, устный*). Пусть $A \leqslant B \leqslant C$ — углы треугольника. Какое максимальное значение может принимать выражение

$$\cos A + 2\cos B + \cos C?$$

Ответ: $\frac{17}{8}$.

154 (*ВМК, 2004, устный*). Пусть $A \leqslant B \leqslant C$ — углы треугольника. Какое минимальное значение может принимать выражение

$$\cos 2A + 2\cos 2B + \cos 2C?$$

Ответ: $-\frac{17}{8}$.

Глава 3

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Простейшие тригонометрические уравнения

155* (*физ., 1977, № 1*). Решить уравнение

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

156 (*географ., 1995, июль, № 1*). Решить уравнение

$$2\cos(\pi(x-1)) = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{5}{6} + 2n$, $\frac{7}{6} + 2m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

157 (*геолог., 2001, устный*). Какие значения может принимать сумма $\sin x + \sqrt{2}\cos x$, если $\sin x = \frac{1}{2}$?

Ответ: $\frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}$.

158* (*геолог., 2004, июль, № 2*). Какие значения может принимать $\sin x$, если $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$?

Ответ: $\sin x = -1$ или $\frac{1}{2}$.

159 (*соц., 2004, июль, № 2*). Решите уравнение

$$4\sin^2 3x - 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos^2(x - \pi) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

160 (*ФГУ, 2005, июль, № 4*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin 1 = 0, \\ \cos x - \cos 1 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

161 (*геолог., 1998, устный*). Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} 4.$$

Ответ: $-2 + \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

162* (*геолог., 2002, 2004, 2006, устный*). Решите уравнение

$$|\sin x| + |\cos x| = 1.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

163 (*Севастополь, 2003, май, № 1*). Найдите количество решений уравнения

$$\cos x = \frac{11|x|}{20\pi}.$$

Ответ надо обосновать.

Ответ: 2.

164 (*ВМК, 1994, устный*). Сколько решений имеет уравнение

$$\sin x = \frac{x}{13}?$$

Ответ: 7.

165 (*ВМК, 1994, устный*). Определить число корней уравнения

$$x^2 + \operatorname{tg}^2 x = 100.$$

Ответ: 14.

3.2. Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

166* (*биолог., 2005, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $-\frac{7\pi}{12} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

167 (*физ., 1996, март, № 1*). Решить уравнение

$$1 - \cos 3x = \sin 3x.$$

Ответ: $\frac{2\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

168 (*физ., 1994, июль, № 2*). Решить уравнение

$$3\cos x + 5\sin x = 5.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{5}{\sqrt{34}} + 2\pi m \equiv 2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

169 (*хим., 1982, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}.$$

Ответ: $x = -\frac{7\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

170* (*геолог., отд. геофизики, 1985, № 4*). Решить уравнение

$$2\sin x + 7\cos x = \frac{\sqrt{53}}{2}.$$

Ответ: $x = -\operatorname{arctg}\frac{7}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

171 (*геолог., 2001, устный*). Какие значения может принимать сумма $\sin x + \sqrt{2}\cos x$, если $\sin x + \cos x = 1$?
Ответ: 1; $\sqrt{2}$.

172 (*ВКНМ, 1998, апрель, № 1*). Решить уравнение

$$\sin x + \sin\left(\frac{19\pi}{2} - x\right) = \sqrt{1{,}5}.$$

Ответ: $x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi k$; $x = \frac{11\pi}{12} + 2\pi l,\ k, l \in \mathbb{Z}$.

173 (*фил., 1980, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin 2x = 2\cos^2 x.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

3.3. Замена $y = \sin x$

174 (*ВКНМ, 1999, май, № 1*). Решить уравнение

$$(7\sin x - 4\sqrt{3})(7\sin x - 5\sqrt{2}) = 0.$$

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{4\sqrt{3}}{7} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

175 (*географ., 2002, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\frac{4\sin x - 3}{4\sin^2 x + \sin x - 3} = 2.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

176 (*мех-мат, 1996, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\frac{5}{\sin^2 x} - \frac{5\sqrt{5}}{\sin x} + 6 = 0.$$

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

177* (*хим., 2004, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \sin x} = 1 - 2\sin x.$$

Ответ: $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

178 (*эконом., отд. кибернетики, 1985, № 1*). Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{1 - 2\sin^2 x}.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

179 (*физ., 1987, № 2*). Решить уравнение

$$4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

180 (*ВМК, 2001, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2} - \sin x} + \sqrt[6]{\frac{1}{2} + \sin x} = 1.$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

181* (*психолог., 1997, июль, № 1*). Решить уравнение

$$3\cos^2 x + 4\sin x = 0.$$

Ответ: $(-1)^n \arcsin \frac{2 - \sqrt{13}}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

182 (*биолог., 2006, № 2*). Решить уравнение

$$3\cos 2x + 11\sin x = 7.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

183 (*физ., 1996, май, № 1*). Решить уравнение

$$\cos 2x + 8\sin x = 3.$$

Ответ: $(-1)^n \arcsin(2 - \sqrt{3}) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

184 (*МШЭ, 2006, № 3*). Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{1 + 2\cos 2x} = 0.$$

Ответ: $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

185 (*географ., 1993, № 2*). Решить уравнение

$$\sin x = \cos^2 x + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\right).$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

186* (*ИСАА, 2004, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\sin^3 x - \cos^4 x = -1.$$

Ответ: $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

187 (*фил., 2004, июль, № 2*). Решите уравнение

$$4\cos^2 3x - 4\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0.$$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

188 (*почвовед., 1994, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cdot \cos^2 x.$$

Ответ: $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

189* (*фил., 2001, июль, № 1*). Решить уравнение

$$3\cos 2x + 4\sin x = 1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^{m+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

190 (*ВМК, 2006, апрель, № 1*). Решить уравнение

$$2\cos 2x - 8\sin x + 3 = 0.$$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

191 (*почвовед., 1999, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\cos 2x = \sin x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

192 (*ФНМ, 2001, апрель, № 2*). Решить уравнение

$$3\cos 2x - 6\sin x - 2 = 0.$$

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{15} - 3}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

193 (*биолог., 2000, июль, № 2*). Решить уравнение

$$3 \cdot \cos 2x + 4 + 11 \cdot \sin x = 0.$$

Ответ: $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

194 (*географ., 1999, май, № 1*). Решить уравнение

$$2\cos 4x - 4\sin 2x = -1.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

195 (*биолог., 1999, июль, № 1*). Решить уравнение

$$8\cos 6x - 12\sin 3x = 3.$$

Ответ: $\frac{(-1)^n}{3} \arcsin\frac{-3 + \sqrt{29}}{8} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

196 (*геолог., 1997, июль, № 2*). Решить уравнение
$$3\cos 8x = 14(\sin 2x - \cos 2x)^2 - 3.$$
Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

197 (*хим., 1997, июль, № 3*). Решить уравнение
$$16\sin x - 8\cos 2x + 7 = 0.$$
Ответ: $(-1)^n \arcsin \frac{-2+\sqrt{5}}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

198 (*ФНМ, 2004, апрель, № 5*). Решить уравнение
$$\sqrt{\sin x + 2\cos 2x} - \sqrt{2}\cos 2x = 0.$$
Ответ: πn, $n \in \mathbb{Z}$; $(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $(-1)^k \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

199 (*психолог., 2005, июль, № 3*). Решить уравнение
$$\sqrt{2\cos^2 x - \sqrt{2}} + \sqrt{2}\sin x = 0.$$
Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + 2\pi n, x = -\frac{7\pi}{8} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

200 (*фил., 1982, № 1*). Решить уравнение
$$\cos 2x + 1 = -\sqrt{2}\sin x.$$
Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

201 (*ИСАА, 1992, № 2*). Решить уравнение
$$3\sin^2 x - 3\cos 2x - 12\sin x + 7 = 0.$$
Ответ: $(-1)^n \arcsin \frac{2}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

202 (*физ., 1976, № 1*). Решить уравнение
$$\cos 2x + 4\sin^3 x = 1.$$
Ответ: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

203 (*физ., 1998, март, № 1*). Решить уравнение
$$\sin 3x - \cos 2x \cdot \sin x = 0.$$
Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

204 (*хим., 1978, № 1*). Решить уравнение
$$\sin 2x + \sin 6x = 3\cos^2 2x.$$
Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = (-1)^m \frac{\arcsin \frac{3}{4}}{2} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

205 (*филолог., 1974, № 3*). Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x.$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \arcsin(\sqrt{3} - 1) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

206 (*филолог., 1979, № 2*). Решить уравнение

$$\sin\left(2x + \frac{5}{2}\pi\right) - 3\cos\left(x - \frac{7}{2}\pi\right) = 1 + 2\sin x.$$

ОТВЕТ: $x = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

207 (*биолог., 1978, № 1*). Решить уравнение

$$\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}.$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi l$, $m, l \in \mathbb{Z}$.

208 (*ВМК, 1987, № 4*). Решить уравнение

$$(2 + 3\cos 2x)\left(\sqrt{2\cos 2x + 3\sin x + 3} - 2\sin x + 1\right) = 0.$$

ОТВЕТ: $(-1)^n \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

209 (*ВМК, 1990, № 3*). Решить уравнение

$$3 \cdot 64^{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0.$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{2}(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

210 (*мех-мат, 1989, № 1*). Решить уравнение

$$1 + 2|\sin x| = 2\cos 2x.$$

ОТВЕТ: $\pm\arcsin\frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

211 (*геолог., 1993, № 2*). Решите уравнение

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} + 6\cos 2x = 0.$$

ОТВЕТ: $\pm\arcsin\frac{3}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

212* (*соц., 2001, № 2*). Решить уравнение

$$\log_{\sin x}(3\sin x - \cos 2x) = 0.$$

ОТВЕТ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

213* (*географ., 2000, май, № 6*). Решите уравнение

$$\sqrt{\cos 2x + 2\sin^2 x + \sin x + 1} - \sqrt{\frac{\sin x}{\sin x + 1}} - 1 = 0.$$

ОТВЕТ: $(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

214* (*ВМК, 2005, апрель, № 6*). Решить уравнение

$$12\cos 2x + 8|\sin x|\sqrt{3 + |\sin x| - 3\cos 2x} = 11.$$

ОТВЕТ: $\pm \arcsin \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

3.4. Замена $y = \cos x$

215 (*хим., 1980, № 2*). Решить уравнение

$$2\cos^2 3x - \cos 3x = 0.$$

ОТВЕТ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z};\ \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi m}{3},\ m \in \mathbb{Z}.$

216 (*почвовед., 2003, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\cos^2 4x - 2\cos 4x - 3 = 0.$$

ОТВЕТ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$

217* (*мех-мат, 1997, март, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{-24\cos x + 25} = 4\cos x - 3.$$

ОТВЕТ: $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

218* (*почвовед., 2001, июль, № 1*). Решить уравнение

$$2 + \cos 2x = 4\cos^2 x.$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$

219* (*хим., 1996, май, № 2*). Решить уравнение

$$5 + \cos 2x = 6\cos x.$$

ОТВЕТ: $2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$

220 (*эконом., отд. менеджмента, 1998, июль, № 3*). Решить уравнение

$$\cos 2x - \sqrt{3}\cos x - 2 = 0.$$

ОТВЕТ: $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$

221 (*биолог., 1990, июль, № 1*). Решить уравнение

$$3 \cdot \cos 2x = 4 - 11 \cdot \cos x.$$

ОТВЕТ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

222 (*геолог., отд. общей геологии, 1975, № 1*). Решить уравнение

$$4\cos 4x + 6\sin^2 2x + 5\cos 2x = 0.$$

ОТВЕТ: $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

223* (*психолог., 1966, № 2*). Решить уравнение

$$\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{9}{16}.$$

Ответ: $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

224 (*почвовед., 1995, май, № 1*). Решить уравнение

$$6\sin^2 x + \cos 2x - 3 = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

225 (*хим., 1990, июль, № 2*). Решить уравнение

$$2\sin^2 x + \sin^2 2x = \frac{5}{4} - 2\cos 2x.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

226 (*геолог., отд. общей геологии, 1981, № 2*). Решить уравнение

$$3\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

227 (*географ., 1990, № 1*). Решить уравнение

$$\cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.

228 (*геолог., отд. геофизики, 1972, № 2*). Решить уравнение

$$2\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

229 (*экзамен для победителей III и IV этапов Всероссийской олимпиады, 2004, № 2*). Решить уравнение

$$\cos 4x + 2\cos^2 x = 1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.

230 (*географ., 1965, № 3*). Найти все решения уравнения

$$8\cos^4 x - \cos 4x = 1.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

231 (*фил., 2003, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\cos 4x = \cos^4 x - \sin^4 x.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.

232 (*географ., 1983, № 1*). Решить уравнение

$$\cos^2 2x - 5\sin^2 x + 1 = 0.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

233 (*геолог., отд. геофизики, 1978, № 1*). Решить уравнение

$$-5\cos 4x = 2\cos^2 x + 1.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

234 (*почвовед., 1976, № 3*). Решить уравнение

$$4\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = \cos 8x.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

235 (*эконом., отд. полит. экономии, 1977, № 2*). Решить уравнение

$$8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

236* (*географ., 1980, № 4*). Решить уравнение

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

237* (*физ., 1979, № 1*). Решить уравнение

$$\cos\frac{x}{2} = 1 + \cos x.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

238 (*Севастополь, 1999, июль, № 2*). Решить уравнение

$$2\cos x + 2\sqrt{5}\cos\frac{x}{2} + 1 = 0.$$

Ответ: $x = \pm 2\arccos\frac{3-\sqrt{5}}{4} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

239 (*физ., 1982, № 1*). Решить уравнение

$$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{x}{4} = 0.$$

Ответ: $\pm 4\arccos\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) + 8\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

240 (*биолог., 1984, № 2*). Решить уравнение

$$\cos 2x + 2\cos x + 7 = 2\sin\left(\frac{7}{2}\pi + x\right) + 4\sin^2\frac{x}{2}.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

241 (*географ., 2001, июль, № 2*). Решить уравнение
$$|\cos x| - \sqrt{3}\sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1.$$
Ответ: $\pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

242 (*психолог., 1990, № 1*). Решить уравнение
$$4\cdot\sin^2\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) - 2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cdot\cos(2x-\pi) + \sqrt{15} - 4 = 0.$$
Ответ: $\pm\dfrac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

243 (*биолог., 2003, июль, № 1*). Решить уравнение
$$2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + 3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = -3.$$
Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

244* (*психолог., 2003, июль, № 2*). Решить уравнение
$$\sin 3x \sin x = -\frac{1}{8}.$$
Ответ: $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1-\sqrt{11}}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

245 (*физ., 1994, май, № 1*). Решить уравнение
$$\sin 2x \cdot \sin 6x = \frac{1}{2}.$$
Ответ: $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4},\ \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi m}{2},\ n, m \in \mathbb{Z}$.

246 (*физ., 1997, июль, № 1*). Решить уравнение
$$\cos 6x + 6\cos 2x = 0.$$
Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

247 (*физ., 2000, май, № 1*). Решить уравнение
$$\frac{\cos 6x}{\cos 2x} - 6\cos 2x + 1 = 0.$$
Ответ: $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3-\sqrt{17}}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

248 (*ИСАА, 2006, № 2*). Решите уравнение
$$4 + 6\cos 2x + 4\cos 4x + 2\cos 6x = 0.$$
Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

249 (*ВМК, 1984, № 2*). Решить уравнение
$$9\cos 3x\cos 5x + 7 = 9\cos 3x\cos x + 12\cos 4x.$$
Ответ: $\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{1}{6} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

250 (*ВМК, 1999, устный*). Решить уравнение

$$\sin x \cdot \sin 3x = 2\cos^2 x - \cos 2x.$$

Ответ: $\varnothing$.

251 (*физ., 2003, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 6\cos 2x = 6.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

252 (*психолог., 1977, № 1*). Решить уравнение

$$3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

253* (*психолог., 1987, № 4*). Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{4} - \cos x} = \sqrt{\frac{3}{4} - \cos 3x}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

254 (*фил., 1990, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{10}\cos x - \sqrt{4\cos x - \cos 2x} = 0.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

255 (*психолог., 1989, № 2*). Решить уравнение

$$\left|\cos^2\frac{x}{2} - \frac{2}{5}\right| = 5\cos x + 1.$$

Ответ: $\pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

256 (*Севастополь, 2002, июль, № 4*). Решите уравнение

$$4^{1-\cos 2x} + 10 = 7 \cdot 4^{\sin^2 x}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

257 (*мех-мат, 1998, июль, № 3*). Решить уравнение

$$3 \cdot 2^{\cos x + 3\sqrt{1-\sin^2 x}} + 11 \cdot 2^{2\cos x} - 34 = 0.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

258 (*ВМК, 2003, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\sqrt{\sin x \cdot \sin 3x} = \cos x.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

259* (*мех-мат, 2001, май, № 4*). Решить уравнение

$$|\cos 2x \sin 6x| + |\cos 6x \sin 2x| = \sin \frac{3\pi}{11}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{3\pi}{88} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.5. Замены $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

260* (*геолог., 1997, июль, № 3*). Решить уравнение

$$5 + \frac{1}{\sin^2(3x)} = 7 \operatorname{ctg}(3x).$$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $\frac{1}{3} \operatorname{arcctg} 6 + \frac{\pi m}{3}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

261* (*фил., 2005, июль, № 5*). Решить уравнение

$$2 + \sin t = 3 \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

262 (*хим., 1997, май, № 3*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x.$$

Ответ: πn, $n \in \mathbb{Z}$.

263* (*почвовед., 2003, май, № 2*). Решить уравнение

$$\sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x = 1.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

264* (*геолог., 2000, заочный тур олимпиады, № 2*). Решить уравнение

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x.$$

Ответ: πn, $\frac{\pi}{4} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

265 (*ВШБ, 2006, № 3*). Решить уравнение

$$\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi m = -\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

266 (*геолог., отд. общей геологии, 1985, № 4*). Решить уравнение

$$5 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x - \cos^2 x = 4.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{arctg} 5 + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

267 (*ИСАА, 1997, июль, № 3*). Решить уравнение

$$5\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4 = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ -\operatorname{arctg} 4 + \pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

268 (*психолог., 1980, № 1*). Решить уравнение

$$\left(\sqrt{3}\right)^{\operatorname{tg} 2x} - \frac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg} 2x}} = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

269 (*геолог., 1999, июль, № 5*). Решить уравнение

$$\left|\operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3\right| = \left|\operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3\right|.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z};\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi m}{2},\ m \in \mathbb{Z}$.

270 (*почвовед., 1979, № 3*). Решить уравнение

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 2x = (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x + 1.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ x = \frac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

271* (*ВМК, 1997, июль, № 3*). Решить уравнение

$$3 + |\sin x - 3\cos x| = 3\sin x + \cos x.$$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{11}}{7} + 2\pi n,\ 2\operatorname{arctg}(4 - \sqrt{11}) + 2\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

272* (*МК-МГУ, 2006, № 2*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\operatorname{tg} 2x + 3\operatorname{ctg} x.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

273 (*фил., 1975, № 3*). Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6} = \frac{2\operatorname{ctg} x + 3}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 1} + \pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

274* (*мех-мат, 1999, март, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt[8]{\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2} - 2x\right)} = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z};\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2},\ m \in \mathbb{Z}$.

3.6. Замена $y = a\sin x + b\cos x$

275* (*географ., 1976, № 3*). Решить уравнение

$$1 - \sin 2x = -(\sin x + \cos x).$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

276 (*географ., 2006, № 3*). Решить уравнение

$$2\sin x - \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ \frac{\pi}{4} + \pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

277 (*ВМК, 2004, устный*). Решить уравнение

$$1 + \sin^3 x + \cos^3 x = 3\sin x \cdot \cos x.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

278 (*биолог., 1976, № 1*). Решить уравнение

$$|\sin x + \cos x| = 1 + 2\sin 2x.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

279 (*геолог., 2000, 2004, устный*). Решите уравнение

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

Ответ: $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

280 (*мех-мат, 2004, июль, № 4*). Решить уравнение

$$\sqrt{-3\sin 2x} = -2\sin 2x - \sin x + \cos x - 1.$$

Ответ: $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ -\frac{5\pi}{12} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

281 (*ИСАА, 2000, № 3*). Решить уравнение

$$3\sin 2x - \frac{1}{2} = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $\frac{11\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ -\frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

282 (*биолог., 2002, май, № 1*). Решить уравнение

$$2\sqrt{2}\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 5\sin x + 5\cos x + 2\sqrt{2} = 0.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ \frac{13\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

283 (*ВМК, 2000, 2003, устный*). Решите уравнение

$$\sin x + 3\operatorname{tg} x = 3.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

284* (*психолог., 2001, июль, № 3*). Решить уравнение

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z};\ 2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z};$ $-\frac{\pi}{2} + 2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

285 (*географ., 2000, май, № 3*). Решить уравнение

$$3(\sin x - 1) + 4\cos x + \cos\left(2x + 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ответ: $-\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

286 (*мех-мат, 2000, заочный тур олимпиады «Абитуриент-2000», № 3*). Решить уравнение:

$$5\cos 2x - 12\sin 2x - 12\sin x + 18\cos x = 17.$$

Ответ: $\pm\arccos\frac{-3+\sqrt{69}}{2\sqrt{13}} - \arccos\frac{3}{\sqrt{13}} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

287 (*хим., 2002, заочный тур олимпиады «Абитуриент-2002», № 7*). Решить уравнение:

$$5\cos 2x + 12\sin 2x - 12\sin x - 18\cos x + 17 = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{2}{\sqrt{13}} + 2\pi n,\ x = \arccos\frac{3}{\sqrt{13}} \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{13}} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

288 (*ФНМ, 2004, заочный тур олимпиады «Абитуриент-2004», № 1*). Решить уравнение:

$$4\sin 2x - 3\cos 2x - 4\sin x - 2\cos x + 1 = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = \pi + 2\pi n,\ x = 2\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $x = 2\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

289 (*хим., 1994, № 3*). Решить уравнение

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}.$$

Ответ: $2\pi n,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

3.7. Более сложные замены

290* (*психолог., 2006, № 3*). Решить уравнение

$$\log_2(3|\sin x| - |\cos x|) + \log_2|\cos x| = 0.$$

ОТВЕТ: $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\pm\operatorname{arctg} 2 + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

291* (*психолог., 2006, № 6*). Решить уравнение

$$9\cos 2x + 9\cos 6x = 36\cos x\cos 3x + 140\sqrt{3}\sin x\sin 2x - 162.$$

ОТВЕТ: $\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.8. Расщепление

292* (*географ., 1994, № 1*). Решить уравнение

$$\sin 2x = \sqrt{2}\sin x.$$

ОТВЕТ: $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, πm, $n, m \in \mathbb{Z}$.

293 (*ВМК, 2000, устный*). Решить уравнение

$$(\sqrt{2}+1)\sin 2x = 2\sqrt{6}\cos x.$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

294 (*ИСАА, 2005, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\sin 4x = 4\sin x \cdot \sin 2x.$$

ОТВЕТ: $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^m \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

295 (*биолог., 1996, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{2}\cdot\sin x + \sin 2x = 0.$$

ОТВЕТ: $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, πm, $n, m \in \mathbb{Z}$.

296 (*ВМК, отд. бакалавров, 2002, июль, № 1*). Решите уравнение

$$\sin 2x - 7\sin x = 0.$$

ОТВЕТ: πm, $m \in \mathbb{Z}$.

297 (*Севастополь, 2004, июль, № 3*). Решите уравнение

$$\sin 2x + 6\cos^2\frac{x}{2} = 3.$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

298 (*физ., 1995, март, № 1*). Решить уравнение
$$\cos 2x - 1 = \operatorname{tg} x.$$
Ответ: $\pi n,\ -\frac{\pi}{4} + \pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

299 (*геолог., 2000, май, № 2*). Решить уравнение
$$5 \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4}.$$
Ответ: $2\pi n + 4\pi n,\ (-1)^m \cdot 4 \arcsin \frac{-5 + 3\sqrt{3}}{2} + 4\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

300 (*почвовед., 1997, май, № 2*). Решить уравнение
$$2 \sin 2x + 2 \sin x - 3 = 6 \cos x.$$
Ответ: $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

301* (*биолог., 2001, июль, № 2*). Решить уравнение
$$\cos \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}.$$
Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

302 (*геолог., 1997, май, № 3*). Решить уравнение
$$\cos \left(x + \frac{7\pi}{3}\right) - \sin \left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$$
Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

303 (*физ., 1998, июль, № 1*). Решить уравнение
$$4 \cos x \cdot \sin 3x \cdot \cos 4x + \sin 2x = 0.$$
Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi m}{7},\ n, m \in \mathbb{Z}$.

304* (*геолог., 1986, № 1*). Решить уравнение
$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x.$$
Ответ: $\frac{5\pi}{12} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

305 (*физ., 2001, май, № 1*). Решить уравнение
$$\cos 3x = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x.$$
Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \pi n,\ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2},\ n, m \in \mathbb{Z}$.

306 (*физ., 1993, июль, № 2*). Решить уравнение
$$\cos(7 - x) = \cos 7x.$$
Ответ: $-\frac{7}{6} + \frac{\pi n}{3},\ \frac{7}{8} + \frac{\pi m}{4},\ n, m \in \mathbb{Z}$.

307* (*почвовед., 1987, № 1*). Решить уравнение

$$5\sin 2x = \sin 9x - \sin 5x.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

308 (*эконом., отд. менеджмента, 2001, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\cos x + \cos 3x = \sqrt{3}\cos 2x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

309 (*ИСАА, 2001, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\sin x + \sin 3x = \sqrt{3}\sin 2x.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

310 (*физ., 2006, № 1*). Решить уравнение

$$\cos 3x = \cos 5x + \frac{4\pi}{3}\cdot\sin x.$$

Ответ: πn, $n \in \mathbb{Z}$.

311 (*физ., 1983, № 1*). Решить уравнение

$$\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

312 (*физ., 1989, № 1*). Решить уравнение

$$\cos x - \cos 3x = \sqrt{7}\sin 2x.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

313 (*физ., 2002, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\cos x - \cos 3x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $(-1)^m\frac{\pi}{6} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

314 (*физ., 2000, март, № 1*). Решить уравнение

$$\sin 3x + \sin 4x = \sin 7x.$$

Ответ: $\frac{2\pi n}{7}$, $\frac{2\pi m}{3}$, $\frac{\pi k}{2}$, $n, m, k \in \mathbb{Z}$.

315 (*физ., 1997, май, № 1*). Решить уравнение

$$\cos 2x + \cos 6x = -\sqrt{3}\cos 4x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{5\pi}{12} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

316 (*физ., 1995, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\sin 5x + \sin x = \sin 3x.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{3}$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

317 (*Ташкент, 2006, № 4*). Решите уравнение

$$2\cos 3x - \cos 5x = \cos x.$$

Ответ: $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

318 (*ВМК, 1999, устный*). Решить уравнение

$$\sin(x-1) = \sin x - \sin 1.$$

Ответ: $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $1 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

319 (*физ., 1999, март, № 1*). Решить уравнение

$$\sin 6x = \cos 5x + \sin 4x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $(-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

320 (*физ., 1999, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\cos 9x + \cos 5x + 2\sin^2 x = 1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi m}{7}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

321* (*биолог., 1991, № 2*). Решить уравнение

$$\sin 2x + \sin 3x + \cos 5x = 1.$$

Ответ: $\frac{2\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4} + \pi m$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $n, m, k \in \mathbb{Z}$.

322 (*ФГУ, 2004, № 2*). Решите уравнение

$$\sin 2x - 2\cos 4x + \sin 6x = 2.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

323 (*хим., 2000, май, № 2*). Решить уравнение

$$\cos 0{,}2x - \cos 0{,}8x + \cos 0{,}6x = 1.$$

Ответ: $\frac{10\pi n}{3}$, $\frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi m}{2}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

324 (*хим., 2006, № 3*). Решить уравнение

$$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{6}\cos x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{7\pi}{24} + \pi m$, $\frac{13\pi}{24} + \pi l$, $n, m, l \in \mathbb{Z}$.

325 (*ВМК, 2001, устный*). Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

326 (*физ., 1996, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\cos 3x - \sin\left(7x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^m \frac{\pi}{30} + \frac{\pi m}{5}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

327 (*хим.+ФНМ, 2000, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

328 (*физ., 2005, июль, № 1*). Решить уравнение

$$2\cos 2x \cdot \cos 7x - \cos 4x = 1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{2\pi n}{5}$; $\frac{2\pi n}{9}$, $n \in \mathbb{Z}$.

329* (*биолог., 2004, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\sin x \sin 3x = \cos 2x \cos 4x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}$, $m \in \mathbb{Z}$.

330 (*физ., 2004, март, № 1*). Решить уравнение

$$6\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 3\cos x - 1 = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

331 (*физ., 2004, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\sin x \cdot \sin 4x + \sin 5x \cdot \sin 2x - \cos 3x = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$, $\frac{\pi}{2} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

332 (*ИСАА, 2002, июль, № 2*). Решите уравнение

$$\sin 4x + 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

333 (*хим., 2002, май, № 1*). Решить уравнение

$$2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

334 (*физ., 1999, май, № 1*). Решить уравнение

$$\cos x - \sin\frac{3x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} = 0.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

335 (*ИСАА, 1999, июль, № 3*). Решить уравнение

$$\cos x + 8\cos 3x \sin 2x = -\cos 7x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $\frac{1}{2} \cdot (-1)^m \cdot \arcsin \frac{2-\sqrt{6}}{2} + \frac{\pi m}{2}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

336 (*физ., 1998, май, № 1*). Решить уравнение

$$\cos 5x - \sin 2x \cdot \cos 3x + \cos x = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi m}{2}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

337 (*фил., 1969, № 2*). Решить уравнение

$$\sin 4x \cdot \sin 6x = 2(\sin x + \sin 5x).$$

Ответ: $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

338 (*Севастополь, 2000, июль, № 3*). Решить уравнение

$$2\sin 11x \cdot \cos x = \sin 10x + 2\cos 6x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.

339 (*геолог., 1991, № 1*). Решить уравнение

$$\sin 7x \cdot \cos x = \sin 6x.$$

Ответ: πn, $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi m}{7}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

340 (*геолог., подгот. отд., 2000, № 2*). Решить уравнение

$$\sin 10x \cdot \cos x = \sin 15x \cdot \cos 6x.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{32} + \frac{\pi n}{16}$, $n \in \mathbb{Z}$.

341 (*почвовед., 1992, № 1*). Решить уравнение

$$2(\sin 6x - \sin 4x \sin 2x) = \cos 6x + \cos 2x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi m}{4}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

342 (*фил., 1981, № 1*). Решить уравнение

$$\sin\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 8x\right) + \cos 6x = 1.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

343 (*геолог., 2003, май, № 1*). Решите уравнение

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2 x = 1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

344 (*физ., 1997, март, № 1*). Решить уравнение
$$\sin x - \sin 3x = 4\sin^2 x \cdot \cos x.$$

ОТВЕТ: $\pi n,\ -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2},\ n, m \in \mathbb{Z}$.

345 (*ВМК, 1988, № 2*). Решить уравнение
$$\cos 7x + \cos x = 2\cos 3x(\sin 2x - 1).$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ \frac{1}{2}(-1)^m \arcsin\frac{-1+\sqrt{17}}{4} + \frac{\pi m}{2},\ n, m \in \mathbb{Z}$.

346 (*биолог., 1997, июль, № 2*). Решить уравнение
$$\sin 2x - \sin 4x = (\cos 2x + 1)\cos 3x.$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ (-1)^m \arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

347 (*биолог., 2002, июль, № 2*). Решить уравнение
$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1.$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}$.

348 (*ИСАА, 1998, июль, № 1*). Решить уравнение
$$\sin^2 x + \sin^2 6x = 1.$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ \frac{\pi}{14} + \frac{\pi m}{7},\ n, m \in \mathbb{Z}$.

349* (*ВМК, 2004, устный*). Решить уравнение
$$\cos 2x + \cos 3x = -2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

ОТВЕТ: $\frac{2\pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 7k,\ k \in \mathbb{Z}$.

350 (*хим., 2005, июль, № 3*). Решить тригонометрическое уравнение
$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 4x + \cos 5x.$$

ОТВЕТ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}$.

351* (*хим., 1995, июль, № 3*). Решить уравнение
$$\cos 2x = 2(\cos x + \sin x).$$

ОТВЕТ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

352 (*геолог., 2000, устный*). Решить уравнение
$$\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \sin^2 x.$$

ОТВЕТ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

353 (*физ., 2003, март, № 1*). Решить уравнение

$$\cos 3x - 2\sin 2x - \cos x - \sin x - 1 = 0.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

354* (*почвовед., 1993, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.9. Отбор корней, расположенных на промежутке

355* (*психолог., 1981, № 3*). Найти все решения уравнения

$$\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2},$$

которые удовлетворяют условию $0{,}4\pi < x < \frac{6\pi}{7}$.

Ответ: $\left\{\frac{35\pi}{84}; \frac{53\pi}{84}; \frac{59\pi}{84}\right\}$.

356* (*МШЭ, 2005, июль, № 5*). Найдите все значения $x \in \left[\frac{2\pi}{3}; 3\pi\right]$, удовлетворяющие уравнению

$$1 + \cos 2x = 4\sin x.$$

Ответ: $x_1 = -\arcsin(\sqrt{2} - 1) + \pi$, $x_2 = \arcsin(\sqrt{2} - 1) + 2\pi$, $x_3 = -\arcsin(\sqrt{2} - 1) + 3\pi$.

357 (*эконом., отд. менеджмента, 2006, № 4*). Найти все решения уравнения $\sin x = \left|2\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\right|$, принадлежащие интервалу $(8; 12)$.

Ответ: $\frac{14\pi}{5}$.

358 (*эконом., 2006, № 3*). Найти все значения x из интервала $(2; 6)$, для которых справедливо равенство

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{12\pi}{7}\right)}.$$

Ответ: $\frac{9\pi}{14}$.

359 (*МШЭ, 2005, июль, № 4*). Найти все решения уравнения

$$6 \cdot \sin\left(\frac{23\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x = 3,$$

принадлежащие отрезку $[-5; 7{,}85]$.

Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = -\frac{3\pi}{2}$.

360* (*геолог., 2006, № 6*). Найдите корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\cdot(\sin 2x+\cos 3x)}{\cos 2x-\sin 3x}=1,$$

расположенные на интервале $(1;2)$.

Ответ: $\frac{11\pi}{30}$.

361 (*ИСАА, 2001, июль, № 2*). Найдите все решения уравнения

$$5\sin^2 2x+8\cos^3 x=8\cos x,$$

удовлетворяющие условиям $\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi$.

Ответ: $x_1=\frac{3\pi}{2}$; $x_2=2\pi$; $x_3=2\pi-\arccos\frac{2}{5}$.

362 (*ИСАА, 1996, № 3*). Найти область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{40+3x-x^2}\cdot\log_5(x^2-9)}{2\sin x-\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\left[-5;-\frac{4\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{4\pi}{3};-3\right)\cup\left(3;\frac{7\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{3};8\right]$.

363 (*геолог., 2001, май, № 4*). Найти все решения уравнения

$$\cos x-\cos 2x-\sin 2x=1,$$

расположенные на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{6}\right]$.

Ответ: $x_1=-\frac{3\pi}{2}$; $x_2=-\frac{\pi}{2}$; $x_3=-\frac{5\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$.

364 (*геолог., 2004, устный*). Вычислите значение $\cos 2x$, если

$$2\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x-3=0,$$

а $\frac{\pi}{2}<x<\pi$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

365 (*геолог., 2001, июль № 2*). Найдите неотрицательные решения уравнения

$$1+\sin 7x=\left(\cos\frac{3x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)^2.$$

Ответ: [1] $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$, $n,m\in\mathbb{Z}_+$.

366 (*географ., 1972, № 2*). Найти все решения уравнения

$$\sin 2x+\cos x+2\sin x=-1,$$

удовлетворяющие условию $0<x<5$.

Ответ: $x_1=\pi, x_2=\frac{7\pi}{6}$.

---

[1] Здесь и ниже $\mathbb{Z}_+$ обозначает множество неотрицательных целых чисел $\{0,1,2,\dots\}$.

367 (*фил., 1970, № 3*). Найти все x, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2} < \left|3x - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \pi$ и являющиеся решением уравнения

$$1 + \cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}$.

368 (*биолог., 1994, № 3*). Найти все решения уравнения

$$3\,\mathrm{tg}^2\left(\pi x - \frac{\pi}{8}\right) = 1,$$

удовлетворяющие условию $\frac{3}{2} < x < 3$.

Ответ: $x_1 = \frac{47}{24}$; $x_2 = \frac{55}{24}$; $x_3 = \frac{71}{24}$.

369 (*биолог., 1995, № 3*). Найти все корни уравнения

$$\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

удовлетворяющие условию $0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$; $x_3 = \frac{5\pi}{6}$; $x_4 = \frac{3\pi}{2}$.

370 (*хим., 1999, май, № 3*). Найти все значения x из отрезка $[0, \pi]$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} 2\sin 3x + 2\cos 4x = 1 + \sqrt{2}, \\ 2\sin 7x - 2\sin x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{12}$; $x_2 = \frac{11\pi}{12}$.

371* (*мех-мат, 2004, март, № 1*). Найти сумму тангенсов всех $x \in (-\pi, \pi)$ таких, что

$$\sin 2x + 5\cos 2x = 3.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

372 (*биолог., 1988, № 1*). Найти наименьший положительный корень уравнения

$$4\sin 3x \sin x + 2\cos 2x + 1 = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

373 (*биолог., 1986, № 1*). Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0.$$

Ответ: $-\pi$.

374 (*почвовед., 2006, № 5*). Найти наименьшее положительное число α, при котором синус α градусов равен синусу α радиан.

ОТВЕТ: $\alpha = \dfrac{180\pi}{180+\pi}$.

375 (*мех-мат, 1997, май, № 3*). Найти ближайший к числу $\dfrac{13\pi}{4}$ корень уравнения

$$\sin x\cos 2x + \sin x + \frac{10}{11}\sin 2x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{30}{44}.$$

ОТВЕТ: $3\pi + \arccos\dfrac{10}{11}$.

376 (*филолог., 1985, № 1*). Найти все решения уравнения

$$2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin x,$$

удовлетворяющие условию $-5 < x < -3$.

ОТВЕТ: $x_1 = -\dfrac{4\pi}{3}$; $x_2 = -\pi$.

377 (*филолог., 1988, № 3*). Найти все решения уравнения

$$\sin 4x + 2\cos^2 x = 1,$$

удовлетворяющие условию $|x| < 1$.

ОТВЕТ: $x_1 = -\dfrac{\pi}{12}$; $x_2 = -\dfrac{\pi}{4}$; $x_3 = \dfrac{\pi}{4}$.

378 (*филолог., 1975, № 4*). Найти сумму корней уравнения

$$\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - 3\cos^3 x}{\cos^2 x},$$

принадлежащих отрезку $1 \leqslant x \leqslant 50$.

ОТВЕТ: 128π.

379 (*биолог., 1985, № 2*). Найти все корни уравнения

$$5\cos 2x + 7\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

ОТВЕТ: $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

380 (*физ., 1980, № 1*). Найти все корни уравнения

$$\sin x\cos\frac{\pi}{8} + \cos x\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2},$$

расположенные в промежутке $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

ОТВЕТ: $x_1 = -\dfrac{31\pi}{24}$; $x_2 = \dfrac{\pi}{24}$; $x_3 = \dfrac{17\pi}{24}$.

381 (*фил., 2003, март, № 2*). Сколько различных корней имеет уравнение

$$\sin 5\pi x + \cos 2\pi x = 0$$

на отрезке $[-2; 0]$?

Ответ: 9.

382 (*ИСАА, 2003, июль, № 4*). Найти корни уравнения

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2(\sqrt{2} + 1)\operatorname{ctg} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

383 (*психолог., 2004, июль, № 3*). Решить уравнение

$$\sqrt{15}\cos x \operatorname{ctg} x + \sqrt{5}\cos x + \sqrt{5}\operatorname{ctg} x = 0$$

и найти сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; \pi]$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, сумма корней равна $\frac{5\pi}{6}$.

384 (*почвовед., 2004, июль, № 5*). Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $0 \leqslant x < \pi$ и являющиеся решениями уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{-\operatorname{tg} x}.$$

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = \frac{3\pi}{4}$.

385 (*ВМК, апрель, 1995, № 3*). Найти все корни уравнения

$$9 \cdot 3^{\sin x} + 2 \cdot 3^{-\sin x} = 6\sqrt{3},$$

удовлетворяющие неравенствам $-\frac{13\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $x_1 = -\pi - \arcsin\log_3\frac{\sqrt{3}+1}{3}$, $x_2 = -2\pi + \arcsin\log_3\frac{\sqrt{3}+1}{3}$.

386 (*мех-мат, 1978, № 2*). Найти все решения уравнения

$$4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3,$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

387* (*мех-мат, 2000, март, № 3*). Найти все корни уравнения

$$\cos x \sin\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\sin x + 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} - \frac{9}{20} = 0,$$

принадлежащие промежутку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: $-\frac{23\pi}{6}, -\frac{19\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, -4\arccos\left(-\frac{9}{10}\right)$.

3.10. Отбор корней по другим условиям

388* (*мех-мат, 1998, март, № 2*). Найти все решения уравнения

$$2\cos\frac{x}{3} + 2(\sqrt{5}-1)\sin\frac{x}{6} = 2-\sqrt{5},$$

удовлетворяющие условию $\cos\dfrac{3x}{4} < 0$.

Ответ: $x = -\pi + 24\pi k,\ x = 7\pi + 24\pi l,\ k, l \in \mathbb{Z}$.

389 (*мех-мат, 1969, № 3*). Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям

$$\cos 13x = \cos x,$$
$$\cos 2x + \sin 5x = 1,$$
$$|x| < 3.$$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = \dfrac{\pi}{6}; x_3 = \dfrac{5\pi}{6}$.

390 (*эконом., отд. менеджмента, 2000, июль, № 5*). Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$, при которых числа

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)},\ 5^{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию.

Ответ: $\dfrac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

391 (*эконом., 2000, июль, № 5*). Найти все значения x, при которых числа

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)},\ 5^{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

Ответ: $\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n,\ \dfrac{5\pi}{12} + 2\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

392 (*физ., 1995, май, № 7*). При каких значениях x числа $a_1 = \cos x$, $a_2 = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $a_3 = -\cos 3x$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше нуля?

Ответ: $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \pi + 2\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

393* (*ВМК, 1979, № 4*). Найти все целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right) = 1.$$

Ответ: $x_1 = -7; x_2 = -31$.

3.11. Отбор корней, связанный с равносильными преобразованиями

3.11.1. Модули

394* (*почвовед., 1999, май, № 2*). Решить уравнение

$$\left|\cos x - \frac{1}{2}\right| = \sin x - \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

395 (*почвовед., 2000, заочный тур олимпиады, № 2*). Решить уравнение

$$\left|\cos x - \frac{1}{2}\right| = \sin x - \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

396 (*почвовед., 2004, май, № 4*). Решить уравнение

$$|\cos x - 2\sin x| + \cos x = 0.$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

397 (*ВКНМ, 1996, апрель, № 3*). Решить уравнение

$$\left|\sin x + \frac{1}{2}\right| = \cos x + \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

398 (*ВКНМ, 1997, апрель, № 1*). Решить уравнение

$$|\sin x| - \sqrt{3}\cos x = 0.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

399 (*геолог., 2001, устный*). Решите уравнение

$$2|\sin x| + \cos x = 1.$$

Ответ: $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pm\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

400 (*геолог., 2004, устный*). Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

401 (*Севастополь, 2001, июль, № 2*). Решите уравнение
$$|\sin x| = \cos x + \frac{1}{2}.$$
ОТВЕТ: $\pm \arccos \dfrac{\sqrt{7}-1}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

402 (*Севастополь, 2000, май, № 5*). Решить уравнение
$$1 + |\cos x| = \cos x + 2\sin x.$$
ОТВЕТ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{4} + \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

403 (*ВМК, 1998, июль, № 3*). Решить уравнение
$$\left|\sin^3 x\right| + 13\cos^3 x - \cos x = 0.$$
ОТВЕТ: $\pi \pm \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

404 (*географ., 1997, май, № 3*). Решить уравнение
$$|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x.$$
В ответе указать сумму корней уравнения, принадлежащих отрезку $[-8\pi; 7\pi]$.
ОТВЕТ: $-\dfrac{70\pi}{3}$.

405 (*ВМК, 1981, № 5*). Найти все решения уравнения
$$|\sin(2x-1)| = \cos x,$$
удовлетворяющие условию $|x| \leqslant 2\pi$.
ОТВЕТ: $x_1 = 1 - \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6}$; $x_3 = 1 - \frac{\pi}{2}$; $x_4 = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}$; $x_5 = \frac{1}{3} + \frac{3\pi}{2}$; $x_6 = \frac{1}{3} - \frac{11\pi}{6}$; $x_7 = 1 + \frac{3\pi}{2}$; $x_8 = \frac{1}{3} + \frac{11\pi}{6}$, $x_9 = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}$.

406 (*мех-мат, 2001, июль, № 2*). Имеет ли уравнение
$$12\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = |4 - 5\cos x|$$
хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$?
ОТВЕТ: нет.

407 (*геолог., 2002, июль, № 5*). Найдите все решения уравнения
$$|\sin 2x| + \cos x = 0,$$
принадлежащие отрезку $\left[-\sqrt{3}; \frac{8}{3}\right]$.
ОТВЕТ: $\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

408 (*психолог., 2000, июль, № 1*). Решите уравнение
$$4x\sin 3x = 3x + |x|.$$
Ответ: $x = 0$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}_+$; $(-1)^m\frac{\pi}{18} + \frac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbb{Z}, m < 0$.

409 (*ФГУ, 2006, № 4*). Решите уравнение
$$\sin|1 - 2x| + \cos x = 0.$$
Ответ: $1 + \frac{\pi}{2} - 2\pi n$, $1 - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi n}{3}$, $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

410 (*мех-мат, 1990, июль, № 2*). Решить уравнение
$$2^{|x-2|\sin x} = \left(\sqrt{2}\right)^{x|\sin x|}.$$
Ответ: $x = \frac{4}{3}$; $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.11.2. Дроби

411 (*почвовед., 2001, май, № 1*). Решить уравнение
$$\sin x = 2\operatorname{ctg} x.$$
Ответ: $\pm\arccos(\sqrt{2} - 1) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

412* (*геолог., отд. геофизики, 1982, № 4*). Найти все решения уравнения
$$\frac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1.$$
Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 5l + 1$, $l \in \mathbb{Z}$.

413 (*географ., 2004, № 2*). Решить уравнение
$$\frac{\sin 3x}{\sin x + \sin 2x} = 0.$$
Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

414 (*физ., 2001, июль, № 1*). Решить уравнение
$$\operatorname{tg}(2x + 5)\cdot\operatorname{ctg}(x + 2) = 1.$$
Ответ: $-3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

415 (*геолог., 1998, устный*). Решить уравнение
$$\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg} x.$$
Ответ: $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 4k$.

416 (*эконом., 1983, № 2*). Найти все x, удовлетворяющие уравнению
$$\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} 5x.$$
Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

417 (*психолог., 1998, июль, № 4*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 6x = \frac{1}{\sin 4x}$$

при $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n = -1, 0, 1, 2$; $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{10}$, $m = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$.

418 (*географ., 2003, май, № 1*). Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{2} - 4x\right) + \operatorname{tg} x = \sqrt{3}\left(1 - \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{ctg} x}\right).$$

Ответ: $\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

419 (*хим., 2002, июль, № 4*). Решить уравнение

$$\left(63\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\cos^2 x = \operatorname{tg}^2 2x + \sin^2 x.$$

Ответ: $\frac{2\pi n}{7}$, $\frac{2\pi m}{9}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq 7l, m \neq 9l$.

420 (*Севастополь, 2001, май, № 5*). Решите уравнение

$$\frac{4\sin x - 3}{\sqrt{7}\sin x + 3\cos x} = 1.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

421 (*Севастополь, 2002, июль, № 5*). Решите уравнение

$$\frac{\sin x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}\cos x - 1} = \frac{\cos x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}\sin x - 1}.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

422 (*ВМК, физ., эконом., подгот. отд., 2000, № 3*). Решить уравнение

$$\frac{5\cos^2 x - 5\cos x - \sin^2 x + 2}{\sqrt{3} - 2\sin x} = 0.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\pm \arccos\frac{1}{3} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

423 (*почвовед., 1996, май, № 4*). Решите уравнение

$$(1 - \cos 8x)\operatorname{tg} x = 6\sin^2 4x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi m$, $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k$, $n, m, k \in \mathbb{Z}$.

424 (*почвовед., 1998, май, № 4*). Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}(2x) = -\operatorname{tg}(3x).$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

425 (*хим., 2001, июль, № 3*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x.$$

Ответ: πn, $n \in \mathbb{Z}$.

426 (*физ., 2002, май, № 2*). Решить уравнение

$$\cos 8x \cdot \operatorname{ctg} x + 2\sin^2 4x = \operatorname{ctg} x.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

427 (*мех-мат, 1994, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\frac{4\sin x - 2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2} = 0.$$

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

428 (*ВМК, 1997, апрель, № 2*). Решить уравнение

$$\frac{6\sin x - 2\cos 2x - 4\cos^2 x - 3}{\sqrt{7}\sin x - 3\cos x} = 0.$$

Ответ: $x = \pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

429 (*ВШБ., 2003, июль, № 3*). Решить уравнение

$$2\operatorname{ctg} x \cdot |\sin x| + 1 = 0.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

430 (*почвовед., 1997, июль, № 3*). Решить уравнение

$$2\sin^2 x - \frac{|\sin x|}{\cos x} = 0.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $x = \pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

431 (*мед., 2003, май, № 2*). Найти все значения x, при которых числа $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\frac{1}{\cos x}$ в указанном порядке являются последовательными членами геометрической прогрессии.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.11.3. Логарифмы

432* (*геолог., 2004, устный*). Решите уравнение

$$\log_{\sin x}\left(\sqrt{3}\cos x\right) = 1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

433 (*ВМК, 2006, июль, № 2*). Решить уравнение
$$\log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\sin 2x - 2\sin x + 1) = \log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\cos x).$$
ОТВЕТ: $\left\{2\pi, \frac{\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \right\}$.

434 (*эконом., 1966, № 2*). Решить уравнение
$$\lg\sin\frac{x}{2} = \lg(\cos x - \sin x) + \lg(\cos x + \sin x).$$
ОТВЕТ: $\frac{\pi}{5} + 4\pi n$, $\frac{9\pi}{5} + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

435 (*олимпиада «Ломоносов-2005», апрель, № 4*). Решить уравнение
$$\log_4(4\,\mathrm{tg}^2\, x) + 1 - \log_2(-8\sin 2x) = 0.$$
ОТВЕТ: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

436 (*ВМК, эконом., физ., подгот. отд., 1998, № 2*). Решить уравнение
$$(\sin 2x - 2\cos x)\cdot\log_2\Big(\log_{\frac{1}{3}}(x+5)\Big) = 0.$$
ОТВЕТ: $x_1 = -\frac{14}{3}$, $x_2 = -\frac{3\pi}{2}$.

437 (*эконом., отд. менеджмента, 2004, июль, № 2*). Решить уравнение
$$2\sin^2(4\pi x)\cdot\log_{\frac{1}{3}}(11x - 4x^2 - 7) = \cos(8\pi x) - 1.$$
ОТВЕТ: $\left\{\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right\}$.

438 (*психолог., 1968, № 1*). Решить уравнение
$$\log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos x - \cos 3x) = \log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos 2x).$$
ОТВЕТ: $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$.

439 (*ВШБ, 2004, июль, № 2*). Решить уравнение
$$\log_3(3\sin x) + \log_{\frac{1}{3}}(\cos x) = 1.$$
ОТВЕТ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

440 (*географ., 1996, июль, № 3*). Решить уравнение
$$\log_{1-2\cos z}(\cos 2z + \sin z + 2) = 0.$$
ОТВЕТ: $\arcsin\frac{-1+\sqrt{17}}{4} + \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

441 (*фил., 1999, июль, № 4*). Решить уравнение
$$\log_{\cos x}(\sin x + \cos 2x) = 0.$$
ОТВЕТ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

442 (*фил., 1969, № 2*). Решить уравнение

$$\log_{\sin x}\left(\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right) = 3.$$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ \frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

443 (*эконом., отд. менеджмента, 2002, июль, № 5*). Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2}} \sin x \cdot \log_{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} x + \log_2(1 + \cos 2x) = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \operatorname{arctg}\sqrt{2} + 2\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

444 (*эконом., 2002, июль, № 5*). Решить уравнение

$$\log_2\left(\cos 3\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) \cdot \log_2(\cos 2x) + \log_2(\sin 5x + \sin x) = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{18} + 2\pi n,\ \frac{17\pi}{18} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

3.11.4. Радикалы

445* (*МК-МГУ, 2006, очный тур-геолог., № 2*). Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{-\cos x}.$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

446 (*геолог., 2006, устный*). Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2 - 2\cos^2 x}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

447 (*соц., 2000, № 4*). Решить уравнение

$$\sqrt{11 - 8\cos^4 x - 4\sin x \cos x} = 3\sin x + \cos x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ \frac{5\pi}{12} + 2\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

448 (*хим., 1999, июль, № 2*). Решить уравнение

$$(\sin x + \cos x - \sqrt{2})\sqrt{-11x - x^2 - 30} = 0.$$

Ответ: $\left\{-5; -6; -\frac{7\pi}{4}\right\}$.

449 (*эконом., отд. менеджмента, 2005, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{\log_2(x^2 - x - 5)} + \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \cos \pi x} = 0.$$

Ответ: $x = -2$.

450 (*эконом., 2005, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \cos 2x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \operatorname{ctg} \frac{x}{4}} = 0.$$

Ответ: $x = \pi + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

451 (*ВМК, отд. бакалавров, 2005, июль, № 3*). Решить уравнение

$$\sqrt{4 \cdot \operatorname{ctg} x - 3} = -\frac{1}{\sin x}.$$

Ответ: $x = \pi + \operatorname{arcctg} 2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

452 (*ВМК, 2005, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15} \cdot \sin x.$$

Ответ: $x = \pi + \operatorname{arcctg} 2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

453 (*биолог., 1998, июль, № 3*). Решить уравнение

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \left(\cos x - \frac{2}{3}\right).$$

Ответ: $x = \arccos \frac{1}{3} - \pi + 2\pi k,\ x = \pi l,\ k, l \in \mathbb{Z}$.

454* (*хим., 2000, заочный тур олимпиады, № 8*). Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}}{\cos x} = 4 \sin x$$

на интервале $0 < x < 2\pi$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{10}; \frac{13\pi}{10}\right\}$.

455 (*географ., 1995, май, № 3*). Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} x \cdot (\cos 2x + 3 \sin x - 2)}{\sqrt{187\pi^2 + 36\pi x - 36x^2}} = 0.$$

Ответ: $\left\{-\frac{7\pi}{6}, -\pi, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, 2\pi, \frac{13\pi}{6}\right\}$.

456 (*географ., 2002, июль, № 3*). Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3}(\cos x - \sin x)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.

457 (*мех-мат, 1997, июль, № 1*). Решить уравнение

$$\left(2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1\right) \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x} = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = \pi l,\ k, l \in \mathbb{Z}$.

458 (*ВМК, 1998, апрель, № 3*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{\sin x - 2\cos x - 1} = 0.$$

Ответ: $\pi + 2\pi k$, $\frac{3\pi}{2} - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

459 (*эконом., 1998, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \sqrt{3\sin x} = 0.$$

Ответ: πk, $\pi - \arcsin\frac{\sqrt{37}-1}{6} + 2\pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

460 (*мех-мат, 1995, июль, № 3*). Решить уравнение

$$\sqrt{\sin 3x} \cdot \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$, $x = \frac{19\pi}{12} + 2\pi l$, $x = \pi m$, $x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$ $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$.

461 (*мех-мат, 1998, май, № 1*). Решить уравнение

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{\sin 2x + (\sqrt{3}+1)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + 3} = 0.$$

Ответ: $x = \pm\frac{11\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

462 (*ВМК, 1999, апрель, № 3*). Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1 + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{8}} = -\sin x \cdot \cos x.$$

Ответ: $x = \frac{23\pi}{36} + \pi k$, $x = \frac{35\pi}{36} + \pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

463 (*психолог., 1995, июль, № 3*). Решить уравнение

$$\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2 + \cos x} = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

464 (*геолог., 2003, устный*). Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x} = \sqrt{2}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

465 (*геолог., 1999, устный*). Решить уравнение

$$\cos x = \log_{\operatorname{tg} x}\sqrt{-\frac{\cos x}{|\sin x|}}.$$

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

466 (*геолог., 2005, июль, № 4*). Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{\cos 2x + x - 11} = \sqrt{x - 15 - 5\cos x}.$$

Ответ: 5π.

467 (*почвовед., 1996, июль, № 4*). Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{x + \sin x} = \sqrt{x - \sin 2x},$$

удовлетворяющие неравенству $-2\pi < x < 2\pi$.

Ответ: $\left\{0; \pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$.

468 (*почвовед., 2002, июль, № 5*). Найти все значения x, принадлежащие интервалу $(-\pi; \pi)$ и являющиеся решениями уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{-2\sin x}} = \sqrt{-2\cos x}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}\right\}$.

469 (*геолог., 1998, май, № 3*). Найти все решения уравнения

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0,$$

лежащие на отрезке $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant -\pi$.

Ответ: $x_1 = -\frac{11\pi}{8}; x_2 = -\frac{21\pi}{16}$.

470 (*мех-мат, 2003, май, № 2*). Решить уравнение

$$\cos\frac{x}{2}\sqrt{5\cos(2x - \pi) + 8\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 5} + \sin\frac{x}{2}\sqrt{2\cos x} = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\arccos\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\pi k,\ n, l \in \mathbb{Z}$.

471 (*геолог., 2003, июль, № 6*). Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 3x} \cdot \log_2\left(\operatorname{tg}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{2\pi}{3} + \pi k, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$.

472 (*эконом., 1997, июль, № 5*). Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечетной, периодической с периодом 4, и на промежутке $-2 \leqslant x \leqslant 0$ ее значения вычисляются по правилу $f(x) = 2x(x + 2)$. Решить уравнение

$$\frac{2f(-3 - x) - 3}{\sqrt{f\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) - \sqrt{2}}} = 0.$$

Ответ: $-\frac{1}{2} + 8n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

473 (*ВМК, 2002, апрель, № 4*). Найдите $\operatorname{tg}|x|$, если известно, что

$$\left(5\sin x+3\cos x+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{11}-3\sqrt{\sin|x|}\right)=0.$$

Ответ: $\operatorname{tg}|x|=1$ или $-\frac{7}{23}$.

3.12. Графический метод и метод оценок

474* (*фил., 1969, № 7*). Указать все корни уравнения

$$x^2+1=\cos x.$$

Ответ: $x=0$.

475 (*почвовед., 2001, май, № 3*). Решить уравнение

$$x^2-\cos 2x^2+1=0.$$

Ответ: $x=0$.

476 (*почвовед., 2001, май, № 3*). Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos^2 z}=1-z^2.$$

Ответ: $z=0$.

477 (*ВМК, 1999, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{1+2x+x^2}=2\sin 2x.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}$.

478* (*мех-мат, 2006, № 4*). Решить уравнение

$$|1-2\sin x+\cos x|+2\sin x+1=\cos 2x.$$

Ответ: $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

479 (*эконом., 1970, № 2*). Решить уравнение

$$|5-6x|-4\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)-4\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)+\frac{8\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{3}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{3}\right)}=0.$$

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

480 (*ВМК, 2005, устный*). Решить уравнение

$$2x\sin\frac{\pi x^2}{x^4+4}+\frac{x^2}{2}+1=0.$$

Ответ: $x=-\sqrt{2}$.

481* (*ИСАА, 1993, № 5*). Решите уравнение

$$\sin^2 x + 3x^2 \cos x + 3x^2 = 0.$$

ОТВЕТ: $x = 0$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

482* (*географ., 1996, май, № 3*). Решить уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{3\pi-1}{2}x\right) = 1.$$

ОТВЕТ: $x = 0$.

483* (*Севастополь, 2001, июль, № 7*). Решите уравнение

$$8\left|\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x\right| = \cos 18x + 12\cos 9x + 27.$$

ОТВЕТ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

484 (*ВШБ., 2003, апрель, № 7*). Решить уравнение

$$(x-1)^6(\sin 4x + \sin 4)^{\frac{1}{6}} + (x+1)^6(\sin 2 - \sin 2x)^{\frac{1}{6}} = 0.$$

ОТВЕТ: $x = -1, x = \frac{\pi}{2} - 1 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

485 (*психолог., 1993, № 3*). Найдите все решения уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin 3x = \cos 3x - \sqrt{2}$$

на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$.
ОТВЕТ: $x_1 = -\frac{\pi}{12}, x_2 = \frac{23\pi}{12}$.

486 (*ВМК, 2004, июль, № 3*). Решить уравнение

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) - \sin\left(3x - \frac{5\pi}{16}\right) = -1.$$

ОТВЕТ: $x = \frac{15\pi}{16} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

487 (*геолог., 2005, устный*). Найдите множество корней уравнения

$$\sqrt{\sin(2005x)} + \sqrt{\cos x} = 0.$$

ОТВЕТ: $\varnothing$.

488 (*ВМК, 2001, устный*). Решить уравнение

$$\cos 6x + \sin\frac{5}{2}x = 2.$$

ОТВЕТ: $\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

489 (*мех-мат, 1963, № 5*). Доказать, что уравнение

$$\sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx = n - 1$$

при любом целом $n > 2$ не имеет решения.

490 (*психолог., 2002, № 5*). Решить уравнение

$$\cos 6x - 3\cos 5x + \cos 4x - 4\cos x + 5 = 0.$$

Ответ: $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

491 (*географ., 1998, июль, № 4*). Решить уравнение

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2 + 5\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

492 (*геолог., 2002, устный*). Решите уравнение

$$\sqrt{x \cdot \operatorname{tg}^3 2x} = \sin^2 x - 1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

493 (*ВМК, 2001, 2002, устный*). Решите уравнение

$$\log_2(5 + 3\cos 4x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

494* (*мех-мат, 1999, май, № 1*). Решить уравнение

$$(x^2+4)\lg\sin^2 3x + x^2\lg\cos^2 2x = 4\lg\left(\cos 2x \sin^3 3x\right).$$

Ответ: $x = \sqrt{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

495 (*ВМК, 2002, устный*). Решите уравнение

$$\log_2^2(2 + \sin x) - 2\cos^3 x \cdot \log_2(2 + \sin x) + \cos^2 x = 0.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

496 (*ВМК, 2000, 2002, устный*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 3x = \operatorname{tg} x + 11\operatorname{tg} 3x - 30{,}5.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

497 (*ФНМ, 2000, заочный тур олимпиады, № 2*). Решить уравнение

$$\sin^5 x + \cos^5 x = -1.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

498 (*ВМК, 2001, 2002, устный*). Решите уравнение

$$\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x = 2.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

499 (*ВМК, 1986, № 5*). Решить уравнение

$$\sin 3x - 2\sin 18x \cdot \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2\cos x.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

500 (*ВМК, 2004, устный*). Решить уравнение

$$(x+y)(x+y+2\cos x) + 2 = 2\sin^2 x.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{2} - \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$.

501 (*эконом., отд. кибернетики, 1967, № 4*). Решить уравнение

$$2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos y = 3 + \cos 2y.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \pi(2n \pm k)\right),\ k, n \in \mathbb{Z}$.

502 (*ВМК, 2002, устный*). Решить уравнение

$$2x \sin \frac{\pi x^2}{x^4+4} + \frac{x^2}{2} + 1 = 0.$$

Ответ: $x = -\sqrt{2}$.

503* (*мех-мат, 1965, № 4; ВМК, 2000, устный*). Решить уравнение

$$\cos x + \cos y = \frac{3}{2} + \cos(x+y).$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi m; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

504 (*ВМК, 2004, устный; мех-мат, 1965, № 4*). Найти все x и y, удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y).$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi m\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

505* (*ВМК, 2000, устный*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x).$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

506* (*хим., 2000, май, № 5*). Решить уравнение

$$2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{2^{\frac{\cos 2x}{2}}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

507 (*ВМК, 1999, устный*). Решить уравнение

$$\frac{1}{2^{\sin^2 x}} + \frac{1}{2^{\cos^2 x}} = \sin x + \cos x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

508 (*ВМК, 1999, июль, № 5*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 14x + 3 \operatorname{ctg} 14x + \sin 6x - 2\sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}+1}.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

509* (*мех-мат, 1965, № 4*). Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2} \sin y.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

510 (*хим., 1998, № 4*). Решить уравнение

$$\sin x\,(\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 x = 2.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

511 (*мех-мат, 1965, № 4; ВМК, 2004*). Решить уравнение

$$\sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 3x = \sin x \cdot \sin^2 3x.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; πm, $m \in \mathbb{Z}$.

512 (*хим., ФНМ, 2003, июль, № 2*). Решить уравнение

$$\cos^2 8x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 8x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

513 (*эконом., 1990, июль, № 5*). Найти все корни уравнения

$$\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right)} \cdot \sin(\pi x) - \cos(\pi x) = 2,$$

расположенные на отрезке $[-3; 2]$.

Ответ: $x_1 = -\frac{4}{3}$; $x_2 = \frac{2}{3}$.

514 (*мех-мат, 1997, март, № 5*). Решить систему

$$\begin{cases} |x+1| - 1 \leqslant x, \\ (2^x + 2^{x-2} + 2^{2-x}) \cos \frac{\pi x}{2} + \cos(\pi x) + 3 + 2^{2x-3} = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2$.

515 (*геолог., 1992, № 6*). Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 1 - 2x \sin(\pi y) + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} = (41 - yz)\,(\cos(2\pi y) + \cos(\pi z))^2.$$

Ответ: $\left(1, \frac{513}{2}, 128\right)$, $\left(-1, -\frac{513}{2}, -128\right)$.

516 (*соц., 2006, № 3*). Найдите все решения (x, y, z) уравнения

$$x^2 - 2x\sin\pi y - \cos 2x + 2\cos^2 x + \sqrt{-4xz - z^2 - 3} = (1 + 2xz)\log_2^2 \frac{2y}{z}.$$

ОТВЕТ: $\left(1, -\frac{3}{2}, -3\right), \left(-1, \frac{3}{2}, 3\right)$.

3.13. Тригонометрические подстановки

517* (*ВМК, 2000, устный*). Решить уравнение

$$\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x.$$

ОТВЕТ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

518 (*ВМК, 2004, устный*). Решить уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{35}{12}.$$

ОТВЕТ: $x_1 = \frac{4}{5}$; $x_2 = \frac{3}{5}$.

519 (*геолог., отд. геофизики, 1981, № 6*). Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

ОТВЕТ: $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

520* (*хим., 2000, заочный тур олимпиады «Абитуриент МГУ-2000», № 5*). Решить уравнение

$$\sqrt{1 - x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

ОТВЕТ: $\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$.

521* (*эконом., отд. менеджмента, 2003, апрель, № 4*). Решите уравнение

$$6x \cdot \sqrt{1 - 9x^2} + 18x^2 - 3\sqrt{2}x - 1 = 0.$$

ОТВЕТ: $\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{12}$.

522* (*биолог., 1985, № 5*). Сколько корней на отрезке $[0, 1]$ имеет уравнение

$$8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1?$$

ОТВЕТ: 3 корня: $x_1 = \cos\frac{\pi}{9}$, $x_2 = \cos\frac{2\pi}{7}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

523* (*мех-мат, 2002, олимпиада, 10 кл., № 5*). Существуют ли положительные числа x, y, z, удовлетворяющие трем неравенствам

$$\sqrt{3}(x-y) < 1+xy,$$
$$\sqrt{3}(y-z) < 1+yz,$$
$$\sqrt{3}(1+xz) < x-z?$$

ОТВЕТ: нет.

524* (*МК-МГУ, 2007, № 9*). Найти все тройки положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих системе

$$\sqrt{3}(x-y) \leqslant 1+xy,$$
$$\sqrt{3}(y-z) \leqslant 1+yz,$$
$$\sqrt{3}(1+xz) \leqslant x-z.$$

ОТВЕТ: система имеет бесконечно много решений, которые задаются формулой $\left(u; \dfrac{\sqrt{3}u-1}{\sqrt{3}+u}; \dfrac{u-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}u}\right)$, где $u > \sqrt{3}$ — произвольный параметр.

525* (*мех-мат, 2002, март, № 5*). Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} - 9xy = 2, \\ \dfrac{z}{y} - 9yz = 6, \\ \dfrac{3x}{z} - 3zx = 2. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{tg} t, \dfrac{1}{3}\operatorname{tg} 2t, \operatorname{tg} 4t\right)$, где $t = \pm\dfrac{\pi}{7}, \pm\dfrac{2\pi}{7}, \pm\dfrac{3\pi}{7}$.

526* (*мех-мат, 1958*). Доказать, что если $x^2 + y^2 = 1$, то справедливо неравенство

$$-\sqrt{2} \leqslant x + y \leqslant \sqrt{2}.$$

527 (*ВМК, 1992, устный*). Доказать, что если $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, то $|ac - bd| \leqslant 1$.

528 (*ВМК, 2003, 2006, устный*). Известно, что $m^2 + n^2 = 1$, $k^2 + l^2 = 1$ и $mk + nl = 0$. Найти значение $mn + kl$.

ОТВЕТ: 0.

529 (*эконом., отд. кибернетики, 1985, № 5*). Среди всех решений (x, y, z, v) системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geqslant 6 \end{cases}$$

найти такие, при которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

ОТВЕТ: $x = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$, $y = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$, $z = \dfrac{9}{\sqrt{13}}$, $v = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

530* (*географ., 2000, заочный тур олимпиады «Абитуриент МГУ-2000», № 10*). Переменные x, y, u, v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ u^2+v^2=25. \end{cases}$$

При условии, что сумма $xu+yv$ минимальна, найти: а) максимальное значение суммы $x+v$; б) минимальное значение суммы $y+u$.

ОТВЕТ: а) $\sqrt{34}$; б) $-\sqrt{34}$.

531* (*ВШБ, 2004, июль, № 7*). Найти наибольшее значение выражения $3x-2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $4x^2+y^2=16$.

ОТВЕТ: 10.

532 (*ИСАА, 2004, № 6*). Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{w^2}{144}$, если величины x, y, z, w удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y-20=0, \\ z^2+w^2-2w-143=0, \\ xw+yz-x+w+2z-61 \geqslant 0. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\dfrac{4201+120\sqrt{601}}{3600}$ и $\dfrac{4201-120\sqrt{601}}{3600}$ соответственно.

533* (*ВМК, 2001, устный*). Пусть $f(t)=\sqrt{1+t^2}-t$. Какие значения может принимать выражение

$$f(x)\cdot f(y)+f(x)\cdot f(z)+f(y)\cdot f(z)$$

при следующих ограничениях:

$$xy+xz+yz=1, x>0, y>0, z>0?$$

ОТВЕТ: это выражение равно 1.

534* (*ВМК, 2004, устный*). Найти область значений функции

$$y=\frac{x}{x^2+1}.$$

ОТВЕТ: $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

3.14. Уравнения, содержащие суперпозиции

535* (*физ., 2003, май, № 1*). Решить уравнение

$$2\sin\left(6\cos x\cdot\cos 2x-3\cos 3x\right)=1.$$

Ответ: $\pm\arccos\left(\frac{\pi}{18}\right)+2\pi n$; $\pm\arccos\left(\frac{5\pi}{18}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

536 (*физ., 2002, март, № 1*). Решить уравнение

$$2\sin^2 4x\cdot\operatorname{tg}(\sin x)+\cos 8x=1.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{4}$; $(-1)^n\arcsin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

537 (*физ., 2001, март, № 2*). Решить уравнение

$$2\sin\left(3x^2\right)\cdot\cos 4x+\sin\left(4x-3x^2\right)=0.$$

Ответ: $\frac{-2\pm\sqrt{4+3\pi n}}{3}$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

538 (*олимпиада «Ломоносов-2006», 2006, май, № 3*). Решить уравнение

$$\cos(x^2+x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

Ответ: $x=\pm\sqrt{2\pi n}$, $x=-1\pm\sqrt{1+2\pi m}$, $n,m\in\mathbb{Z}_+$.

539 (*эконом., отд. полит. экономии, 1982, № 4*). Найти все решения уравнения

$$\sin\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right)=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $(-1)^n\arcsin\frac{1}{8}+\pi n$, $(-1)^m\arcsin\frac{5}{8}+\pi m$, $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{7}{8}+\pi k$, $n,m,k\in\mathbb{Z}$.

540 (*геолог., отд. общей геологии, 1982, № 4*). Найти все решения уравнения

$$\sin\left(\frac{13}{9}\pi\sin x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $(-1)^n\arcsin\frac{12}{13}+\pi n$, $(-1)^{m+1}\arcsin\frac{3}{13}+\pi m$, $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{6}{13}+\pi k$, $n,m,k\in\mathbb{Z}$.

541 (*геолог., 1999, май, № 1*). Решить уравнение

$$\cos\left(6\sin x\right)=-1.$$

Ответ: $\pm\arcsin\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

542 (*ВМК, 2004, устный*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)-\operatorname{ctg}(\pi\sin x)=0.$$

Ответ: $x=-\arccos\frac{3}{5}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

543 (*ВМК, 1991, № 2*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right) = 1.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\,\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

544 (*геолог., 1998, устный*). Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x^2\right) = -\operatorname{ctg} 30^\circ.$$

Ответ: $\pm\sqrt{-\frac{\pi}{3} + \pi n},\ n \in \mathbb{N}$.

545 (*ВМК, 2001, устный*). Решить уравнение

$$\cos\frac{\pi x^2}{1 + x^2} = 0.$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = -1$.

546 (*геолог., 1999, устный*). Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}(2\sqrt{x}) = \operatorname{ctg} x.$$

Ответ: $(1 + \sqrt{1 + \pi n})^2,\ n \in \mathbb{Z}_+$.

547 (*почвовед., 2000, июль, № 5*). Решите уравнение

$$\sin\left(\pi\sqrt{8 - x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{287}}{6},\ \pm\frac{\sqrt{263}}{6},\ \pm\frac{\sqrt{119}}{6}$.

548 (*хим., 2003, май, № 3*). Решить уравнение

$$\sin\frac{(x + 1)\pi}{4x^2 - 4x + 2} = \cos\frac{(x - 2)\pi}{4x^2 - 4x + 2}.$$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},\ x_{4,5} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$.

549* (*ВМК, 2001, июль, № 4*). Решить уравнение

$$\cos\left(\pi\left(x + 7\sqrt{x}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(4x + \sqrt{x}\right)\right) = 1.$$

Ответ: $x = (4k + 1)^2,\ k \in \mathbb{Z}_+$.

550 (*эконом., 2001, июль, № 5*). Решите уравнение

$$\sqrt{3}\cos\left(\pi\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{6}{x} - x - 4}\right) + 3\sin\left(\pi x \cdot \sqrt{\frac{6}{x^2} - \frac{4}{x} - 1}\right) = \sqrt{12}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\sqrt{356} - 12}{6},\ x_2 = \frac{\sqrt{164} - 12}{6}$.

551 (*фил., 1988, № 3*). Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\cos \pi x^2 = \cos\Big(\pi\left(x^2+2x+1\right)\Big).$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

552 (*географ., 1997, июль, № 2*). Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$\cos\Big(\pi\left(x^2-x+1\right)\Big) = \cos\Big(\pi\left(x-1\right)\Big).$$

Ответ: $1-\sqrt{3}$.

553 (*соц., 2004, апрель, № 5*). Найти все решения уравнения

$$\sin\sqrt{3x+\pi} = 0,$$

каждое из которых меньше любого решения уравнения

$$\cos\sqrt{x-4\pi} = 0.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi^2-\pi}{3}, \dfrac{4\pi^2-\pi}{3}$.

554 (*мех-мат, 1982, № 4*). Найти все значения x, для которых выражение

$$\sqrt{3x^4-2-x^8}\cdot\sin\left(\pi(2x+16x^2)\right)$$

не обращается в нуль.

Ответ: $-\sqrt[4]{2} < x < -1$, $x \neq \dfrac{-1-\sqrt{1+16n}}{16}$, $n = 15, \ldots, 20$; $1 < x < \sqrt[4]{2}$, $x \neq \dfrac{-1+\sqrt{1+16n}}{16}$, $n = 19, \ldots, 25$.

555 (*МК-МГУ, 2005, I тур, № 7; мех-мат, 2004, олимпиада, 10 кл., № 5*). Решить уравнение

$$\sin(x+\sin x) + \cos(x+\cos x) = 0.$$

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.15. Функциональные уравнения

556 (*мех-мат, 2005, устный*). Функция f с областью определения $\mathbb{Z}$ удовлетворяет равенствам

$$f(1) = \cos 1, \quad f(n+1) = f(n)\cdot\cos 1 - \sin n\cdot\sin 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для любого ли натурального (целого) n верно неравенство $f(n) > -1$?

Ответ: да ($f(n) = \cos n$).

557 (*мех-мат, 2005, устный*). Найти наименьшее значение функции f, определенной на множестве натуральных чисел и удовлетворяющей равенствам:

$$f(1)=\cos 2,\quad f(n+1)=f(n)\cdot\cos 1-\sqrt{1-(f(n))^2}\cdot\sin 1,\quad n\in\mathbb{N}.$$

ОТВЕТ: $\cos 3$ (для четных n $f(n)=\cos 4$; для нечетных n, больших 1, $f(n)=\cos 3$).

3.16. Задачи с параметрами

558* (*почвовед., 1995, май, № 5*). Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2\cos 2x-4a\cos x+a^2+2=0$$

не имеет решений.

ОТВЕТ: $a<-2; a>2$.

559* (*геолог., отд. геофизики, 1979, № 3*). Найти все A, при которых уравнение

$$2\sin x+3\cos x=A$$

имеет решение.

ОТВЕТ: $-\sqrt{13}\leqslant A\leqslant\sqrt{13}$.

560* (*ВМК, 1997, устный*). Для каждого a решить уравнение

$$\sin^8 x+\cos^8 x=a.$$

ОТВЕТ: если $a\notin\left[\frac{1}{8}, 1\right]$, то $\varnothing$;
если $a\in\left[\frac{1}{8}, 1\right]$, то $x=\pm\frac{1}{4}\arccos\left(-7+4\sqrt{2(a+1)}\right)+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

561* (*ВМК, 1999, устный*). При каких a уравнение

$$\sin x+\cos x+\sin x\cos x=a$$

имеет решения?

ОТВЕТ: $-1\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

562* (*ВМК, 2006, апрель, № 6*). Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2(1+\cos 2x)^2\cdot|\sin(2x+a)|=$$
$$=2\cos 2x-2\cos(4x+2a)-\cos(6x+2a)-\cos(2x+2a)$$

имеет решения.

ОТВЕТ: $a=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

563 (*физ., 1996, июль, № 7*). Для каждого значения a найти число решений уравнения
$$a\,\mathrm{tg}\,x + \cos 2x = 1,$$
принадлежащих промежутку $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

ОТВЕТ: если $a < -1$, то 3 решения; если $a = -1$, то 5 решений; если $-1 < a < 0$, то 7 решений; если $a = 0$, то 3 решения; если $0 < a < 1$, то 7 решений; если $a = 1$, то 5 решений; если $a > 1$, то 3 решения.

564 (*физ., 1999, май, № 7*). При каких значениях a уравнение
$$\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$
имеет ровно одно решение на промежутке $0 \leqslant x < 2\pi$?

ОТВЕТ: $a = -2$, $a = 1$.

565 (*физ., 2001, июль, № 7*). Для каждого значения a найти все решения уравнения
$$\cos 2x + 2\sin^2(x + a) + 2 - \sin a = 0,$$
принадлежащие промежутку $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

ОТВЕТ: если $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $x = \frac{3\pi}{2}$; если $a \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то уравнение не имеет корней на промежутке $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

566 (*почвовед., 1998, июль, № 6*). Определить:

а) при каких значениях a существует такое число b, что уравнение
$$5\cos x + \sin x + \cos(x - b) = a$$
имеет решение;

б) при каких значениях a это уравнение имеет решения при любом значении b.

ОТВЕТ: а) $-\sqrt{26} - 1 \leqslant a \leqslant \sqrt{26} + 1$; б) $-\sqrt{26} + 1 \leqslant a \leqslant \sqrt{26} - 1$.

567 (*фил., 1998, № 6*). При каких значениях параметра a уравнение
$$\sin^2(x + 6) - (a - 1)\sin(x + 6)\cdot\sin\pi x + (a - 1)\sin^2\pi x = 0$$
имеет единственное решение?

ОТВЕТ: $1 < a < 5$.

568 (*Севастополь, 2005, № 9*). Заданы числа A и $\theta \in [0; \pi]$. Докажите, что графики функций $y = A\cos x$ и $y = \sin(x - \theta)$ для значений x из отрезка $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ пересекаются в двух точках. Найдите расстояние между абсциссами этих точек.

ОТВЕТ: π.

569 (*мех-мат, 1996, март, № 4*). При каких значениях a уравнение

$$2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right) = a + \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right)$$

имеет хотя бы одно решение?

ОТВЕТ: $[-1; 2)$.

570 (*мех-мат, 1996, май, № 4*). При каком значении a сумма различных корней уравнения

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = a(\operatorname{ctg} x + 2\cos 3x),$$

принадлежащих отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{22\pi}{3}\right]$, максимальна?

ОТВЕТ: $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

571 (*географ., 2003, июль, № 5*). При каких значениях параметра a уравнение

$$(\sin x - \log_4 a)(\sin x - 2 + 2a) = 0$$

имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$?

ОТВЕТ: $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}, \frac{3}{4} < a \leqslant 4, a = 1$.

572 (*Севастополь, 2004, июль, № 9*). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos^2 x + \cos x = \frac{1}{2}|\sin a| + \frac{3}{2}\sin|a|$$

имеет ровно два решения на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Укажите эти решения.

ОТВЕТ: $2\pi k \leqslant |a| < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < |a| \leqslant \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. При этом

$$x = \pm\arccos\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 2|\sin a| + 6\sin|a|}}{2}\right).$$

573 (*мех-мат, 1993, май, № 4*). При каких значениях a, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, уравнение

$$\sqrt{2\cos(x+a) - 1} = \sin 6x - 1$$

имеет решения?

ОТВЕТ: $a_1 = -\frac{5\pi}{12}; a_2 = -\frac{\pi}{12}$.

574* (*географ., 1999, июль, № 4*). Найти все значения параметра a, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x + 4a\sin x - \cos x - 2a = 0$$

найдутся два корня, разница между которыми равна $\frac{3}{2}\pi$.

ОТВЕТ: $\pm\frac{1}{4}; \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

575 (*географ., 1995, июль, № 5*). Сколько корней на отрезке $x \in [-\pi; \pi]$ имеет уравнение

$$x^2 + a = 3b\cos x,$$

где число b есть наименьшее возможное значение суммы квадратов корней квадратного трехчлена

$$x^2 - x\sqrt{5 - 3c^2} + \frac{3}{2} - c^2?$$

ОТВЕТ: два корня, если $-1 - \pi^2 \leqslant a < 1$; один корень, если $a = 1$; корней нет, если $a < -1 - \pi^2$ или $a > 1$.

576* (*ВМК, 2005, июль, № 5*). Найти все значения параметра a, принадлежащие отрезку $[0, \pi]$, при которых уравнение

$$\sin^5(3x + a) = \cos(\pi \cdot [x])$$

имеет на отрезке $[1, \pi]$ нечетное число решений. (Здесь $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $[x] \leqslant x$.)

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{3\pi - 6}{2}$, $\frac{5\pi - 12}{2} < a \leqslant \frac{7\pi - 18}{2}$.

577 (*ВМК, отд. бакалавров, 2005, июль, № 5*). Найти все значения параметра a, принадлежащие отрезку $[0, \pi]$, при которых уравнение

$$\sin^3(3x + a) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cdot [x]\right)$$

имеет на отрезке $[1, \pi]$ ровно два решения.

ОТВЕТ: $0 \leqslant a < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi - 6}{2} < a \leqslant \frac{5\pi - 12}{2}$.

578 (*мех-мат, 2002, март, № 6*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$6\sin\left(2x - \frac{11}{12}\pi a\right) + 6\sin\left(\frac{11}{12}\pi a\right) + 3a^3 - 7a^2 + 3a + 1 =$$
$$= 2\left(3a^2 - 4a - 1\right)\cos\left(x - \frac{11}{12}\pi a\right) + 6(a-1)\sin x,$$

будучи отложенными на тригонометрической окружности, образуют на ней ровно четыре точки, причем эти точки являются вершинами трапеции.

ОТВЕТ: $\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{6}{11}; \frac{6}{11}; \frac{18}{11}$.

579 (*мех-мат, 2003, март, № 6*). Найти все значения α, при каждом из которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$\cos\alpha\cos 3x - \sin 3\alpha\cos x + 2\sin 2\alpha\cos 2x = 3\sin\alpha - \cos 3x$$

не превосходит $\frac{\pi}{3}$.

ОТВЕТ: πn, $n \in \mathbb{Z}$.

580 (*географ., 2003, май, № 6*). При каких значениях q числа

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{243}} 3};\ \sqrt{16-q^2}\cos 3x + q\sin 3x;\ 15 - q\cdot 2^{1-|y|}$$

существуют, но в указанном порядке не образуют арифметическую прогрессию ни при каких x и y?

Ответ: $[-4; 1)$.

581 (*мех-мат, 1990, июль, № 4*). Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a_1 = 0; a_2 = 2\sin 1$.

582 (*геолог., 2003, май, № 6*). При каких значениях a уравнение

$$2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a_1 = 0, a_2 = -\frac{2}{3}$.

583 (*хим.+ФНМ, 2002, июль, № 6*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2^{-x^2}\cdot 4^x + \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $a_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

584* (*почвовед., 2001, июль, № 6*). При каких значениях параметра b уравнение

$$\operatorname{tg}|b| = \log_2(\cos x - |x|)$$

имеет ровно один корень?

Ответ: $b = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

585* (*ВМК, 1998, апрель, № 5*). Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a\cdot\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = -\frac{3}{2}$.

586 (*географ., 1999, июль, № 4*). Найти все значения параметра a, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x + 6a\cos x - \sin x - 3a = 0$$

найдутся два корня, разница между которыми равна $\frac{3}{2}\pi$.

Ответ: $a = \pm\frac{1}{6}; \pm\frac{\sqrt{2}}{6}$.

587 (*мех-мат, 1968, № 6*). Найти все те числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения

$$(2a+1)\cos^3 x + (16a^3 - 4a + 1)\cos x - 2\cos^7 x = 0$$

является корнем уравнения

$$\cos^6 x = (1+a)\cos^2 x + 8a^3 - 2a$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ: $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$.

588 (*хим., 2004, июль, № 6*). Найти все значения параметров a и b, при которых среди корней уравнения

$$\cos^{\frac{1}{2}} x + \left(a^2 - ab + b^2 - 3\right)^2 - \left(4a^2 - 4 - b^2 + 2ab\right)(x+1)2^x = 0$$

есть два различных корня с равными абсолютными величинами.

Ответ: $(a,b) = (1,2)$, $(-1-2)$, $\left(\frac{7}{\sqrt{31}}, -\frac{4}{\sqrt{31}}\right), \left(-\frac{7}{\sqrt{31}}, \frac{4}{\sqrt{31}}\right)$.

589 (*мех-мат, 1994, май, № 6*). Найти все значения параметра $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для каждого из которых уравнение

$$\sin 2x + \sin x + \sin(x-\alpha) = \sin\alpha + \sin(x+\alpha)$$

имеет ровно 5 различных корней на промежутке $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

Ответ: $a = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2} < a < -\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3} < a < -\frac{\pi}{4}$.

590 (*биолог., 1995, июль, № 6*). Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x^2 - 6|x| - a\right)^2 + 12\left(x^2 - 6|x| - a\right) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два корня.

Ответ: $a_1 = -3; a_2 = 9$.

591 (*мех-мат, 1999, март, № 6*). Найти все значения a из промежутка $[-2; 1]$, при каждом из которых расстояние на числовой оси между любыми различными корнями уравнения

$$\sin 2x + |2a+1| \sin x + |a| = 2|a| \cos x + \sin x + |2a^2 + a|$$

не меньше, чем $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{2+\sqrt{2}}{2} \leqslant a \leqslant -1$; $a = -2; 0; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}$.

592 (*мех-мат, 1999, июль, № 3*). При каких значениях φ все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \varphi\right) - \cos\left(\frac{3x}{2} + \varphi\right) = \sin\frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

Ответ: $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

593 (*мех-мат, 2000, июль, № 5*). Найти все a, при которых уравнение

$$(|a|-1)\cos 2x + (1-|a-2|)\sin 2x + (1-|2-a|)\cos x + (1-|a|)\sin x = 0$$

имеет нечетное число корней на интервале $(-\pi; \pi)$.

Ответ: $0 \leqslant a < 1$, $1 < a \leqslant 2$, $a = 3$.

594 (*хим., 2001, май, № 6*). Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - 2a(\sin x + \sin 2x + \sin 3x) + \\ + \cos x - \cos 3x + 2a^2 = 0.$$

Ответ: если $a = 0$, то $x = \pi n$ или $x = \frac{2\pi m}{3}$, $n, m \in \mathbb{Z}$; если $a \neq 0$, то множество решений — пустое.

595 (*биолог., 2001, июль, № 6*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \cos\left(x\sqrt{6-2a^2}\right), \\ \cos x = \left(a - \frac{2}{3}\right)\sin\left(x\sqrt{6-2a^2}\right) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение на отрезке $[0; 2\pi]$.

Ответ: $-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}; \pm 1; \pm\sqrt{3}$.

596 (*географ., 2002, май, № 6*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a-1)\cos^2 x-(a^2+a-2)\cos x+2a^2-4a+2=0$$

имеет более одного решения на отрезке $\left[0;\frac{4\pi}{3}\right]$.

ОТВЕТ: $-\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{3}{10}$, $a=1$.

597 (*физ., 2004, июль, № 7*). При каких значениях a уравнение

$$\big(1+\sin(3ax)\big)\sqrt{5\pi x-x^2}=0$$

имеет ровно 5 различных решений?

ОТВЕТ: $-\frac{13}{30}\leqslant a<-\frac{9}{30}$, $\frac{11}{30}<a\leqslant\frac{15}{30}$.

598 (*ВМК, 2002, апрель, № 5*). При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}\sin\left(2\pi\sqrt{a^2-x^2}\right)=0,\\ 2\cdot 3^{|ax|}+3^{2-|ax|}\leqslant 19\end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

ОТВЕТ: $1<|a|\leqslant\sqrt{2}$.

599 (*геолог., 2001, июль, № 8*). При каких значениях параметра $a\geqslant 1$ уравнение

$$\sin\left(\frac{4}{13}x\right)\cdot\operatorname{tg}x=0$$

имеет ровно шесть различных корней на отрезке $[2a\pi;(a^2+1)\pi]$? Укажите эти корни.

ОТВЕТ: $a=3$, $\sqrt{10}\leqslant a\leqslant\sqrt{11}$.

600 (*Севастополь, 2000, май, № 9*). При каких значениях параметра b уравнение

$$\left(7\sin x+3\cos x-\sqrt{59+b}\right)\cdot\log_b\left(16^{\sin x}-4^{\sin x+\log_4(2b)}+b^2+1\right)=0$$

имеет хотя бы одно решение?

ОТВЕТ: $\frac{1}{4}\leqslant b<1$, $1<b\leqslant 4$.

601 (*физ., 1996, июль, № 8*). Для каждого значения a найти число решений уравнения

$$a\operatorname{ctg}x-1=\cos 2x,$$

принадлежащих промежутку $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

ОТВЕТ: 2 решения, если $a<-1$, $a=0$, $a>1$; 4 решения, если $a=\pm1$; 6 решений, если $-1<a<0$, $0<a<1$.

602 (*ВМК, 2004, апрель, № 6*). При всех значениях параметра a решить уравнение

$$|x-3|-(1-2a)x^2+(3-4a)x+6a-4=$$
$$=\sin(|x-3|+6a-4)-\sin\left((1-2a)x^2-(3-4a)x\right).$$

Ответ: если $a \geqslant \frac{1}{2}$, то корней нет;
если $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$, то два корня:

$$x_1=\frac{2a-1+\sqrt{-4a(2a-1)}}{2a-1};\quad x_2=\frac{2a-2-\sqrt{-8a^2+12a-3}}{2a-1};$$

если $a=\frac{1}{3}$, то три корня: $x_1=-1$; $x_2=5$; $x_3=3$;

если $\frac{3-\sqrt{3}}{4} < a < \frac{1}{3}$, то четыре корня:

$$x_{1,2}=\frac{2a-1\pm\sqrt{-4a(2a-1)}}{2a-1};\quad x_{3,4}=\frac{2a-2\pm\sqrt{-8a^2+12a-3}}{2a-1};$$

если $a=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$, то три корня: $x_1=2+\sqrt{3}$; $x_{2,3}=1\pm\sqrt{2\sqrt{3}}$;
если $0 < a < \frac{3-\sqrt{3}}{4}$, то два корня: $x_{1,2}=\frac{2a-1\pm\sqrt{-4a(2a-1)}}{2a-1}$;
если $a=0$, то один корень: $x=1$;
если $a<0$, то корней нет.

603 (*геолог., 2004, устный; хим., 2002, заочный тур, № 10; мех-мат, 1964*). При каких a уравнение

$$1+\sin^2 ax=\cos x$$

имеет единственное решение?

Ответ: a — иррациональное число.

604 (*мех-мат, 2005, июль, № 5*). Пусть X — сумма корней уравнения

$$a\cos x=\sqrt{2}+2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

на промежутке $[0;2\pi)$, а Y — сумма корней уравнения

$$a\cos 2y-2\sin 2y=a-3\sin y$$

на том же промежутке. Найти все значения a, при которых $\operatorname{ctg}\frac{X-Y}{2}=\sqrt{3}$.

Ответ: $a_1=0; a_2=4+\sqrt{3}$.

605 (*ФНМ, 2003, апрель, № 5*). Дана арифметическая прогрессия $a_1, \ldots, a_{81}$ с первым членом $a_1 = \frac{\pi}{4}$ и разностью $\frac{3\pi}{10}$. Найти количество членов a_n этой прогрессии, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x \sin a_n + y \cos a_n = 1, \\ x \operatorname{tg} a_n - y \operatorname{ctg} a_n = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

Ответ: 8.

606 (*олимпиада «Ломоносов-2006», 2006, май, № 7*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x - 2a \sin x - |2a - 1| + 2 = 0$$

имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: $a \leqslant -2$, $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = 2$.

Глава 4

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

4.1. Метод последовательного исключения неизвестных

607* (*эконом., отд. полит. экономии, 1986, № 2*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4\sin y = -11, \\ -2x + 5\sin y = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-3; (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

608 (*геолог., отд. общей геологии, 1979, № 3*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}y + \sqrt{12}\operatorname{ctg} x = 4, \\ 2\sqrt{2}y - \sqrt{27}\operatorname{ctg} x = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \sqrt{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

609 (*эконом., отд. кибернетики, 1972, № 2*). Найти $\operatorname{tg} x$, если

$$\begin{cases} y\sin x + \cos x = 2, \\ -4\sin x + 2y\cos x = -y. \end{cases}$$

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

610 (*геолог., отд. общей геологии, 1979, № 3*). Найти все пары действительных чисел x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x - y = 2\pi. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{7\pi}{4} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

611 (*геолог., отд. геофизики, 1979, № 4*). Найти все пары действительных чисел x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 3\sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi - 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

612* (*фил., 2000, № 4*). Решить систему

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(\pi n; \frac{\pi}{4}-\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\left(\frac{\pi}{4}+\pi m; -\pi m\right)$, $m \in \mathbb{Z}$.

613* (*фил., 1977, № 2.С*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y=5-2\sqrt{6}, \\ x+y=\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{5\pi}{24}+\pi n; \frac{\pi}{24}-\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\left(\frac{\pi}{24}+\pi m; \frac{5\pi}{24}-\pi m\right)$, $m \in \mathbb{Z}$.

614* (*Севастополь, 1999, июль, № 6*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+3y=-\pi, \\ 4\cos x \cdot \cos y+1=0. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n; -\frac{2\pi}{3}-\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

615* (*геолог., отд. геофизики, 1981, № 4*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y=\frac{1}{4}, \\ 3\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} y. \end{cases}$$

ОТВЕТ:

$$\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k+n), \frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right), \quad \left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n), -\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right),$$
$$k, n \in \mathbb{Z}.$$

616* (*почвовед., 1994, май, № 4*). Найти все решения системы

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y=\frac{1}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y=-\frac{1}{4}, \end{cases}$$

удовлетворяющие неравенствам

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}\right)$.

617 (*географ., 1987, № 4*). Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x+y)=0, \\ \cos(x+y)=1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $-2\pi \leqslant y \leqslant -\pi$.
ОТВЕТ: $(-\pi, -\pi)$, $(\pi, -\pi)$, $(0, -2\pi)$.

618* (*географ., 1975, № 5*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \dfrac{y-5}{2}, \\ 2x + 3\log_{\frac{4x}{\pi}} \sqrt[3]{\dfrac{\pi^2 x}{16}} = \dfrac{3}{4} \log_{\sqrt[4]{\frac{4x}{\pi}}} \left(\dfrac{4x^2}{\pi}\right) - 4^{3\log_8 \sqrt{y}}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{3\pi}{4}; 5 - \frac{3\pi}{2}\right)$.

619* (*мех-мат, 1975, № 2*). Найти все пары действительных чисел (x, y), удовлетворяющих условию $x > 0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} \sin\left((x-\sqrt{\pi})^2 + y^2\right) = 0, \\ \log_{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2\log_{2\pi}\sqrt{x^2+y^2}} = 2. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(\sqrt{\pi}; \sqrt{\pi})$, $(\sqrt{\pi}; -\sqrt{\pi})$, $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{7\pi}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{\sqrt{7\pi}}{2}\right)$.

620* (*психолог., 1974, № 3*). Решить систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\pi y) = \dfrac{1+\operatorname{tg}(\pi x)}{1-\operatorname{tg}(\pi x)}, \\ 2x^2 + y^2 = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(-\frac{5}{12}; -\frac{1}{6}\right)$.

621 (*ВМК, 2005, апрель, № 2*). Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin\left(2(x+y)\right) = 1, \\ xy = 9. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $$\left(\frac{\frac{\pi}{4} + \pi n \pm \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)^2 - 36}}{2}; \frac{\frac{\pi}{4} + \pi n \mp \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)^2 - 36}}{2}\right),$$
$n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -2, -1, 0, 1$.

622 (*ВМК, 1975, № 2*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x + \sin^2 y) = 0, \\ x - 3\sin^2 y = -2. \end{cases}$$

ОТВЕТ:

$$\left(-\frac{2}{7}; \pm\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\left(-\frac{2+3\pi}{7}; \pm\arcsin\sqrt{\frac{4-\pi}{7}} + \pi m\right), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

623* (*геолог., 2002, май, № 4*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin(2x+y)\sin y = \cos 2x, \\ \sin 2x - \sin 2y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{3\pi}{8}+\pi m; -\frac{\pi}{8}+\pi l\right)$, $\left(\frac{\pi}{8}+\pi m; \frac{5\pi}{8}+\pi l\right)$, $m, l \in \mathbb{Z}$.

624* (*ВМК, 1973, № 1*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2\cos^2 y \sin x. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; (-1)^{m+1}\frac{\pi}{3}+\pi m\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; (-1)^{m}\frac{\pi}{3}+\pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

625* (*геолог., 2004, июль, № 7*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos(x+y)} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \dfrac{\cos y}{\cos(x+y)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

626* (*ВМК, 2003, устный*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 2, \\ x + 2y + \sin z = -3. \end{cases}$$

Ответ: $(-2; -1; \frac{\pi}{2}+2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

627* (*ВМК, 2006, устный*). Пусть α, β, γ — углы треугольника. Известно, что $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ — последовательные натуральные числа. Найти углы α, β, γ.
Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 2\operatorname{arcctg} 2$, $\gamma = 2\operatorname{arcctg} 3$.

628* (*фил., 2003, июль, № 2*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos y \cdot 3^{x^3+8} = 27^{x^2+2x} \cdot |\cos y|, \\ 2\sin y = \log_2 x. \end{cases}$$

Ответ: $(1, 2\pi k)$, $\left(\frac{1}{4}; -\frac{\pi}{2}+2\pi l\right)$, $\left(4; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $k, l, n \in \mathbb{Z}$.

4.2. Метод новых неизвестных

629* (*географ., 2005, июль, № 1*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 12\sin^2 x - \sin^2 y = 3, \\ 6\sin x + \cos y = -2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; 2\pi m\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; 2\pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

630 (*геолог., отд. общей геологии, 1971, № 1*). Найти все решения системы

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin y = \sqrt{3}\cos 30^\circ, \\ 2\cos 2x - \sin y = \sin 540^\circ. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

631 (*эконом., отд. кибернетики, 1979, № 1*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pi \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n; (-1)^m\frac{\pi}{6} + \pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

632 (*ВМК, 1977, № 3*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3 - \sqrt{2})\operatorname{tg} 5y = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3 - \sqrt{2})\sin(-2x) = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi m}{5}\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

633* (*психолог., 1999, июль, № 3*). Решить систему

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ \cos x \sin y = \dfrac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n; (-1)^m\frac{\pi}{4} + \pi m\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n; (-1)^m\frac{\pi}{3} + \pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

634 (*геолог., отд. общей геологии, 1973, № 5*). Найти все пары значений (x,y), являющиеся решениями системы

$$\begin{cases} \sin x + \dfrac{1}{\cos y} = 2\sqrt[3]{14}, \\ \sin x \cdot \dfrac{1}{\cos y} = \sqrt[3]{196} - 2 \end{cases}$$

и удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 0 < x < \pi, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ответ: (a,b), $(a,-b)$, $(\pi-a,b)$, $(\pi-a,-b)$, где $a=\arcsin\left(\sqrt[3]{14}-\sqrt{2}\right)$, $b=\arccos\dfrac{1}{\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}}$.

635 (*эконом., отд. кибернетики, 1976, № 2*). Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2(x-y) - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}(x-y) + 1 = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ -\pi \leqslant y \leqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}, -\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$.

636 (*геолог., отд. геофизики, 1976, № 2*). Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}} \cdot \left(\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1\right) = 0, \\ \cos^2 x + \dfrac{1}{4}\operatorname{tg} y - 1 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \operatorname{arctg} 2 + \pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

637 (*эконом., отд. полит. экономии, 1976, № 4*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg}^2 2y = 9, \\ \dfrac{1}{2}\log_{\operatorname{tg} 2y}(x^2+5) - 2\log_{\operatorname{tg} 2y} 3 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm 2, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

638* (*физ., 2001, май, № 5*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |\sin y|\cdot\sin y=\dfrac{|\cos x|}{\cos x}, \\ |\cos x-1|^2+|\sin y|^2=4. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\arccos(1-\sqrt{3})+2\pi n, -\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$, $n,m\in\mathbb{Z}$.

639 (*мех-мат, 1981, № 2*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cdot\cos y=0, \\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0. \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi m\right)$, $n,m\in\mathbb{Z}$.

640* (*хим., 2002, май, № 2*). Решить систему

$$\begin{cases} 3\,\mathrm{tg}\,x+40\log_3 y^2=163, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\log_y 9}=\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; 9\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

641* (*ВМК, 2001, апрель, № 2*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x+\sin y=0, \\ 10\cos x+5\cos y=9. \end{cases}$$

Ответ:

$$\left(\arccos\frac{13}{15}+2\pi n, -\arccos\frac{1}{15}+2\pi m\right),$$
$$\left(-\arccos\frac{13}{15}+2\pi n, \arccos\frac{1}{15}+2\pi m\right),$$
$$n,m\in\mathbb{Z}.$$

642* (*ВМК, 2002, июль, № 5*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{13\cos x+98\sin y}-\sqrt{13\cos x+28\sin y}=4, \\ 2\sqrt{13\cos x+28\sin y}-\sqrt{70\sin y+8}=2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n, (-1)^m\arcsin\frac{4}{5}+\pi m\right)$, $n,m\in\mathbb{Z}$.

643* (*мех-мат, 1993, июль, № 3*). Решить систему

$$\begin{cases} (\cos y+\sin x-1)\left(\mathrm{tg}^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{tg}^2\left(y+\frac{\pi}{6}\right)\right)=0, \\ (\sin x-\cos y)(2-\sin 2y+\sin y)=0. \end{cases}$$

Ответ:

$$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi m\right),\ \left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; -\frac{\pi}{6}+2\pi l\right),\ \left(\frac{4\pi}{3}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi l\right),$$
$$n,m,k,l\in\mathbb{Z}.$$

644* (*физ., 1966, № 3*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = 3, \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 6, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \operatorname{arctg} 2 + \pi m; \frac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2 - \pi(k+m)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\operatorname{arctg} 2 + \pi m; \frac{5\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2 - \pi(k+m)\right)$, $k, m \in \mathbb{Z}$.

645* (*биолог., 1988, № 5*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3}\cos\frac{\pi x}{2} + \sin\frac{\pi(2x-y-2)}{6}\right)\left(\sqrt{3-x^2-y^2+2x} - 3\right) = 0, \\ 3\cos\frac{\pi x}{2} + \sin\frac{\pi(2x-y)}{6} = \sqrt{3}\cos\frac{\pi(2x-y)}{6}. \end{cases}$$

Ответ: $(1;0)$.

4.3. Графический метод и метод оценок

646* (*эконом., 1997, июль, № 1*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left|\sin\frac{\pi(x+y)}{4}\right| + \left|1 - \sin\frac{\pi(x-y)}{4}\right| = 0, \\ \sqrt{4-|x|-|y+2|} = \sqrt{4-|x|-|y+2|}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-1;-3);(1;-1)\}$.

647 (*эконом., отд. менеджмента, 1997, июль, № 2*). Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \left|\sin\frac{\pi(x+y)}{2}\right| + (x-y-2)^2 \leqslant 0, \\ |2x+3| \leqslant 2. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-2;-4);(-1;-3)\}$.

648* (*фил., 1999, июль, № 5*). Решить систему

$$\begin{cases} \cos^3\left(z + 4y + \frac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{\sin\left(2z + 2y - \frac{\pi}{4}\right)} = 0, \\ \cos\left(3z + \frac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{\sin^3\left(4z - 2y - \frac{\pi}{4}\right)} = 0. \end{cases}$$

Ответ: $z = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} + \pi m$, $y = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6} - \frac{\pi m}{2}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

649* (*МК-МГУ, 2006, № 7; мех-мат, 2005, олимпиада, 10 кл., № 3*). При каких натуральных n система

$$\begin{cases} \cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n = 0, \\ \sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n = 0, \\ |x_i - x_j| \leqslant \pi, i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

имеет решение?

ОТВЕТ: n — четное натуральное число.

650* (*Севастополь, 2002, май, № 5*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right), \\ \operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m\right)$, $k, m \in \mathbb{Z}$.

651* (*мех-мат, 1996, июль, № 4*). Решить систему

$$\begin{cases} \log_2 \sin x - \log_2 2y + |\log_2 \cos x - \log_2 2y| = -2, \\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2y^2} \leqslant 1. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}; t\right)$, где $t \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2 - 2\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)^2}}$.

652 (*эконом., отд. полит. экономии, 1982, № 6*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y \cdot \sin(x + y) + \frac{1}{8} = 0, \\ x = y + z. \end{cases}$$

ОТВЕТ:

$$\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); -\frac{\pi}{3} + \pi(n-k); \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$
$$\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); -\frac{2\pi}{3} + \pi(n-k); \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$
$$\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); \frac{\pi}{3} + \pi(n-k); -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$
$$\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); \frac{2\pi}{3} + \pi(n-k); -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$
$$n, k \in \mathbb{Z}.$$

653 (*хим., 1979, № 5*). Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y\sin x = \log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\ (6y^2+2y)\cdot\left(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}\right) = 25y^2+6y+1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $|y| \leqslant 1$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n, -1\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

654 (*биолог., 1979, № 5*). Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} (\sqrt{3}+1)\big(1+\cos(xy)\cdot\sin(xy)\big) = (\sqrt{3}+1)\sin^2(xy)+\cos(2xy), \\ x^2y^2-y^2+1=0, \\ \frac{1}{x^2}+y^2 \leqslant 6. \end{cases}$$

Ответ:

$$\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}, \frac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}\right), \quad \left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}, -\frac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}\right),$$
$$\left(-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}}, \frac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}\right), \quad \left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}}, -\frac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}\right).$$

655 (*ВМК, 1985, № 5*). Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2-2y^2+2z^2+10z+6y+\frac{\sqrt{3}}{2}x-17}+$$
$$+\sqrt{3x^2-2\sqrt{3}\,(\cos\pi y+\cos\pi z)\,x+4} = 0.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 7; -9\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 1; 1\right)$.

656* (*хим., 1994, № 5*). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+2x\sin y+1=0, \\ 8|x|y(x^2+y^2)+\pi^3+4\pi=0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(1; -\frac{\pi}{2}\right)$.

657* (*ВМК, 2000, устный*). Пусть $A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Известно, что

$$\begin{cases} \cos A = \operatorname{tg} B, \\ \cos B = \operatorname{tg} C, \\ \cos C = \operatorname{tg} A. \end{cases}$$

Доказать, что

$$\sin A = \sin B = \sin C = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

4.4. Задачи с параметрами

658* (*Севастополь, 2002, май, № 7*). При всех значениях a решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x \cdot \cos 2y = (a-1)^2, \\ \cos x \cdot \sin 2y = a + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: если $a \neq 0$, то решений нет; если $a = 0$, то множество решений системы имеет вид: $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(2n+m)\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{(2n-m)\pi}{4}\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

659* (*хим., 2000, заочный тур олимпиады, № 6*). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5 \cdot 6^{-\sin 3x} + 6 \cdot 7^{\cos y} = 72, \\ 6^{1-\sin 3x} + 7^{1+\cos y} = c. \end{cases}$$

Ответ: если $c \neq 85$, то $\varnothing$; если $c = 85$, то $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; 2\pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

660* (*хим., 1975, № 5*). Найти все значения параметра b, при которых система

$$\begin{cases} \cos(y-b) - 2\cos x = 0, \\ \log_2(by - y^2) = 2\log_4(-x) - \log_{\frac{1}{2}}(3y) \end{cases}$$

имеет нечетное число решений.

Ответ: $b \in \left(\frac{3\pi}{2} + 6\pi k; \frac{9\pi}{2} + 6\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

661* (*МШЭ, 2005, июль, № 7*). Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2+1)b = y + \cos 2x, \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $b = 2$.

662 (*ВМК, 1997, устный*). При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ \cos(x-y) + xy = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a = 0$.

663 (*ВМК, 2002, апрель, № 5*). При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \cos\left(3\pi\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1, \\ 2^{|ax|+1} + 2^{3-|ax|} \leqslant 17 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

Ответ: $\frac{4}{3} < |a| \leqslant \sqrt{3}$.

664* (*мех-мат, 1995, июль, № 6*). Найти все значения параметра α из отрезка $[0; 2\pi]$, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z(x+y+z) - \sin\alpha = 0, \\ (x+1)\sin^2\frac{\alpha}{2} + y^2\sqrt{x} + \alpha^2\sqrt{z} + \sin\frac{3}{2}\alpha = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $0, \pi, 2\pi$.

665 (*мех-мат, 1998, июль, № 5*). При каких значениях параметра α система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2\sin^2(\pi x) - 3\sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi\alpha) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \frac{3}{2}\sin^2(\pi x) - 2\sin^2(\pi y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi\alpha) = 0, \\ \log_2\left(1 + 4\sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{4} - \frac{\pi}{16}\right) - x^2 - y^2\right) \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $\frac{9}{4} + 4n$, $n \in \mathbb{Z}$.

666* (*эконом., отд. менеджмента, 2004, июль, № 6*). Найти наибольшее значение u, при котором имеет решение система

$$\begin{cases} \pi^2 u + 9y^2 = 9\pi y, \\ y^2\left(18 + 2\pi^2 - \pi^2\sin^2 3x\right) + 2\pi^2\left(1 + y^2\right)\cos 3x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $u_{\max} = 2$.

667 (*эконом., 2004, июль, № 6*). Найти наибольшее значение u, при котором имеет решение система

$$\begin{cases} u + 16\sin^2\frac{x}{10} + \operatorname{ctg}^2\frac{x}{10} = 4\sin^2 y, \\ y^2\left(18 + 2\pi^2 - \pi^2\sin^2 3x\right) + 2\pi^2\left(1 + y^2\right)\cos 3x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $u_{\max} = -4$.

Глава 5

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

5.1. Простейшие неравенства и непосредственно сводящиеся к ним

668* (*хим., 1970, № 3*). Найти все значения x, лежащие в промежутке $-1 < x < 4$ и удовлетворяющие неравенству

$$\log_{0,75}\sin x \geqslant \log_{\frac{9}{16}} 0{,}75.$$

Ответ: $\left(0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right)$.

669* (*психолог., 1996, июль, № 3*). Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-6\sin^2 2x - 2\sin 2x \cdot \cos 2x + 8 - \sqrt{3}}}.$$

Ответ: $\mathbb{R}$.

670* (*ВМК, 1993, № 2*). На отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x}.$$

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$.

671* (*геолог., 2005, устный*). Решите неравенство

$$\log_{\sin x}\cos x \leqslant 1.$$

Ответ: $\left(2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

672 (*ФГП, 2006, № 4*). Решите уравнение

$$\log_{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}\left|1 - 2\cos\frac{\pi}{6}\right| = \log_{\cos\left|\frac{x}{2}\right|}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.$$

Ответ: $-\pi + 4\pi n < x < 4\pi n$, $4\pi n < x < \pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

673* (*почвовед., 2001, июль, № 5*). Решить неравенство

$$2\log_\pi(\sin x) \cdot \log_\pi(\sin 2x) - \log_\pi^2(\sin 2x) \leqslant \log_\pi^2(\sin x).$$

Ответ: $\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

674* (*ВМК, 2000, июль, № 1*). Решить неравенство
$$\sin x \cdot \sin|x| \leqslant \frac{1}{2}.$$
Ответ: $\left(-\infty; \frac{\pi}{4}\right]$; $\left[\frac{3\pi}{4} + \pi n; \frac{5\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

675* (*хим., 2000, заочный тур олимпиады, № 3*). Решить неравенство
$$\log_{|\sin x|}(x^2 - 14x + 73) > \frac{2}{\log_5 |\sin x|}.$$
Ответ: $(6; 8) \setminus \left\{2\pi; \frac{5\pi}{2}\right\}$.

676* (*эконом., 2004, июль, № 2*). Решить неравенство
$$1 + \sin^2(3\pi x) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(5x - x^2 - 6) \leqslant \cos(6\pi x).$$
Ответ: $\left\{\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right\}$.

677* (*мех-мат, 1995, март, № 4*). Найти все значения $x \in [0; \pi]$, при которых выражения
$$\operatorname{tg} x \text{ и } \frac{1}{\cos 2x} - 2\cos 2x$$
имеют разные знаки.
Ответ: $0 < x < \frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{8}$.

5.2. Метод новой неизвестной

678* (*ВМК, 2004, устный*). Решить неравенство
$$5|\sin x| + 12\cos x \geqslant 13.$$
Ответ: $\pm \arccos \frac{12}{13} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

679* (*геолог., отд. общей геологии, 1984, № 3*). Найти $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\cos 2\alpha \leqslant -\frac{7}{8}$ и $\cos \alpha \leqslant -\frac{1}{4}$.
Ответ: $\pm \frac{\sqrt{10}}{4}$.

680* (*геолог., отд. геофизики, 1984, № 3*). Найти $\sin \alpha$, если $\sin 2\alpha \geqslant \frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg} \alpha \leqslant \frac{1}{3}$.
Ответ: $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$.

681* (*географ., 1970, № 5*). Решить неравенство

$$2\sin^2 2x + 3\cos 2x < 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

682* (*биолог., 1971, № 4*). Решить неравенство

$$2\cos 8x \geqslant 3 + 4\sin 4x.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}.$

683 (*эконом., полит. эконом., 1971, № 3*). Решить неравенство

$$11\sin x + \cos 2x - 6 \geqslant 0.$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \in \mathbb{Z}.$

684* (*мех-мат, 1966, № 2*). Решить неравенство

$$5 + 2\cos 2x \leqslant 3|2\sin x - 1|.$$

Ответ: $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \in \mathbb{Z}$, или $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

685* (*физ., 1965, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1} > 2.$$

Ответ: $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n < x < -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

686* (*ВМК, 2006, апрель, № 4*). Найти все решения неравенства

$$\operatorname{tg} x > \frac{9 - 3\cos 2x}{3\sin 2x - 2},$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{8} \leqslant x < \frac{\pi}{2}.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ (или, что то же самое, $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\pi}{2}$).

687* (*ИСАА, 1994, № 4*). Решите неравенство

$$2\sin x - 1 \leqslant \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

688* (*хим., 1972, № 5*). Найти все значения x, для которых выражение

$$(\cos x - \cos 5x)(2\sin x + 3\cos x + 4)$$

положительно.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,$
$2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

689 (*геолог., 2000, июль, № 4*). Решить неравенство

$$4\cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x \leqslant 3.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

690* (*мех-мат, 1968, № 3*). Решить неравенство

$$\frac{1 - 4\sin^2 x}{\cos 2x + \cos x} \leqslant 2.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m \leqslant x < \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi k < x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

691 (*мех-мат, 1966, № 2*). Решить неравенство

$$4^{\sin^2 \pi x} + 3 \cdot 4^{\cos^2 \pi x} \leqslant 8.$$

Ответ: $\frac{1}{4} + n \leqslant x \leqslant \frac{3}{4} + n$, $n \in \mathbb{Z}$.

692 (*ВМК, 2004, устный*). Доказать, что неравенство

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \leqslant 3$$

не выполняется ни при каком α.

693 (*Севастополь, 2005, № 6*). Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1} > 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

694 (*мех-мат, 1970, № 1*). Решить неравенство

$$\log_2(1 + \cos 4x) \leqslant 1 + \log_{\sqrt{2}} \sin x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $x \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

695* (*мех-мат, 1966, № 2*). Решить неравенство

$$\left(\log_{\operatorname{tg} x} 3\right)^2 \leqslant \log_{\operatorname{tg} x}\left(3\operatorname{tg}^2 x\right).$$

Ответ: $\pi n < x \leqslant \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$, $\frac{\pi}{3} + \pi m \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

696* (*олимпиада «Ломоносов-2006», 2006, май, № 10*). Решить неравенство

$$4(1 - \operatorname{tg} x)^{2004} + (1 + \operatorname{tg} x)^{2006} \geqslant 2^{2006}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{2} + \pi m < x \leqslant -\frac{\pi}{4} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

697* (*Севастополь, 2002, июль, № 6*). Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(2\sqrt{1-\sin x}-2\sin x\right)>-1$$

для x из отрезка $[0;\pi]$.

ОТВЕТ: $\left[0;\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cup\left(\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\pi\right]$.

698 (*ВМК, 1972, № 2*). Решить неравенство

$$\frac{1}{\cos^2 x}-1\geqslant\frac{\left|\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right|+\sqrt{3}}{\operatorname{ctg}x}.$$

ОТВЕТ: $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\pi n$, $\frac{\pi}{3}+\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

699* (*ВМК, 1971, № 2*). Найти все решения неравенства

$$\sqrt{\sin 2x}<\cos x-\sin x,$$

удовлетворяющие условию $|x|<\pi$.

ОТВЕТ: $0\leqslant x<\frac{\pi}{12}$, $-\frac{7\pi}{12}<x\leqslant-\frac{\pi}{2}$.

700 (*психолог., 1992, № 1*). Решить неравенство

$$3\sin 2\pi x\geqslant\sqrt{2}\sin 4\pi x+3\cos 2\pi x+\sqrt{32}.$$

ОТВЕТ: $x=\frac{3}{8}+n$, $n\in\mathbb{Z}$.

701 (*хим., 1971, № 4*). Решить неравенство

$$1-\sqrt{\frac{1}{2}+\log_3\sin x-\log_3\cos x}>0.$$

ОТВЕТ: $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

702 (*геолог., 2002, устный*). Решите неравенство

$$\frac{1-|\cos x|}{1+|\cos x|}<\sin^2 x.$$

ОТВЕТ: $x\neq\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

703 (*ВМК, 2003, апрель, № 3*). Найти все решения системы неравенств

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x}\leqslant\sqrt{\cos^3 x+\sin^2 x},\\ \frac{\pi}{4}<\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

ОТВЕТ: $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $0\leqslant x<\frac{\pi}{4}$, $2\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{4}+\arccos\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

704* (*мех-мат, 2001, март (тест), № 5*). Найти все решения уравнения
$$|\sin 2x + \cos x| = ||\sin 2x| - |\cos x||$$
на интервале $(-2\pi; 2\pi)$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right\} \cup [-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi)$.

705* (*геолог., отд. общей геологии, 1970, № 3*). Найти все значения x, удовлетворяющие неравенствам $\sin 5x + \sin x > 0$, $0 < x < 2\pi$.

Ответ: $\left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

706* (*ВМК, 2000, апрель, № 3*). Найти все решения неравенства
$$\sqrt{6 - 10\cos x - \sin x} < \sin x - \cos x,$$
принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

Ответ: $\left[\arccos \frac{60 - \sqrt{65}}{101}; \frac{\pi}{3}\right)$.

707* (*мех-мат, 1971, № 2*). Найти все x из отрезка $0 \leqslant x \leqslant \pi$, удовлетворяющие неравенству
$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2}\sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant \pi$.

708 (*хим., 1998, май, № 3*). Найти все числа x из промежутка $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющие неравенствам
$$(4 + \sqrt{3})\sin x + 2\sqrt{3} + 1 \leqslant \cos 2x \leqslant 5\cos x - 3.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}$.

709 (*ВМК, эконом., физ., подгот. отд., 1999, № 5*). Найти все решения неравенства
$$\left(\sin x - 2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \sqrt{-2\cos x}} + \frac{1}{1 - \sqrt{-2\cos x}}\right) \leqslant 0,$$
находящиеся на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3} < x \leqslant \frac{5\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3} < x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

5.3. Более сложные неравенства

710* (*геолог., 1999, июль, № 8*). Решить неравенство
$$\log_{84-2x-2x^2} \cos x \leqslant \log_{x+19} \cos x.$$

Ответ: $\left(-\frac{1 + \sqrt{167}}{2}; -\frac{13}{2}\right] \cup \left[5; \frac{-1 + \sqrt{167}}{2}\right) \cup \{-2\pi, 0\}$.

711* (*хим., 1967, № 4*). Решить неравенство

$$\sqrt{4\sin^2 x - 1}\cdot\log_{\sin x}\frac{x-5}{2x-1}\geqslant 0.$$

Ответ: $\left\{-\frac{7\pi}{6}\right\}\cup\left(-\frac{3\pi}{2};-4\right]\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0;-1}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$.

712* (*ВМК, 1995, июль, № 4*). Решить неравенство

$$\log_{\cos x}\cos^2 x\geqslant\log_{\cos x-\frac{1}{2}}\left(\cos^2 x-\cos x-x^2-14x-\frac{51}{4}\right).$$

Ответ:
$[-13;-4\pi)\cup\left(-4\pi;-\frac{11\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{7\pi}{3};-2\pi\right)\cup\left(-2\pi;-\frac{5\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{3};-1\right]$.

713* (*мех-мат, 2000, устный*). Найти все $x\in[0;2\pi]$, для которых

$$\sin x\leqslant\sin 2x\leqslant\sin 3x\leqslant\sin 4x\leqslant\sin 5x.$$

Ответ: $\left[0;\frac{\pi}{9}\right]\cup\left\{\pi,\frac{5\pi}{3},2\pi\right\}$.

714* (*мех-мат, 2002, устный*). Найти все целые решения неравенства

$$\sin\frac{6x^2}{x^2-1}+\sin\frac{2x^2-6x-2}{x^2-1}>0.$$

Ответ: $\mathbb{Z}\setminus\{-5;-4;-3;-1;1\}$.

715* (*мех-мат, 2005, июль, № 3*). Решить неравенство

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4}-\cos\frac{x-5}{4}}\geqslant 0.$$

Ответ: $[1;\sqrt{5}]\setminus\{2\}$.

716* (*МК-МГУ, 2007, № 5*). Чему равно пятое (в порядке возрастания) из натуральных чисел n, удовлетворяющих неравенству

$$\sin 1+\sin 2+\dots+\sin n<0?$$

Ответ: $n=31$.

5.4. Графический метод и метод оценок

717* (*эконом., отд. кибернетики, 1968, № 4*). Решить неравенство

$$\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0.$$

Ответ: $x=0; y=1$.

718* (*эконом., отд. кибернетики, 1969, № 4*). Решить неравенство
$$(4x - x^2 - 3)\log_2(\cos^2 \pi x + 1) \geqslant 1.$$

ОТВЕТ: $\{2\}$.

719 (*психолог., 1980, № 5*). Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство
$$2(2p-1)^4 + 1 + \left[1 - 2(2p-1)^4\right]\sin 2t \geqslant 0,$$
и найти все пары чисел (p, t), для которых это неравенство превращается в равенство.

ОТВЕТ: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

720 (*географ., 1988, № 5*). Доказать, что при каждом $x > 0$ выполнено неравенство
$$x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi \cdot \sin x > 0.$$

721* (*фил., 1998, июль, № 5*). Решить неравенство
$$\sqrt[4]{13 + 3^{3^{1-\cos x}}} \leqslant \sqrt{5e^{-2x^2} - 1}.$$

ОТВЕТ: $x = 0$.

722* (*ФНМ, 2005, заочный тур олимпиады, № 3*). Решить неравенство
$$e^{\cos\frac{x}{2} - 1} \geqslant \sin^2 x + 1 - 2\sin x \sin 7x + \sin^2 7x.$$

ОТВЕТ: $x = 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

723* (*физ., 1966, № 3*). Решить неравенство
$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1.$$

ОТВЕТ: $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

724 (*Севастополь, 2003, июль, № 5*). Решите неравенство
$$\sin^{\frac{1}{4}}(2x) + \cos^{\frac{1}{4}}(2x) \geqslant 1.$$

ОТВЕТ: $\cup_{n\in\mathbb{Z}}[\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n]$.

725 (*геолог., 2004, устный*). Решите неравенство
$$\sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x} > 1.$$

ОТВЕТ: $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

726 (*ВМК, 2004, устный*). Решить неравенство
$$5\cos^5 x - 3\sin^3 x \geqslant 5.$$

ОТВЕТ: $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

727* (*ВМК, 2004, апрель, № 4*). Решить неравенство

$$9\log_2^2 x + 36 \leqslant 4\left(-8\cos^2\frac{\pi(47-8x)}{45} + 8\cos\frac{\pi(47-8x)}{45} + 7\right)\cdot \log_2 x.$$

Ответ: $\left\{4; \frac{1}{4}\right\}$.

728 (*ВМК, 2000, 2002, 2003, 2005, устный*). Решить неравенство

$$\left(32\sin^8 x\right)^{-2} + 4\sin^6 x \leqslant 1 - \sin^4 x.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

729* (*биолог., 1998, июль, № 5*). Найти все решения системы

$$\begin{cases} \cos 10x - 2\sin 5x \geqslant 3\cdot 4^t - 3\cdot 2^{t+2} + \dfrac{27}{2}, \\ \sqrt{(2-\sqrt{3})^{4t} + (2+\sqrt{3})^{4t} + 2} + 14\log_2(\cos 10x) + \\ +6\cos 5x \geqslant (2t+1)^{1,5}. \end{cases}$$

Ответ: $(t;x) = \left(1; -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi m}{5}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$.

730 (*биолог., 1990, № 5*). Найти все пятерки чисел a, b, x, y, z, для которых справедливы соотношения

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{tg}(bz)\sin^2(xy) + \cos(2xy) \leqslant \big(\cos x + \sin(ay)\big)\cdot|\sin(2xy)|, \\ 2 + 2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)}\cdot\cos\big(b(y+x)\big) + \cos\big(2b(y+x)\big) = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$a = 4\pi k\,\frac{4m+1}{2n+1},$$
$$b = 2\pi k\,\frac{8p\pm 3}{16\pi k^2 + 2n + 1},$$
$$x = 2\pi k,$$
$$y = \frac{2n+1}{8k},$$
$$z = (\operatorname{arctg} 2 + \pi l)\,\frac{16\pi k^2 + 2n + 1}{2\pi k(8l\pm 3)},$$

где $k, l, m, n, p \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

731 (*биолог., 1997, № 6*). Найти решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{1}{20}\left(\dfrac{x^2}{\sin x}\right)^2 - \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sin x}} + 1 < 0, \\ \left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 \geqslant \dfrac{\pi}{24}\left(\dfrac{5\pi}{6} - x\right), \\ x^2 - \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\cos x}} + \dfrac{5}{4} < 0. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{11\pi}{24} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

732 (*ВМК, эконом., физ., подгот. отд., 1998, № 5*). Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \sin^4 \pi x + 2 \leqslant 2\cos \pi y + \sin^2 \pi y, \\ \left|z^3 + yz^2 - x^2 z - 50\right| \cdot \sqrt{x} \leqslant 0, \\ \sqrt{6-x} \cdot \sqrt{6xy - x^2 - 8y^2} > 0. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(5; 2; -5), (5; 2; -2), (5; 2; 5)$.

5.5. Функциональные неравенства

733* (*мех-мат, 2003, заочный тест*). Найти все функции $f(x)$, определенные на всей числовой прямой, для которых неравенство

$$f(y) \cdot \cos(x - y) \leqslant f(x)$$

выполнено при любых x и y.

ОТВЕТ: $f(x) \equiv c$, где $c \geqslant 0$.

5.6. Задачи с параметрами

734 (*физ., 2002, май, № 7*). Для каждого значения a решить неравенство

$$(x^2 + 2x - a^2 - 4a - 3)(\sin x + 2x) > 0.$$

ОТВЕТ: если $a \leqslant -3$, то $a+1 < x < 0$, $x > -a-3$; если $-3 < a < -2$, то $a+1 < x < -a-3$, $x > 0$; если $a = -2$, то $x > 0$; если $-2 < a < -1$, то $-a-3 < x < a+1$, $x > 0$; если $a \geqslant -1$, то $-a-3 < x < 0$, $x > a+1$.

735 (*биолог., 1983, № 5*). Найти все значения b, при которых оба неравенства

$$\begin{cases} 2b\cos 2(x-y) + 8b^2\cos(x-y) + 8b^2(b+1) + 5b < 0, \\ x^2 + y^2 + 1 > 2bx + 2y + b - b^2, \end{cases}$$

выполняются при любых x и y.

ОТВЕТ: $b < -\dfrac{4+\sqrt{2}}{4}$ или $-\dfrac{1}{2} < b < 0$.

736* (*почвовед., 1994, июль, № 4*). При каких значениях параметров a и b система неравенств

$$\begin{cases} a + \sin bx \leqslant 1, \\ x^2 + ax + 1 \leqslant 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

ОТВЕТ: $a = 2, b = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $a = -2$, $b \in \mathbb{R}$.

737* (*географ., 1995, май, № 6*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$y(x) = \log_{25-a^2}(\cos x + \sqrt{8}\sin x - a)$$

определена при всех значениях переменной x.

Ответ: $-5 < a < -2\sqrt{6}; -2\sqrt{6} < a < -3$.

738 (*ВМК, 1999, устный*). Найти все значения параметра a, при которых функция

$$f(x) = \sqrt{\sin x + 3\cos x + 3a}$$

определена при всех x.

Ответ: $a \geqslant \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

739* (*психолог., 1995, июль, № 5*). Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leqslant -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = 2$.

740* (*мех-мат, 1970, № 6*). При каких значениях a неравенство

$$\sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x \geqslant 0$$

выполняется при всех x.

Ответ: $-\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$.

741 (*мех-мат, 1993, май, № 6*). Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_5\left(a\cos 2x - \left(1 + a^2 - \cos^2 x\right)\sin x + 4 - a\right) \leqslant 1$$

выполняется при всех x.

Ответ: $0 \leqslant a < 1$.

742 (*мех-мат, 1967*). На координатной плоскости указать все точки с координатами $(x; y)$, для каждой из которых существует хотя бы одно значение t, при котором выражение

$$2\cos 2t + 4\sin 2x\sin t + 2\sin(x+y) - (\sin 2x - 1)^2$$

больше 1, и изобразить область, образуемую этими точками.

Глава 6

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

6.1. Тождества и преобразования

743* (*почвовед., 1999, май, № 1*). Определить, что больше:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\log_{81}\left(\frac{1}{27}\right) \text{ или } \sin\frac{43\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}^3\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}?$$

Ответ: второе число больше.

744* (*ВМК, 1998, устный*). Вычислить

$$\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ответ: -1.

745* (*ВМК, 1999, июль, № 1*). Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$. Сравнить $\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha-1}\right)$ и $\frac{19\pi}{24}$.

Ответ: $\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha-1}\right)<\frac{19\pi}{24}$.

746* (*ВМК, 2002, устный*). Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию

$$\frac{\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}\left(2+\frac{5}{\sqrt{3}}\right)}{2}\leqslant\frac{\pi}{n}.$$

Ответ: $n=1;2$.

747* (*ВМК, 2004, устный*). Сравнить числа $\arcsin\frac{5}{7}$ и $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

Ответ: первое число больше.

748* (*географ., 2001, май, № 4*). Сравнить два числа $\frac{3\pi}{10}$ и $\arcsin\frac{4}{5}$.

Ответ: $\arcsin\frac{4}{5}<\frac{3\pi}{10}$.

749 (*географ., 2001, май, № 4*). Сравнить два числа $\frac{2\pi}{5}$ и $\arccos\frac{3}{10}$.

Ответ: $\arccos\frac{3}{10}>\frac{2\pi}{5}$.

750* (*геолог., 2000, устный*). Вычислить $\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{35\pi}{11}\right)$.

Ответ: -7.

751 (*ВМК, 2004, устный*). Вычислить $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$.

Ответ: $-\frac{\pi}{10}$.

752* (*геолог., 1998, устный*). Вычислить $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

753* (*геолог., 1998, устный*). Вычислить $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

754 (*геолог., 1998, устный*). Вычислить $\cos\left(2\operatorname{arctg}(-4)\right)$.

Ответ: $-\frac{15}{17}$.

755 (*ВМК, 2001, устный*). Вычислить значение $\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arcctg}3}{2}\right)$.

Ответ: $\sqrt{10}-3$.

756 (*геолог., 2002, устный*). Является ли число $\operatorname{ctg}(\arcsin 0.25)$ рациональным?

Ответ: нет (это число равно $\sqrt{15}$).

757 (*ВМК, 2000, 2003, устный*). Вычислить

$$\sin\left(2\operatorname{arcctg}2\right)+\cos\left(2\operatorname{arcctg}3\right).$$

Ответ: $\frac{8}{5}$.

758* (*ВМК, 2000, 2003, устный*). Вычислить $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{7}{23}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

759 (*ВМК, 2001, устный*). Вычислить $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

760* (*ВМК, 2003, устный*). Вычислить $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}4+\operatorname{arctg}13$.

Ответ: $\frac{5\pi}{4}$.

761 (*ВМК, 1998, устный*). Вычислить $\operatorname{arctg}(3+2\sqrt{2})-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

762* (*мех-мат, 1999, устный*). Вычислить
$$\operatorname{arctg} 8 + \operatorname{arctg}\frac{19}{22} + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right).$$
Ответ: $\frac{3\pi}{2}$.

763* (*ВМК, 1998, 2005, 2006, устный*). Вычислить
$$\arcsin(\cos\arcsin x) + \arccos(\sin\arccos x).$$
Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

6.2. Графики

764* (*ВМК, 1995, устный*). Вычислить расстояние от точки с координатами $(2;3)$ до графика функции
$$y = \sin(\arccos x).$$
Ответ: $\sqrt{13} - 1$.

765 (*ВМК, устный, 1995*). Вычислить кратчайшее расстояние от точки с координатами $(-\sqrt{3};1)$ до графика функции
$$y = \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right).$$
Ответ: $\sqrt{3} - 1$.

766* (*ВМК, 1996, устный*). Построить график функции
$$\cos(\arcsin 4x^2).$$

767* (*ВМК, 1999, устный*). Доказать, что
$$\arcsin(|\sin x|) = \arccos(|\cos x|).$$

768* (*ВМК, 1999, устный*). Построить график функции
$$y(x) = \arcsin(|\sin x|).$$

769* (*ВМК, 1995, устный*). Построить график функции
$$y(x) = \arcsin^2(\sin x) - \operatorname{arctg}^2(\operatorname{tg} x).$$

770* (*ВМК, 1999, устный*). Найти наименьшее и наибольшее значения функции
$$f(x) = \arcsin x \cdot \arccos x + 1.$$
Ответ: $f_{\min} = 1 - \frac{\pi^2}{2}$, $f_{\max} = 1 + \frac{\pi^2}{16}$.

771* (*геолог., 2004, 2006, устный*). Найдите минимальное значение функции
$$y = (\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arcctg} x)^2.$$
Ответ: $y_{\min} = \frac{\pi^2}{8}$.

772* (*эконом., 1993, № 4*). Найдите периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} 2|x+2|\arcsin\left((y-1)^2\right) \leqslant \pi(x+2), \\ 2|y-1|-x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $10+2\sqrt{5}$.

773* (*ВМК, физ., эконом., подгот. отд., 1998, № 6*). Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} \left(\arccos(\cos x)\right)^2 + y^2 \geqslant 1, \\ x^2+2|xy|+y^2 \leqslant 4\pi^2. \end{cases}$$

Ответ: $S = 8\pi^2 - \frac{3\pi}{2}$.

774 (*эконом., 2005, июль, № 7*). Фигура F задается на координатной плоскости неравенством

$$\frac{2\arcsin\left(\frac{4y-4x+9}{13}\right)+\arccos\left(\frac{4y+4x-5}{9}\right)-3\pi}{|y+1|\cdot\left(|4x-5|+\left|4y-\sqrt{72\sqrt{2}-97}\right|\right)} \leqslant 0.$$

В каких пределах изменяются площади всевозможных кругов, целиком принадлежащих F?

Ответ: $0 < S < \pi$.

6.3. Уравнения

775* (*МК-МГУ, очный тур эконом., 2006, № 4*). Решить уравнение

$$\arccos\left(\frac{3}{2}+\cos\left(\pi\cdot\frac{x^2-8x+16}{x^2-5x+7}\right)\right)-\frac{\pi}{3}=0.$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = \frac{5}{2}; x_3 = 3$.

776 (*ФГУ, 2001, июль, № 6*). Решите уравнение

$$\arccos\left(\frac{1}{2}+\cos\left(\pi\cdot\frac{-x^2+2x+11}{x^2+4x+7}\right)\right)-\frac{2\pi}{3}=0.$$

Ответ: $x_1 = -3; x_2 = -2; x_3 = 1$.

777* (*эконом., отд. менеджмента, 1999, июль, № 4*). Решить уравнение

$$x = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}6x+\cos 7x).$$

Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{14}; x_2 = \frac{\pi}{14}$.

778 (*эконом., 1999, июль, № 5*). Решить уравнение
$$x+\frac{1}{6}\arccos(\cos 15x+2\cos 4x\sin 2x)=\frac{\pi}{12}.$$
Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{26};\, x_2=\frac{\pi}{34}$.

779* (*почвовед., 2005, июль, № 2*). Решить уравнение
$$\sin(\sqrt{3}\arcsin x)=1.$$
Ответ: $x=\sin\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

780 (*ВМК, 2004, устный*). Решить уравнение
$$\sin(5\operatorname{arctg} 3x)=1.$$
Ответ: $x_1=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{10},\, x_2=-\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10},$.

781* (*ВМК, 1997, устный*). Решите уравнение
$$\sin\left(\frac{\pi^2}{4}\arcsin x\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi^2}{4}\arcsin(-x)\right)=0.$$
Ответ: $x_1=\sin\frac{1}{\pi};\, x_2=-\sin\frac{3}{\pi}$.

782* (*хим., 1967, № 2*). Решить уравнение
$$\cos^4(\operatorname{arcctg} x)+\sin^4(\operatorname{arcctg} x)=\operatorname{cosec}^2(\operatorname{arcctg} x).$$
Ответ: $x=0$.

783* (*Севастополь, 2002, июль, № 2*). Решите уравнение
$$\arccos x=\operatorname{arctg} x.$$
Ответ: $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

784* (*хим., 2000, заочный тур олимпиады, № 4*). Решить уравнение
$$\arcsin(0{,}5+0{,}5\pi\cos x)+\arccos(0{,}5+0{,}5\pi\sin x)=0{,}5\pi.$$
Ответ: $\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

785* (*биолог., 2006, № 4*). Решить уравнение
$$9^{\arcsin(2x+1)}+\log_3\left(2\arcsin(2x+1)\right)-3^{\arccos(6x+3)}+\log_{\frac{1}{3}}\arccos(6x+3)=0.$$
Ответ: $x=\frac{-7+\sqrt{17}}{8}$.

786* (*ВМК, 2001, устный*). Решите уравнение
$$\arcsin\frac{x}{2}+2\arccos x=\pi.$$
Ответ: $x=0$.

787* (*ВМК, 1997, устный*). Решить уравнение

$$\arcsin(-x^2+3x-1)+\sin \pi x = -\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = 3$.

788* (*ВМК, 1998, устный*). Решить уравнение

$$\arcsin(x^3+x^2-2)+\sqrt{6x-x^2-5}=0.$$

Ответ: $x = 1$.

789* (*ВМК, 2002, устный*). Решить уравнение

$$|x-\pi|+\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$.

790* (*Севастополь, 2003, май, № 7*). Известно, что

$$\frac{4\operatorname{arctg}^2 x}{x}+7\pi \operatorname{arctg} x = 2\pi^2 x.$$

Найдите

$$\frac{x^2}{x\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}^2 x}.$$

Ответ: $\dfrac{16}{4\pi+\pi^2}$.

791* (*геолог., 2004, устный*). Решите уравнение

$$\arccos(\sqrt{3}x)+\arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

792 (*ВМК, 2004, устный*). Решите уравнение

$$\arcsin\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)=\arccos\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

793* (*ФНМ, 2000, апрель, № 6*). Решить уравнение

$$x^2 = \arcsin(\sin x)+10x.$$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = \dfrac{9+\sqrt{81+12\pi}}{2}$.

794* (*хим., 2001, май, № 4*). Решить уравнение

$$\arcsin\frac{6x-7}{2x-1} = 2\pi - \pi x.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

795* (*географ., 2001, июль, № 5*). Решить уравнение

$$4\arcsin(2^x-7)-\arccos(5^x-124)=\frac{6\pi}{x}.$$

Ответ: 3.

796* (*ФНМ, 2005, заочный тур олимпиады, № 2*). Найти все решения уравнения

$$\log_2(5-x^2-4x)-3+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{1-x}\right)=e^{\sqrt{4x+12}}+\sqrt{x^2+2x-3}\arcsin\left(\frac{1-x}{x+7}\right).$$

Ответ: $x=-3$.

797* (*ВМК, 1983, № 6*). Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{2-|y|}\cdot\left(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}\right)=$$
$$=\arcsin^2 x+\arccos^2 x-\frac{5}{4}\pi^2.$$

Ответ: $(-1;2),(-1;-2)$.

6.4. Системы уравнений

798* (*ИСАА, 2002, июль, № 6*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\arccos 2y+\arcsin 3x=\dfrac{\pi}{4},\\ \arcsin 2y\cdot\arccos 3x=\dfrac{5\pi^2}{64}.\end{cases}$$

Для каждого решения $(x;y)$ определите, какое из чисел больше: $2y-3x$ или $\sqrt[4]{2}-0.5$.

Ответ: $\left(-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{6};\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right)$; первое число больше.

799* (*ВМК, отд. бакалавров, 2005, июль, № 4*). Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases}\arccos\left(\dfrac{x+y}{4}\right)=\arccos\left(\dfrac{5xy}{24}\right),\\ x^2+y^2=13.\end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{-13-\sqrt{481}}{10},\dfrac{-13+\sqrt{481}}{10}\right),\left(\dfrac{-13+\sqrt{481}}{10},\dfrac{-13-\sqrt{481}}{10}\right)\right\}$.

800 (*ВМК, отд. бакалавров, 2005, июль, № 4*). Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases}\arcsin\left(\dfrac{x+y}{5}\right)=\arcsin\left(\dfrac{3(x^2+y^2)}{125}\right),\\ xy=-7.\end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{7-\sqrt{301}}{6},\dfrac{7+\sqrt{301}}{6}\right),\left(\dfrac{7+\sqrt{301}}{6},\dfrac{7-\sqrt{301}}{6}\right)\right\}$.

801* (*геолог., 2004, устный*). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x - \arccos y = 1, \\ \cos \pi y - \arcsin x = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1)$.

6.5. Неравенства

802* (*мех-мат, 2003, март, тест перед олимпиадой, № 5*). Решить неравенство

$$\arccos(4x - 4) > \arccos(-x).$$

Ответ: $\frac{3}{4} \leqslant x < \frac{4}{5}$.

803* (*филолог., 2002, июль, № 4*). Решить неравенство

$$\frac{\log_{x^6} \pi \cdot \arcsin \frac{x}{2}}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{x}} \geqslant 0.$$

Ответ: $(0; 1) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 2\right]$.

804* (*ВМК, 2002, июль, № 2*). Решите неравенство

$$2\cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) \leqslant 0.$$

Ответ: $\left[-1; -\frac{7}{8}\right] \cup \{1\}$.

805* (*ФНМ, 2004, заочный тур олимпиады, № 4*). Найти все решения системы неравенств:

$$\begin{cases} \arccos \dfrac{2\sqrt{2}}{5} x \geqslant \arcsin \dfrac{x+3}{5}, \\ \dfrac{19 - 7x}{2x - 1} > \sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3} + 3^{\frac{\lg(9x)}{\lg 3}}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{3}\right]$.

806* (*ВМК, 1996, июль, № 4*). Решить неравенство

$$\arccos(3x) + \arcsin(x + 1) \leqslant \frac{7\pi}{6}.$$

Ответ: $\left[-\frac{5 + 2\sqrt{3}}{26}; 0\right]$.

807* (*ВМК, 1997, устный*). Решить неравенство

$$x \arcsin(\pi x) \leqslant \frac{1}{12}.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2\pi}; \frac{1}{2\pi}\right]$.

808* (*ВМК, 2003, апрель, № 6*). Решить неравенство
$$\arcsin(\sin x) + 2\arccos(\cos x) \leqslant x - 5.$$
Ответ: $\left[\pi + \frac{5}{2}; 3\pi - \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{11\pi + 5}{4}, +\infty\right)$.

809* (*мех-мат, 1995, май, № 6*). Пусть x_1 — наибольший отрицательный корень уравнения
$$\sqrt{3}\sin x - 3\cos x = 2a - 1,$$
а x_2 — наименьший положительный корень уравнения
$$2\cos^2 x - 2\sin^2 x = a.$$
Найти все значения a, при каждом из которых
$$|x_1| \leqslant x_2.$$
Ответ: $\left[\frac{1 - 2\sqrt{3}}{2}; -1\right] \cup \{2\}$.

810* (*эконом., 2000, июль, № 7*). Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\frac{1}{6}; 6\right]$ и удовлетворяет на этом множестве системе
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 f(x) - \frac{1}{2}} - 12\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{10}{x}, \\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$
Решить неравенство $f(x) \leqslant \frac{\pi}{8}$.

Ответ: $3\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 6$.

6.6. Задачи с параметрами

811* (*мех-мат, 2003, июль, № 5*). Найти все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\sin\arccos(5x) = a + \arcsin\sin(7x - 3)$$
имеет единственное решение.

Ответ: $\pi - 3 - \frac{7}{5} \leqslant a < \pi - 3 + \frac{7}{5}, a = \pi - 3 + \frac{\sqrt{74}}{5}$.

812* (*мех-мат, 2004, март, № 5*). Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\operatorname{arctg}\left((3a-1)\sin^2 x - \left(3a^3 - a^2 + 3a - 1\right)\sin x + \operatorname{tg}(ax - a\pi)\right) - ax + a\pi = 0$$
имеет ровно три решения.

Ответ: $-\frac{1}{2} < a \leqslant -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \leqslant a < \frac{1}{3}; \frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$.

813* (*мех-мат, 2004, март, заочный тест, № 3*). Найти все a, при каждом из которых уравнение
$$\arccos\big(\sin(x-a)\big) - a = \arcsin\big(\cos(x+a)\big) + a$$
имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} \leqslant a \leqslant \frac{3\pi}{4}$.

814* (*эконом., отд. менеджмента, 2003, апрель, № 5*). Найти все значения параметра b, при которых уравнение
$$b^2 \sin\left(\frac{\pi+2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{b+1} - \frac{2}{b+1}\right) -$$
$$- b\sqrt{4x^2+8-8x} = 3 + \arcsin|1-x|$$
имеет единственное решение.

Ответ: 3.

815* (*географ., 2006, № 6*). При каких значениях параметра c число решений уравнения
$$2x\arcsin(\sin x) = c3^{\log_3 x} + 3$$
конечно?

Ответ: $c < -\pi$, $c \geqslant \pi$.

816 (*ВМК, 1998, июль, № 5*). Найти все значения параметра a, при которых существуют (x, y), удовлетворяющие системе неравенств
$$\begin{cases} \max(2-3y, y+2) \leqslant 5, \\ \sqrt{a^2 + \frac{6}{\pi}\cdot\arccos\sqrt{1-x^2} - 16 - \frac{2}{\pi^2}\arcsin x\cdot(\pi + 2\arcsin x)} \geqslant y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

Ответ: $a \leqslant -\sqrt{13}$, $a \geqslant \frac{11}{3}$.

817* (*геолог., отд. геофизики, 1974, № 3*). Определить, при каких целых значениях k система
$$\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 k, \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
имеет решения, и найти все эти решения.

Ответ: $k = 1$, $x = \operatorname{tg}\frac{(1-\sqrt{7})\pi}{4}$, $y = \cos\frac{(1+\sqrt{7})\pi}{4}$.

818 (*ФГП, 2006, № 7*). Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} \operatorname{arctg}(25^x - 9 + a - y) = 0, \\ y\cdot 5^{-x} + \sqrt{a-1} = 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение $(x_0; y_0)$, удовлетворяющее условию $x_0 \leqslant 0$.

Ответ: $\frac{17-\sqrt{29}}{2} \leqslant a < 9$.

819 (*мех-мат, 1998, май, № 4*). Найти все значения k, при которых хотя бы одна общая точка графиков функций

$$y = -\frac{2}{3} - \arcsin x \text{ и } y = -\frac{2}{3} - 2\,\mathrm{arctg}\, kx$$

имеет положительную ординату.

Ответ: $\dfrac{1}{1+\cos\frac{2}{3}} < k \leqslant 1$.

820 (*психолог., 1998, июль, № 6*). Найти все целые значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right) - b\cdot 2^{\sin(\pi bx)} - \\ - \left|\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right) + b\cdot 2^{\sin(\pi bx)}\right| = 2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

Ответ: $a=-2$, $b=4,5,\ldots$; $a=-1$, $b=3,4,\ldots$.

821 (*соц., 1999, июль, № 6*). При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)} \geqslant \left|\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)}\right|$$

не имеет решений на отрезке $[-5;6]$?

Ответ: $a=0$, $a\leqslant -1$, $a>2$.

822 (эконом., *1995, № 5*). Найти все $x\in[-3;1]$, для которых неравенство

$$x\big(\pi(x+1) - 4\,\mathrm{arctg}(3m^2+12m+11)\big) > 0$$

выполняется при любых целых m.

Ответ: $-3\leqslant x<-2$, $x=1$.

823 (эконом., *2006, № 6*). Найти все a, при которых неравенство

$$4a^2\cdot\sqrt{14-\frac{30}{\pi}\arccos(2x-\sqrt{3})} + \frac{60a}{\pi}\arcsin(\sqrt{3}-2x) - 12a^2+24a \leqslant 12$$

выполняется для любых $x\in\left[\dfrac{1+2\sqrt{3}}{4};\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right]$.

Ответ: $a\leqslant\frac{3}{2}$, $2\leqslant a\leqslant 3$.

РЕШЕНИЯ

Решения к главе 1

□ **2.** Прежде всего сведем дело к острому углу:

$$\sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ.$$

Далее,

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. ■

□ **8.** Угол $\frac{5\pi}{8}$, очевидно, связан с углом $\frac{\pi}{4}$. Чтобы свести дело к функции от этого угла, исходный угол нужно удвоить. Сделать это можно с помощью формулы

$$\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

которая удваивает угол за счет понижения степени.

Поскольку угол $\frac{5\pi}{8}$ — тупой, его косинус отрицателен. Поэтому

$$\cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\cos^2\frac{5\pi}{8}} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. ■

□ **9.** Поскольку

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha},$$

искомое число равно $\frac{1-\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ}$. Далее,

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} 37^\circ 30' = \frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$$

Избавляясь от иррациональности в знаменателе, мы окончательно получим:

$$\operatorname{tg} 37^\circ 30' = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2.$$

ОТВЕТ: $\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$. ■

□ **13.** Вычтем дроби:

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}.$$

Знаменатель можно преобразовать с помощью формулы $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$:

$$\sin 10^\circ \cos 10^\circ = \frac{1}{2}\sin 20^\circ.$$

Числитель преобразуем с помощью дополнительного аргумента:

$$\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ = 2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right) =$$

$$= 2(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ) = 2\sin(30^\circ - 10^\circ) = 2\sin 20^\circ.$$

Поэтому искомая величина равна

$$\frac{2\sin 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} = 4.$$

ОТВЕТ: 4. ■

□ **14.** Поскольку нам дана информация относительно угла α, а найти нужно функцию угла 2α, сведем дело к углу α:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{10}}\cos\alpha.$$

Таким образом, задача свелась к подсчету величины $\cos\alpha$.

Чтобы ее вычислить, воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$\Updownarrow$$

$$|\cos\alpha| = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Из условия $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ следует, что $\cos\alpha > 0$. Поэтому $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ и

$$\sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}.$$

ОТВЕТ: $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$. ■

□ **23.** Возведем равенство $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = 1{,}4$ в квадрат:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1{,}96$$

$$\Updownarrow$$

$$1 + \sin\alpha = 1{,}96$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin\alpha = 0{,}96.$$

ОТВЕТ: 0,96. ■

□ **35.** Хотя в задаче стоят тригонометрические функции разных аргументов, их легко свести к $a = \sin\alpha$ и $b = \cos\alpha$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = a,$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\alpha - \cos\frac{2\pi}{3}\sin\alpha = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{1}{2}a,$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{3} = \\ = \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b.$$

Теперь наше тождество из тригонометрического превратится в алгебраическое:

$$a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b\right) = \frac{3}{4}.$$

Соответственно, его доказательство потребует применения стандартных алгебраических приемов (тождества сокращенного умножения, приведение подобных). Тригонометрия останется только в виде тождества $a^2 + b^2 = 1$ (это просто по-другому записанное основное тригонометрическое тождество):

$$a^2 - \left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}b^2\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$a^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}b^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}b^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$a^2 + b^2 = 1.$$

■

□ **41.** С помощью формул

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

превратим произведения в числителях и знаменателях дробей в суммы. Тогда задача примет вид:

найти

$$X = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta+2\gamma)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta+2\gamma)}, \tag{1}$$

если

$$\frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta+2\gamma)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \frac{4}{9}. \tag{2}$$

Угол γ входит в задачу только в виде блока $\cos(\alpha+\beta+2\gamma)$. Поэтому его можно исключить. Для этого выразим $\cos(\alpha+\beta+2\gamma)$ из равенства (2):

$$\cos(\alpha+\beta+2\gamma) = \frac{5}{9}\cos(\alpha-\beta) - \frac{4}{9}\cos(\alpha+\beta)$$

и подставим это соотношение в выражение (1):

$$X = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \frac{5}{9}\cos(\alpha-\beta) + \frac{4}{9}\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \frac{5}{9}\cos(\alpha-\beta) - \frac{4}{9}\cos(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\frac{4}{9}\cos(\alpha-\beta) + \frac{4}{9}\cos(\alpha+\beta)}{\frac{5}{9}\cos(\alpha+\beta) + \frac{5}{9}\cos(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} \cdot \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$. ■

□ **43.** Для сокращения записей введем новые переменные $x = \frac{\alpha}{2}$, $y = \frac{\beta}{2}$, $z = \frac{\gamma}{2}$, так что наша задача примет вид:

доказать, что если $x, y, z > 0$ и $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \cdot \operatorname{ctg} z. \tag{3}$$

Равенство (3) равносильно равенству

$$\operatorname{ctg} z \cdot (\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1) = \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y.$$

Коэффициент при $\operatorname{ctg} z$ в левой части этого равенства отличен от нуля. Действительно, допустим противное: $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1 = 0$. Из этого равенства следует, что

$$\frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} - 1 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \sin y} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\cos(x+y)}{\sin x \sin y} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(x+y) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ для некоторого } n \in \mathbb{Z}.$$

Последнее равенство невозможно в силу условий $x, y, z > 0$ и $x + y + z = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому равенство (3) равносильно равенству

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{ctg}(x+y)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{ctg} z = \operatorname{tg}(x+y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \operatorname{tg}(x+y).$$

Поскольку из условий $x, y, z > 0$ и $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ следует, что $z, x + y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, последнее равенство равносильно тому, что

$$\frac{\pi}{2} - z = x + y,$$

$$\Updownarrow$$

$$x + y + z = \frac{\pi}{2},$$

т. е. истинно. ■

□ **51.** Так как α — угол первой четверти, то числа $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ положительны. Кроме того, тождество $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ означает, что эти числа взаимно обратны. Применяя неравенство для суммы двух взаимно обратных положительных чисел (оно является следствием неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического двух неотрицательных чисел), мы получим требуемый результат. ■

□ **52.** Из тождества $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ следует, что

$$3\sin\alpha = \sin 3\alpha + 4\sin^3\alpha > \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4},$$

т. е. $\sin\alpha > \frac{1}{12}$. Используя эту оценку, проделаем еще раз преобразование, аналогичное предыдущему:

$$3\sin\alpha = \sin 3\alpha + 4\sin^3\alpha > \frac{1}{4} + 4\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{109}{432},$$

так что $\sin\alpha > \frac{109}{1296}$. ■

□ **54.** Обе функции $f(x) = \cos(\sin x)$ и $g(x) = \sin(\cos x)$ — четные и периодические с периодом 2π. Поэтому достаточно сравнить их при $x \in [0; \pi]$.

Поскольку

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right),$$

а числа $\alpha = \frac{\pi}{2} - \sin x$ и $\beta = \cos x$ при $x \in [0; \pi]$ лежат на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, где синус монотонно возрастает, задача сводится к сравнению $\alpha = \frac{\pi}{2} - \sin x$ и $\beta = \cos x$, т. е. к сравнению $\frac{\pi}{2}$ и $\sin x + \cos x$.

Выражение $\sin x + \cos x$ можно записать как $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, так что оно меньше, чем $\frac{3}{2}$. С другой стороны, $\frac{\pi}{2} > \frac{3}{2}$.

Ответ: первое выражение больше второго при всех значениях x. ■

□ **55.** Оценим суммы $\sin x + \sin y + \sin z$ и $\cos x + \cos y + \cos z$ с помощью неравенства Коши—Буняковского:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y + \sin z &\leqslant \sqrt{3}\cdot\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z},\\ \cos x + \cos y + \cos z &\leqslant \sqrt{3}\cdot\sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z}.\end{aligned} \tag{4}$$

Тогда из неравенства

$$\sin x + \sin y + \sin z \geqslant \sqrt{5}$$

следует, что

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z} \geqslant \sqrt{5}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z \geqslant \frac{5}{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$1-\cos^2 x + 1 - \cos^2 y + 1 - \cos^2 z \geqslant \frac{5}{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z \leqslant \frac{4}{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\ .$$

Сопоставляя последнее неравенство и неравенство (4), мы немедленно получим требуемый результат. ■

□ **56.** *Первый способ.* Из выпуклости графика функции $y = \sin x$ вверх ясно, что для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ график $y = \sin x$ лежит выше прямой $y = \frac{2}{\pi}x$, которая соединяет начало координат с точкой $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$. Иначе говоря, для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ верно неравенство $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ (строгое его доказательство мы приведем в конце решения).

Поскольку α, β и γ лежат на интервале $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, справедливы неравенства

$$\sin\alpha > \frac{2}{\pi}\alpha\,,$$

$$\sin\beta > \frac{2}{\pi}\beta\,,$$

$$\sin\gamma > \frac{2}{\pi}\gamma\,.$$

Сложим их почленно:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > \frac{2}{\pi}(\alpha+\beta+\gamma)\,.$$

Так как α, β и γ — углы треугольника, их сумма равна π, что завершает доказательство.

В заключение, как мы обещали, дадим строгое доказательство неравенства $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Оно будет базироваться на двух неравенствах, доказанных в школьном курсе тригонометрии: если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin x < x$, а $\operatorname{tg} x > x$.

Рассмотрим разность $A = \sin x - \frac{2x}{\pi}$ и прибавим и вычтем член $\frac{2x}{\pi}\sin x$:

$$A = \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\sin x - \frac{2x}{\pi}(1 - \sin x).$$

Выражение $1 - \sin x$ заменим на $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

Число $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ лежит на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) < \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}.$$

Число $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$ лежит на интервале $\left(x; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому

$$0 < \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) < \cos x.$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$1 - \sin x < \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A &> \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\sin x - \frac{2x}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x = \\ &= \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\sin x - x\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\cos x = \\ &= \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\cos x\,(\operatorname{tg} x - x) > 0. \end{aligned}$$

Отметим, что неравенство $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ является простым следствием убывания функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{2}.$$

Последний факт легко доказывается с помощью производных:

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}\cdot(x - \operatorname{tg} x) < 0$$

при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Второй способ. Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Далее, поскольку $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, один из углов можно исключить. Мы исключим больший угол $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, так что теперь неравенство, которое нужно доказать, примет вид

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta) > 2.$$

При этом условия $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}$ превратятся в следующую систему ограничений для переменных α и β:

$$\begin{cases} 0 < \alpha \leqslant \beta, \\ \alpha + 2\beta \leqslant \pi, \\ \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \qquad (5)$$

На координатной плоскости $(\beta; \alpha)$ эта система задает треугольник $\mathcal{T}$, изображенный на рис.1 (с внутренностью, но без нижней стороны). Из этого рисунка ясно, что переменная β меняется на интервале $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

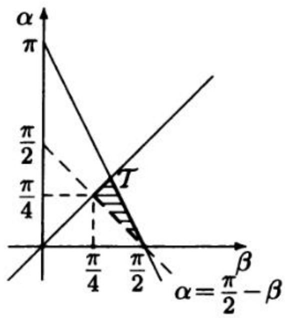


Рис. 1

Зафиксируем значение $\beta \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ и оценим снизу значения функции

$$f(\alpha) = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) = \sin\beta + 2\cos\frac{\beta}{2} \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right).$$

Эта функция зависит от α только через член $\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$. Поскольку коэффициент $\cos\frac{\beta}{2}$ положителен, задача сводится к оценке снизу величины $\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$. Складывая два первых неравенства системы (5), мы получим, что $\alpha + \frac{\beta}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$, т. е. аргумент величины $\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$ лежит на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, где синус возрастает. Поэтому нужно найти наименьшее возможное значение α. Из рис. 1 ясно, что при фиксированном значении β точная нижняя граница значений переменной α равна $\alpha_{\min} = \frac{\pi}{2} - \beta$ (см. третье неравенство системы (5)) и при этом

$$\alpha_{\min} + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Поэтому

$$f(\alpha) > f\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Значение $f\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ равно

$$1 + \sin\beta + \cos\beta = 1 + \sqrt{2}\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right).$$

При $\beta \in \left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ величина $\beta+\frac{\pi}{4}$ лежит на интервале $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$. Поэтому $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right) > \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а тогда $f\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) > 2$.

Доказанное неравенство

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma > 2 \tag{6}$$

можно переформулировать в геометрических терминах. В силу теоремы синусов,

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R},\ \sin\beta = \frac{b}{2R},\ \sin\gamma = \frac{c}{2R},$$

где a, b, c — стороны треугольника, лежащие против углов α, β, γ соответственно, а R — радиус описанной окружности. Поэтому неравенство (6) равносильно неравенству

$$\frac{a+b+c}{2R} > 2 \Leftrightarrow a+b+c > 4R.$$

Итак, в любом остроугольном треугольнике периметр превосходит радиус описанной окружности больше чем в 4 раза.

Если треугольник тупоугольный, то неравенство (6) может не выполняться. Например, для треугольника с углами $\alpha = 30°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 120°$ выражение $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ равно $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. меньше 2. ■

□ **58.** Приведем $\sin 200°$ и $\sin(-300°)$ к синусам острых углов:

$$\sin 200° = \sin(180°+20°) = -\sin 20° < 0,$$
$$\sin(-300°) = \sin(60°-360°) = \sin 60° > 0.$$

ОТВЕТ: $\sin 200° < \sin(-300°)$. ■

□ **60.** Приведем $\sin 3$ к синусу острого угла: $\sin 3 = \sin(\pi-3)$, и превратим число 0,5 в синус острого угла: $0{,}5 = \sin\frac{\pi}{6}$. Поскольку для $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ неравенства $\sin\alpha < \sin\beta$ и $\alpha < \beta$ равносильны, задача сводится к сравнению чисел $\pi-3$ и $\frac{\pi}{6}$, т. е. чисел $\frac{5\pi}{6}$ и 3. Так как $\pi < 3{,}6$, первое число меньше второго.

ОТВЕТ: $\sin 3 < 0{,}5$. ■

□ **65.** Поскольку $1 < \frac{\pi}{3}$, можно утверждать. что $\cos 1 > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin 1 < \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому первое число больше, чем 2, а второе число меньше, чем $\sqrt{3} < 2$.

ОТВЕТ: первое число больше. ■

□ **66.** Поскольку $31° > 30°$ и оба этих угла — острые, $\sin 31° > \sin 30° = \frac{1}{2}$. Число $\frac{1}{\sqrt{3}}$ также больше, чем $\frac{1}{2}$, так что полученная оценка не позволяет сравнить числа $\sin 31°$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Оценим $\sin 31°$ сверху. Для этого представим угол $x = 31°$ в виде суммы «красивого» угла $x_0 = 30°$ и «малого» угла $\varepsilon = 1°$:

$$\sin x = \sin(x_0 + \varepsilon) = \sin x_0 \cos\varepsilon + \cos x_0 \sin\varepsilon.$$

Далее воспользуемся следующими неравенствами для острых углов, измеренных в радианах:

$$\sin x < x, \cos x < 1, \text{ если } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

Эти неравенства являются очень точными для малых x. Например, для рассматриваемого угла $\varepsilon = 1° = \frac{\pi}{180}$ точные значения $\sin\varepsilon$ и $\cos\varepsilon$ равны 0,01745240... и 0,99984... соответственно. Приведенные выше неравенства дают следующие оценки: $\sin\varepsilon < 0{,}01745329\ldots$, $\cos\varepsilon < 1$. Разница между левыми и правыми частями этих неравенств меньше 10^{-6} и $2 \cdot 10^{-4}$ соответственно.

Итак,

$$\sin x < \sin x_0 + \varepsilon \cdot \cos x_0, \text{ если } 0 < x, x_0, \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$$

Геометрически это неравенство означает, что касательная к графику $y = \sin x$, проведенная в точке с абсциссой x_0, лежит выше этого графика (справа от точки x_0).

Для рассматриваемых конкретных углов это неравенство примет вид:

$$\sin 31° < \frac{180 + \pi\sqrt{3}}{360}.$$

Так как $\pi < 4$, $\sqrt{3} < 2$, можно утверждать, что

$$\sin 31° < \frac{188}{360} = \frac{47}{90},$$

в то время как $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{47}{90}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{47}{90} \Leftrightarrow 90 > 47\sqrt{3} \Leftrightarrow 8100 > 6627.$$

Таким образом мы доказали, что $\sin 31° < \frac{1}{\sqrt{3}}$, задача решена. Попытаемся получить оценку значения выражения $\sin 31°$.

Точное значение $\sin 31°$ равно 0,515038..., а полученная оценка сверху $\frac{47}{90} = 0{,}522\ldots$, т. е. улавливает только первую цифру после запятой. Если использовать более точные оценки для π и $\sqrt{3}$, то можно гораздо точнее оценить и число $\sin 31°$. Например, заменяя π на 3,15, а $\sqrt{3}$ на 1,74, мы получим:

$$\sin 31° < \frac{180 + 3{,}15 \cdot 1{,}74}{360} = 0{,}515225,$$

т. е. точно определим три цифры после запятой у числа $\sin 31°$.

Эта оценка опирается на «известный» факт: $\pi = 3{,}14\ldots$. Его строгое доказательство — довольно тяжелая задача. Поэтому было бы интересно использовать такую оценку числа π, которую мы могли бы строго обосновать. Для этого рассмотрим окружность с радиусом $R = 1$ и описанный вокруг нее правильный 12-угольник. Его сторона равна

$$a = 2\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{2\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\cos^2 15^\circ} =$$
$$= \frac{2\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ} = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = 2(2-\sqrt{3}).$$

Ясно, что длина окружности, т. е. 2π, меньше периметра P_{12} этого 12-угольника: $2\pi < 24(2-\sqrt{3})$, так что $\pi < 12(2-\sqrt{3})$. Число $12(2-\sqrt{3})$ приближенно равно 3.215, так что это довольно хорошая верхняя оценка для π.

Теперь из неравенства

$$\sin 31^\circ < \frac{180+\pi\sqrt{3}}{360}$$

следует, что

$$\sin 31^\circ < 0{,}4 + \frac{\sqrt{3}}{15} = 0{,}51547\ldots,$$

т. е. эта оценка улавливает три цифры после запятой у числа $\sin 31^\circ$.

Ответ: $\sin 31^\circ < \frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

□ **67.** *Первый способ.* Чтобы оценить $\cos\frac{3\pi}{11}$, оценим число $\frac{3\pi}{11}$ с помощью «красивых» чисел:

$$\frac{3\pi}{12} < \frac{3\pi}{11} < \frac{3\pi}{9}.$$

Поэтому $\frac{1}{2} < \cos\frac{3\pi}{11} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. К сожалению, поскольку $\frac{\sqrt{2}}{2} > 0{,}67$, с помощью этой оценки нельзя установить, какое из двух данных чисел больше.

Более точная оценка получится, если мы представим «некрасивый» угол $x = \frac{3\pi}{11}$ в виде разности «красивого» угла $x_0 = \frac{\pi}{3}$ и «малого» угла $\varepsilon = \frac{2\pi}{33}$. Тогда с помощью неравенств (7) мы имеем:

$$\cos x = \cos(x_0 - \varepsilon) = \cos x_0 \cos\varepsilon + \sin x_0 \sin\varepsilon <$$
$$< \cos x_0 + \varepsilon \sin x_0, \text{ если } 0 < x, x_0, \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$$

Геометрически полученное неравенство означает, что касательная к графику $y = \cos x$, проведенная в точке с абсциссой x_0, лежит выше этого графика (слева от точки x_0).

Поэтому

$$\cos\frac{3\pi}{11} < \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{33}.$$

Оценивая π числом 3,15, а $\sqrt{3}$ — числом 1,74, мы получим:

$$\cos\frac{3\pi}{11} < \frac{1}{2} + \frac{3{,}15\cdot 1{,}74}{33} = 0{,}6660909\cdots < 0{,}67.$$

Второй способ. Только что изложенное решение требует довольно точной оценки числа π. Действительно, на заключительном этапе нам нужно доказать, что

$$\frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{33} < 0{,}67 \Leftrightarrow \pi < 1{,}87\sqrt{3} \equiv 3{,}2389\ldots.$$

Для этого можно было бы использовать рассуждения, проведенные при решении задачи 66, где мы установили, что

$$\pi < 12(2-\sqrt{3}) \equiv 3{,}215\ldots,$$

но мы покажем, как можно решить эту проблему другим способом.

Мы даже докажем более сильное неравенство

$$\cos\frac{3\pi}{11} < \frac{2}{3}.$$

Возводя его в квадрат, а затем понижая степень за счет удвоения угла, мы получим следующее неравенство, равносильное исходному:

$$\cos\frac{6\pi}{11} < -\frac{1}{8}.$$

Поскольку $\frac{6\pi}{11} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{22}$, это неравенство можно преобразовать к виду:

$$\sin\frac{\pi}{22} > \frac{1}{8}.$$

Проделаем с этим неравенством два раза такие же преобразования, как и с исходным неравенством (возведем в квадрат, а затем понизим вдвое степень за счет удвоения аргумента):

$$\sin^2\frac{\pi}{22} > \frac{1}{64}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1-\cos\frac{\pi}{11}}{2} > \frac{1}{64}$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos\frac{\pi}{11} < \frac{31}{32}$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos^2\frac{\pi}{11} < \frac{961}{1024}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1+\cos\frac{2\pi}{11}}{2} < \frac{961}{1024}$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos\frac{2\pi}{11} < \frac{449}{512}.$$

Поскольку $\frac{2\pi}{11} > \frac{\pi}{6}$ и оба этих угла лежат на дуге $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, где функция $y = \cos x$ монотонно убывает, можно гарантировать справедливость неравенства $\cos\frac{2\pi}{11} < \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{449}{512} \Leftrightarrow \sqrt{3} < \frac{449}{256} \Leftrightarrow 3\cdot 65536 < 201601 \Leftrightarrow 196608 < 201601.$$

Ответ: $\cos\frac{3\pi}{11} < 0{,}67$. ■

□ **68.** Поскольку $75° = 45° + 30°$, число $\sin 75°$ можно выразить через радикалы:

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Так как $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, $\sqrt{6} \approx 2{,}4$, число $\sin 75°$ приближенно равно 0,95. На основании этих рассуждений можно высказать гипотезу, что первый знак после запятой у числа $\sin 75°$ равен 9.

Это утверждение равносильно тому, что $0{,}9 \leqslant \sin 75^\circ < 1$. Поскольку неравенство $\sin 75^\circ < 1$ очевидно, достаточно доказать неравенство

$$0{,}9 \leqslant \sin 75^\circ$$
$$\Updownarrow$$
$$0{,}9 \leqslant \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{2}+\sqrt{6} \geqslant \frac{18}{5}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{3} \geqslant \frac{31}{25}$$
$$\Updownarrow$$
$$3 \geqslant \frac{961}{625}$$
$$\Updownarrow$$
$$1875 \geqslant 961\,.$$

Мы можем получить и более точную оценку выражения $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. Так как $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$; $2{,}44 < \sqrt{6} < 2{,}45$; то $0{,}96 < \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} < 0{,}97$. Следовательно, $\sin 75^\circ = 0{,}96\ldots$.

Ответ: $\sin 75^\circ = 0{,}9\ldots$. ■

□ **70.** Обозначим выражение в левой части через A и начнем его упрощение с того, что вычтем дроби:

$$A = \frac{1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}\,.$$

Теперь превратим произведение двух синусов в числителе в сумму тригонометрических функций:

$$A = \frac{1 - 2\cos 60^\circ + 2\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ}\,.$$

Появившийся $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ позволяет упростить это выражение до

$$A = \frac{\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ}\,.$$

Поскольку углы 80° и 10° дополняют друг друга до 90° (т. е. их сумма равна 90°), $\cos 80^\circ = \sin 10^\circ$, так что $A = 1$. ■

□ **76.** Обозначим искомое выражение через A и начнем его упрощение с того, что перегруппируем слагаемые так, чтобы сумма аргументов была 170°:

$$A = (\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 160^\circ) + (\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 130^\circ) + (\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 100^\circ)\,.$$

Поскольку

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y} =$$
$$= \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}\,,$$

выражение A можно привести к виду:

$$A = -2\sin 10^\circ \cdot \left(\frac{1}{\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\cos 10^\circ} + \frac{1}{\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}} \right).$$

Теперь сложим дроби в скобках (сначала две крайние, а затем добавим среднюю):

$$A = -2\sin 10^\circ \cdot \left(\frac{2\cos 10^\circ}{\cos^2 10^\circ - \frac{3}{4}} + \frac{1}{\cos 10^\circ} \right) =$$

$$= -6\sin 10^\circ \cdot \frac{4\cos^2 10^\circ - 1}{\cos 10^\circ \left(4\cos^2 10^\circ - 3\right)}.$$

Закончить решение можно двумя способами.

Можно понизить степени членов $\cos^2 10^\circ$ с помощью формулы $2\cos^2 10^\circ = 1 + \cos 20^\circ$:

$$A = -6\sin 10^\circ \cdot \frac{2\cos 20^\circ + 1}{\cos 10^\circ\,(2\cos 20^\circ - 1)} =$$

$$= -6 \cdot \frac{2\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 10^\circ}{2\cos 10^\circ \cos 20^\circ - \cos 10^\circ},$$

а затем превратить произведения $2\sin 10^\circ \cos 20^\circ$ и $2\cos 10^\circ \cos 20^\circ$ в суммы:

$$A = -6 \cdot \frac{\sin 30^\circ - \sin 10^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 30^\circ + \cos 10^\circ - \cos 10^\circ} = -6\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -2\sqrt{3}.$$

Можно использовать формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$:

$$A = -6\sin 10^\circ \cdot \frac{4(1 - \sin^2 10^\circ) - 1}{4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ} =$$

$$= -6\,\frac{3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ}{\cos 30^\circ} =$$

$$= -6\,\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = -6\,\mathrm{tg}\,30^\circ = -6\,\frac{\sqrt{3}}{3} = -2\sqrt{3}.$$

Ответ: $-2\sqrt{3}$. ■

□ **77.** *Первый способ.* Будем превращать произведения тригонометрических функций в левой части в суммы; при этом будут появляться функции «красивых» углов (60°, 30°) — за счет этого будет происходить упрощение:

$$A \equiv \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{2}\left(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ\right) \cdot \sin 70^\circ =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 70^\circ \cos 40^\circ - \frac{1}{4}\sin 70^\circ = \frac{1}{4}\left(\sin 110^\circ + \sin 30^\circ\right) - \frac{1}{4}\sin 70^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 110^\circ + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\sin 70^\circ.$$

Поскольку $\sin 110^\circ = \sin 70^\circ$ (так как $110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$), левая часть нашей формулы действительно равна $\frac{1}{8}$.

Второй способ. С помощью формулы $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ превратим все синусы в левой части нашего равенства в косинусы:

$$\cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ = \frac{1}{8}.$$

Умножим и разделим выражение в левой части на $\sin 20^\circ$ (это число, очевидно, не равно 0):

$$\frac{\cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

В числителе можно применить формулу $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ (для $\alpha = 20^\circ$):

$$\frac{\frac{1}{2}\cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

Теперь ее можно применить еще два раза:

$$\frac{\frac{1}{4}\cos 80^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\frac{1}{8}\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

Поскольку $160^\circ + 20^\circ = 180^\circ$, верно равенство $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ$. Поэтому равенство, которое нужно доказать, равносильно равенству $\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$, т. е. истинно. ■

□ **81.** Умножим и разделим искомое выражение (обозначим его A) на $\sin\frac{\pi}{7}$ (это число, очевидно, не равно 0):

$$A = \frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}.$$

В числителе можно применить формулу $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ (для $\alpha = \frac{\pi}{7}$):

$$A = \frac{\sin\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}.$$

Теперь ее можно применить еще два раза:

$$A = \frac{\sin\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}.$$

Поскольку $\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$, верно равенство $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$, так что $A = -\frac{1}{8}$.

Ответ: $-\frac{1}{8}$. ■

□ **82.** Умножим обе части равенства, которое нужно доказать, на $2\sin\frac{\pi}{7}$:

$$2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}.$$

Поскольку $\sin\frac{\pi}{7}\neq 0$, это равенство равносильно исходному. Каждое из трех произведений в левой части превратим в сумму по формуле $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$:

$$\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}.$$

Приводя подобные члены, мы получим

$$-\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}.$$

Поскольку все проделанные преобразования равносильны, это доказывает истинность исходного равенства. ■

□ **83.** Сумма S в левой части имеет вид

$$S=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha.$$

Умножим обе части этого равенства на $2\sin\frac{\alpha}{2}$ и применим тождество $2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot S=\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\alpha}{2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}.$$

После приведения подобных членов это равенство примет вид:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot S=\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}. \qquad (8)$$

Превращая разность косинусов в правой части в произведение, мы получим:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot S=\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}.$$

При $\alpha=\frac{\pi}{3}$ мы получим требуемое утверждение. ■

□ **84.** Число $\sqrt{7}$ в правой части равенства, которое нужно доказать, совершенно нетипично для тригонометрии. Чтобы избавиться от него, возведем равенство в квадрат (это преобразование, очевидно, равносильно):

$$\sin^2\frac{\pi}{7}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{7}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{7}{64}.$$

Теперь понизим вдвое степени выражений $\sin^2 x$ в левой части:

$$\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\cdot\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)=\frac{7}{8}.$$

Обозначим выражение в левой части через A. Раскрывая скобки, мы получим:

$$\begin{aligned}A=1-&\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)+\\ &+\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right)-\\ &-\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right).\end{aligned}$$

Первая скобка в правой части была вычислена в задаче 82; она равна $-\frac{1}{2}$.

Поскольку $\cos\frac{6\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7}$, в силу задачи 81 третья скобка равна $\frac{1}{8}$.

И наконец, превращая произведения $\cos x \cos y$ в суммы, мы приведем вторую скобку к виду

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right).$$

Поскольку $\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\frac{6\pi}{7}$, $\cos\frac{10\pi}{7} = \cos\frac{4\pi}{7}$, это выражение равно

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

Итак, окончательно мы имеем:

$$A = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

что и требовалось доказать. ■

□ **85.** Поскольку $\cos^2 36° = \frac{1+\cos 72°}{2}$, задача сводится к сравнению чисел $3\sin 54° = 3\cos 36°$ и $3\cos 72° + 3 - \sqrt{2}$ или, что то же самое, чисел $\cos 36° - \cos 72°$ и $1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Разность $A = \cos 36° - \cos 72°$ может быть точно подсчитана с помощью приема, использовавшегося при решении задач 77 и 81:

$$A = \cos 36° - \cos 72° = \cos 36° + \cos 108° = 2\cos 72° \cos 36° =$$
$$= \frac{2\cos 72° \cos 36° \sin 36°}{\sin 36°} = \frac{\cos 72° \sin 72°}{\sin 36°} = \frac{\sin 144°}{2\sin 36°} =$$
$$= \frac{\sin 36°}{2\sin 36°} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, задача сводится к сравнению чисел $\frac{1}{2}$ и $1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$. Приближенная прикидка показывает, что первое число меньше. Докажем эту гипотезу:

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 3 \Leftrightarrow 8 < 9.$$

По поводу этой задачи следует сделать важное замечание. Угол 36° замечателен тем, что хотя он и не связан с обычными «красивыми» углами (30°, 45°, 60°), тригонометрические функции от этого угла могут быть выражены в радикалах (по этой причине он часто встречается в школьной тригонометрии).

Это можно сделать с помощью доказанного равенства $\cos 36° - \cos 72° = \frac{1}{2}$. Если $\cos 36°$ обозначить буквой y, то оно примет вид:

$$y - (2y^2 - 1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4y^2 - 2y - 1 = 0.$$

Рассмотрим это равенство как уравнение относительно y. Оно имеет два корня: $y_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, $y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Первое число, очевидно, не может быть значением $\cos 36°$ (оно отрицательно). Поэтому $\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Теперь с помощью тригонометрических тождеств можно найти значения других тригонометрических функций для $\alpha = 36°$ и связанных с ним углов:

$$\cos 36° = \sin 54° = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\sin 36° = \cos 54° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\operatorname{tg} 36° = \operatorname{ctg} 54° = \sqrt{5-2\sqrt{5}},$$

$$\cos 72° = \sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\sin 72° = \cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\operatorname{tg} 72° = \operatorname{ctg} 18° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

В качестве основы рассуждений для вывода этих равенств можно использовать и другие соотношения, например $\sin 36° = \cos 54°$. Применяя формулы $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, мы получим после сокращения на $\cos 18°$:

$$2\sin 18° = 4\cos^2 18° - 3 \Leftrightarrow 4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0,$$

откуда

$$\sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Запомнить значения тригонометрических функций от углов 18°, 36°, 54°, 72° тяжело, но нужно помнить, что они есть, и знать, как их выводить, чтобы в случае необходимости провести на экзамене все необходимые выкладки.

Ответ: второе число больше. ■

□ **87.** Из формулы

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

следует, что если $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$ — числа рациональные, то и $\operatorname{tg}(x+y)$ — число рациональное.

Поэтому если $\operatorname{tg} 5° \in \mathbb{Q}$, то $\operatorname{tg} 10° \in \mathbb{Q}$, $\operatorname{tg} 20° \in \mathbb{Q}$ и, наконец, $\operatorname{tg} 30° \in \mathbb{Q}$, что неверно, так как $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: нет. ■

□ **88.** Из формулы

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

следует, что если $\sin x$ — число рациональное, то и $\sin 3x$ — число рациональное.

Поэтому если $\sin 25° \in \mathbb{Q}$, то и $\sin 75° \in \mathbb{Q}$, что неверно, так как

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ: нет. ■

□ **89.** Если равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1 \tag{9}$$

верно при всех $x \in \mathbb{R}$, то, в частности, оно верно при $x = 0$:

$$b^2 = \cos b^2 - 1. \tag{10}$$

Выражение в левой части этого равенства неотрицательно, а выражение в правой части меньше или равно 0. Поэтому равенство (10) равносильно системе

$$\begin{cases} b^2 = 0\,, \\ \cos b^2 - 1 = 0\,, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $b = 0$.

Теперь исходное равенство (9) примет вид:

$$a(\cos x - 1) = \cos(ax) - 1 \text{ при всех } x \in \mathbb{R}.$$

В частности, при $x = \pi$ и $x = \frac{\pi}{2}$ мы получим:

$$\begin{cases} -2a = \cos(\pi a) - 1 = -2\sin^2\frac{\pi a}{2} = -2 + 2\cos^2\frac{\pi a}{2}\,, \\ -a = \cos\frac{\pi a}{2} - 1\,. \end{cases}$$

Исключим из этой системы $\cos\frac{\pi a}{2}$:

$$-2a = -2 + 2(1-a)^2 \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ или } a = 1\,.$$

Итак, если равенство (9) верно при всех x, то либо $a=0, b=0$, либо $a=1, b=0$. Поскольку этот вывод является следствием равенства (9) и, вообще говоря, не равносилен ему, необходима проверка найденных пар $(a; b)$.

В первом случае равенство (9) примет вид: $0 = \cos 0 - 1$, т. е. верно при всех x.

Во втором случае равенство (9) примет вид: $\cos x - 1 = \cos x - 1$, т. е. верно при всех x.

Ответ: $(0; 0), (1; 0)$. ■

□ **90.** Назовем стандартным тригонометрическим многочленом выражение вида

$$a_0 + (a_1 \sin x + b_1 \cos x) + (a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x). \tag{11}$$

Выражение $(a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x)$ является блоком второй степени (если хотя бы один из коэффициентов a_2, b_2 отличен от нуля), выражение $(a_1 \sin x + b_1 \cos x)$ является блоком первой степени (если хотя бы один из коэффициентов a_1, b_1 отличен от нуля), а число a_0 — блоком нулевой степени (таким образом, мы ограничиваемся многочленами степени не выше второй).

Для тригонометрических выражений вида (11) справедливо следующее утверждение:

стандартный тригонометрический многочлен тождественно равен 0 *тогда и только тогда, когда равны* 0 *все его коэффициенты:*

$$a_0 + (a_1 \sin x + b_1 \cos x) + (a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x) \equiv 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = 0\,.$$

Для доказательства достаточно подставить вместо x конкретные числовые значения $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$ и решить получившуюся систему относительно неизвестных a_0, a_1, b_1, a_2, b_2; она имеет единственное решение $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 0$.

Из этого утверждения следует следующий результат:

два стандартных тригонометрических многочлена совпадают при всех значениях переменной x тогда и только тогда, когда совпадают соответствующие коэффициенты.

Теперь приступим непосредственно к решению нашей задачи. Запишем выражение

$$T(x) = \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\right)^2 + A\cos(x+\varphi) + B\sin(2x+\psi)$$

в виде стандартного тригонометрического многочлена:

$$\begin{aligned}
T(x) &= \left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + 2\right)^2 + A(\cos\varphi\cos x - \sin\varphi\sin x) + \\
&\quad + B(\cos\psi\sin 2x + \sin\psi\cos 2x) = \\
&= \left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) + 4 + \\
&\quad + A(\cos\varphi\cos x - \sin\varphi\sin x) + B(\cos\psi\sin 2x + \sin\psi\cos 2x) = \\
&= 4 + (2 - A\sin\varphi)\sin x + (-2\sqrt{3} + A\cos\varphi)\cos x + \\
&\quad + \frac{1}{4}\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x + \frac{3}{4}\cos^2 x + \\
&\quad + B(\cos\psi\sin 2x + \sin\psi\cos 2x) = \\
&= 4 + (2 - A\sin\varphi)\sin x + (-2\sqrt{3} + A\cos\varphi)\cos x + \\
&\quad + \frac{1}{8}(1 - \cos 2x) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}(1 + \cos 2x) + \\
&\quad + B(\cos\psi\sin 2x + \sin\psi\cos 2x) = \\
&= \frac{9}{2} + (2 - A\sin\varphi)\sin x + (-2\sqrt{3} + A\cos\varphi)\cos x + \\
&\quad + \left(B\cos\psi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\sin 2x + \\
&\quad + \left(B\sin\psi + \frac{1}{4}\right)\cos 2x.
\end{aligned}$$

Поэтому равенство $T(x) \equiv C$ при всех $x \in \mathbb{R}$ равносильно системе:

$$\begin{cases}
C = \dfrac{9}{2}, \\
A\sin\varphi = 2, \\
A\cos\varphi = 2\sqrt{3}, \\
B\cos\psi = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\
B\sin\psi = -\dfrac{1}{4}.
\end{cases}$$

Отсюда следует, что если задача имеет решение, то константа C может принимать только одно значение: $\frac{9}{2}$.

Докажем теперь, что задача действительно имеет решение. Ясно, что дело сводится к вопросу о совместности двух систем:

$$\begin{cases} A\sin\varphi = 2, \\ A\cos\varphi = 2\sqrt{3}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} B\cos\psi = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ B\sin\psi = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Возводя в каждой из этих систем уравнения в квадрат и складывая, мы получим, что $A = \pm 4$, $B = \pm\frac{1}{2}$.

Если взять, например, $A = 4$, $B = \frac{1}{2}$, то эти системы примут вид:

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{1}{2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos\psi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin\psi = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Они, очевидно, имеют решения, например $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\psi = -\frac{\pi}{6}$.

ОТВЕТ: да; $C = \frac{9}{2}$. ■

Решения к главе 2

□ **91.** Решение этой задачи предполагает использование (и знание) следующей теоремы.

Пусть $f(x)$ — функция, область определения которой, D_f, симметрична относительно 0, т. е. $x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$. Тогда $f(x)$ можно представить и притом единственным способом в виде суммы четной и нечетной функций.

Докажем эту теорему.

Допустим, что

$$f(x) = g(x) + h(x), \tag{12}$$

где $g(x)$ — четная, а $h(x)$ — нечетная. Заменим в этом равенстве x на $-x$:

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x). \tag{13}$$

Рассмотрим равенства (12) и (13) как систему относительно $g(x)$ и $h(x)$. Складывая и вычитая эти уравнения, мы получим:

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}, \\ h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}. \end{cases} \tag{14}$$

Таким образом, если представление $f(x)$ в виде суммы четной и нечетной функций возможно, то эти функции однозначно определены (формулами (14)).

Для завершения доказательства достаточно проверить, что функции $g(x)$ и $h(x)$, которые даются формулами (14), действительно являются четной и нечетной соответственно и их сумма равна $f(x)$.

Прежде всего отметим, что области определения этих функций совпадают с областью определения $f(x)$ и поэтому симметричны относительно 0.

Далее,

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x),$$

т. е. $g(x)$ — четная.

Аналогично,

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x),$$

т. е. $h(x)$ — нечетная.

И наконец,

$$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x).$$

Применяя формулы (14) для $f(x) = \dfrac{3^x + x^2}{\sin x}$, мы немедленно получаем ответ задачи.

Ответ: $f(x) = \left(\dfrac{3^x - 3^{-x}}{2\sin x}\right) + \left(\dfrac{3^x + 3^{-x} + 2x^2}{2\sin x}\right)$. ■

□ **93.** Напомним, что функция $y = f(x)$ с областью определения D_f называется периодической с периодом $T \neq 0$, если

1) ее область определения выдерживает сдвиги на $\pm T$, т. е. $x \in D_f \Rightarrow x \pm T \in D_f$;
2) для всех $x \in D_f$ верно равенство $f(x+T) = f(x)$.

Область определения функции $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ — это $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Если $f(x)$ периодична с периодом $T \neq 0$, то $T \notin D_f$ (в противном случае мы бы имели $0 = T - T \in D_f$). Однако $f(x)$ определена при всех $x \neq 0$. Полученное противоречие означает, что не выполнен первый пункт определения периодической функции. ■

□ **94.** Прежде всего понизим вдвое степень за счет удвоения аргумента:

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(6x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 6x.$$

Отсюда ясно, что $T_0 = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ будет периодом:

$$y\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 6\left(x + \frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(6x + 2\pi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 6x = y(x).$$

Пусть $T \neq 0$ — какой-то период функции $y(x)$, т. е. при всех x верно равенство

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 6(x+T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 6x.$$

Из него при $x = \dfrac{\pi}{12}$ мы получим, что $\cos 6T = 1$, откуда $6T = 2\pi n$ при некотором $n \in \mathbb{Z}$, т. е. $T = \dfrac{\pi}{3} \cdot n$ кратно периоду $T_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: $T = \dfrac{\pi}{3}$. ■

□ **99.** Рассмотрим функцию $f(x) = \cos Ax \cdot \cos Bx$, где параметры A и B отличны от 0, и допустим, что она периодична с некоторым периодом $T \neq 0$, т. е. при всех x верно равенство $f(x+T)=f(x)$. В частности, при $x=0$ мы получим:

$$\cos AT\cdot\cos BT=1$$
$$\Downarrow$$
$$\cos^2 AT\cdot\cos^2 BT=1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}\cos^2 AT=1\,,\\ \cos^2 BT=1\end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}AT=\pi n,\text{для некоторого } n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\,,\\ BT=\pi m,\text{для некоторого } m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\,.\end{cases}$$

Тогда

$$nB=\frac{\pi nBT}{\pi T}=\frac{\pi n\pi m}{\pi T}=\frac{AT\pi m}{\pi T}=Am.$$

Итак, если $f(x)=\cos Ax\cdot\cos Bx$ периодична, то для некоторых $n,m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ верно равенство $nB=mA$.

Допустим теперь, что $f(x)$ периодична при любом $A\neq 0$. Рассматривая $A=1$ и $A=\sqrt{2}$, мы получим, что для некоторых ненулевых целых чисел n,m,k,l верны равенства: $nB=m$, $kB=l\sqrt{2}$, откуда следует рациональность числа $\sqrt{2}$: $\sqrt{2}=\frac{km}{nl}$. Полученное противоречие означает, что $f(x)=\cos Ax\cdot\cos Bx$ может быть периодичной при любом A только в случае $B=0$.

Для функции

$$f(x)=\cos(a\pi x)\cdot\cos\Big(\big(t_1^3+t_2^3\big)\cdot\pi x\Big)$$

это означает, что

$$t_1^3+t_2^3=0\Leftrightarrow t_1^3=-t_2^3\Leftrightarrow t_1=-t_2\Leftrightarrow t_1+t_2=0.$$

Поскольку t_1 t_2 — корни квадратного уравнения

$$t^2-(5b-2)^2t-3b^2-7b+1=0,$$

в силу теоремы Виета мы имеем:

$$5b-2=0\Leftrightarrow b=\frac{2}{5}\,.$$

В заключение необходимо установить, что при найденном значении параметра b квадратное уравнение

$$t^2-(5b-2)^2t-3b^2-7b+1=0$$

действительно, имеет два корня: при $b=\frac{2}{5}$ это уравнение примет вид:

$$t^2=\frac{57}{25}\Leftrightarrow t=\pm\frac{\sqrt{57}}{5}\,.$$

Ответ: $b=\frac{2}{5}$. ■

□ **101.** Функцию $y=\cos 2x-3\sin x=-2\sin^2 x-3\sin x+1$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y=-2z^2-3z+1$ и $z=\sin x$. При изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ значения переменной z заполняют отрезок $[-1;1]$. Поэтому множество значений функции $y=\cos 2x-3\sin x$ совпадает с множеством значений функции $y=-2z^2-3z+1$ при $z\in[-1;1]$.

Вершина параболы $y=-2z^2-3z+1$ имеет координаты $z_0=-\frac{3}{4}\in[-1;1]$, $y_0=\frac{17}{8}$, а ее значения в точках $z=-1$ и $z=1$ равны 2 и -4 соответственно. Поэтому множество значений функции $y=-2z^2-3z+1$ при $z\in[-1;1]$ — это отрезок $\left[-4;\frac{17}{8}\right]$.

Поскольку $\frac{17}{8}<\sqrt{5}$, этот отрезок является подмножеством отрезка $[-4;\sqrt{5}]$.

ОТВЕТ: верно; это множество — отрезок $\left[-4;\frac{17}{8}\right]$. ■

□ **103.** Понизим вдвое степени всех тригонометрических членов за счет удвоения аргументов:

$$y=\frac{1-\cos 2x}{2}-6\sin 2x+3\,\frac{1+\cos 2x}{2}-2\sqrt[3]{66}=\cos 2x-6\sin 2x+2-2\sqrt[3]{66}.$$

Известно, что область значений функции $f(x)=a\sin t+b\cos t$ — это отрезок $\left[-\sqrt{a^2+b^2};\sqrt{a^2+b^2}\right]$. В нашем случае $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{37}$, так что область значений функции $f(x)=\cos 2x-6\sin 2x+2-2\sqrt[3]{66}$ — это отрезок $[-\sqrt{37}+2-2\sqrt[3]{66};\sqrt{37}+2-2\sqrt[3]{66}]$. Функция $f(x)$ может принимать неотрицательные значения тогда и только тогда, когда число $\sqrt{37}+2-2\sqrt[3]{66}$ неотрицательно:

$$\sqrt{37}+2\geqslant 2\sqrt[3]{66}$$
$$\Updownarrow$$
$$49\sqrt{37}+230\geqslant 528$$
$$\Updownarrow$$
$$49\sqrt{37}\geqslant 298$$
$$\Updownarrow$$
$$49^2\cdot 37\geqslant 298^2$$
$$\Updownarrow$$
$$88\,837\geqslant 88\,804.$$

■

□ **105.** Функция $y=\operatorname{tg}^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^2 x$ определена для всех $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Для этих значений x формулу, которая задает нашу функцию, можно упростить:

$$y=\operatorname{tg}^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\cos^2 x+\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Поэтому ее графиком будет горизонтальная прямая $y=1$, из которой выколоты точки с абсциссами $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ (см. рис. 2). ■

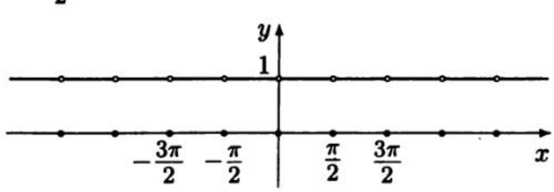


Рис. 2

□ **110.** Если $\sin x \geqslant 0$, то наша функция совпадает с функцией $y = 2\sin x$, а если $\sin x \leqslant 0$, то наша функция совпадает с функцией $y = 0$. Поэтому удобно изображать график функции $f(x) = \sin x - |\sin x|$ на том же рисунке, где изображен график функции $y = \sin x$; это сделано на рис. 3. ■

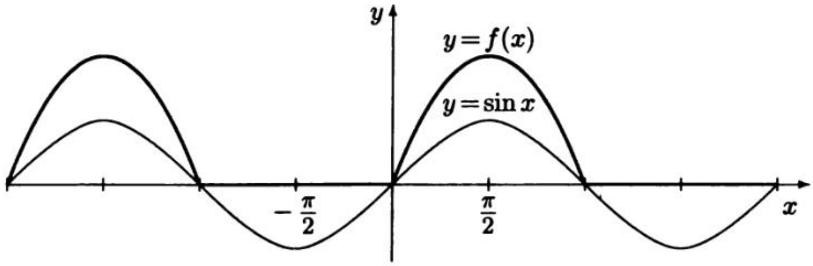


Рис. 3

□ **129.** Функцию $y(x) = \sin^3 x - \sin^6 x + 1$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y = -z^2 + z + 1$ и $z = \sin^3 x$. При изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ значения переменной z заполняют отрезок $[-1; 1]$. Поэтому наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = \sin^3 x - \sin^6 x + 1$ совпадают с наименьшим и наибольшим значениями функции $y = -z^2 + z + 1$ на отрезке $z \in [-1; 1]$.

Вершина параболы $y = -z^2 + z + 1$ имеет координаты $z_0 = \frac{1}{2} \in [-1; 1]$, $y_0 = \frac{5}{4}$, а ее значения в точках $z = -1$ и $z = 1$ равны -1 и 1 соответственно. Поэтому на отрезке $-1 \leqslant z \leqslant 1$ наименьшее и наибольшее значения функции $y = -z^2 + z + 1$ равны -1 и $\frac{5}{4}$ соответственно.

Ответ: $y_{\min} = -1$; $y_{\max} = \frac{5}{4}$. ■

□ **138.** Рассмотрим функцию $f(x, y) = 6\sin x\cos y + 2\sin x\sin y + 3\cos x$ как функцию одной переменной x:

$$f = a\sin x + b\cos x,$$

где $a = 6\cos y + 2\sin y$, $b = 3$.

Ее наибольшее значение (при фиксированном значении y) равно

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(6\cos y + 2\sin y)^2 + 9} = \\ &= \sqrt{36\cos^2 y + 24\sin y\cos y + 4\sin^2 y + 9} = \\ &= \sqrt{18(1 + \cos 2y) + 12\sin 2y + 2(1 - \cos 2y) + 9} = \\ &= \sqrt{29 + 12\sin 2y + 16\cos 2y}.\end{aligned}$$

Наибольшее значение величины $12\sin 2y + 16\cos 2y$ при изменении параметра y от $-\infty$ до $+\infty$ равно $\sqrt{12^2 + 16^2} = 20$. Соответственно наибольшее значение функции $f(x, y)$ при изменении обеих переменных x и y от $-\infty$ до $+\infty$ равно $\sqrt{29 + 20} = 7$.

Аналогичные рассуждения показывают, что наименьшее значение функции $f(x,y)$ равно -7.

Ответ: $f_{\min} = -7$, $f_{\max} = +7$. ■

□ **139.** Неравенство $\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}} \geqslant \frac{\pi}{6}$ равносильно неравенству

$$\frac{x}{2\sqrt{3}} \geqslant \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x \geqslant 2.$$

Теперь займемся функцией

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{1+3x-x^2}\right)\right).$$

Ее можно рассматривать как суперпозицию функций $y = \operatorname{tg} z$, $z = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} u$, $u = 2-\sqrt{v}$, $v = -x^2+3x+1$. Начнем анализировать эти функции по порядку, начиная с внутренних.

Квадратичная функция $v = -x^2+3x+1$ определена на всей числовой прямой, возрастает при $x \leqslant \frac{3}{2}$ и убывает при $x \geqslant \frac{3}{2}$. Поэтому при $x \geqslant 2$ эта функция убывает от $v(2) = 3$ до $-\infty$, пересекая ось Ox в точке $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Поскольку функция $u = 2-\sqrt{v}$ определена при $v \geqslant 0$, мы должны ограничить возможные значения переменной x отрезком $\left[2; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$. Для этих x значения функции $v(x)$ заполняют отрезок $[0;3]$. Соответствующая область значений переменной u — это отрезок $[2-\sqrt{3};2]$. Поскольку $2-\sqrt{3} > 0$, для всех этих значений переменной u определено выражение $z = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} u$, причем значения переменной z заполняют отрезок $\left[\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 2; \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(2-\sqrt{3})\right] = \left[-\log_3\sqrt{2}; \log_3\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Чтобы определить область значений функции $y = \operatorname{tg} z$, нужно знать, как отрезок $-\log_3\sqrt{2} \leqslant z \leqslant \log_3\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ расположен относительно точек $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, в которых функция $y = \operatorname{tg} z$ не определена и фактически совершает мгновенный скачок из $+\infty$ в $-\infty$.

Приближенная прикидка дает:

$$\log_3\sqrt{2} \approx \log_3 1{,}4 \approx 0{,}3,$$

$$\log_3\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \approx \log_3\frac{2{,}4+1{,}4}{2} = \log_3 1{,}9 \approx 0{,}6.$$

Поэтому можно высказать гипотезы, что числа $\log_3\sqrt{2}$ и $\log_3\frac{\sqrt{6}+\sqrt{8}}{2}$ меньше 1 и положительны. Аккуратное доказательство соответствующих неравенств проводится стандартными методами:

$$0 < \log_3\sqrt{2} < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$1 < \sqrt{2} < 3$$

$$\Updownarrow$$

$$1 < 2 < 9.$$

Аналогично,

$$0 < \log_3 \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} < 1$$
$$\Updownarrow$$
$$1 < \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} < 3$$
$$\Updownarrow$$
$$2 < \sqrt{6}+\sqrt{2} < 6$$
$$\Updownarrow$$
$$4 < 8+2\sqrt{12} < 36$$
$$\Updownarrow$$
$$-1 < \sqrt{12} < 14\,.$$

Из полученных оценок следует, что отрезок $-\log_3\sqrt{2} \leqslant z \leqslant \log_3 \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ является частью интервала $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$, на котором $\operatorname{tg} z$ монотонно возрастает. Поэтому значения переменной y заполняют отрезок $\left[-\operatorname{tg}\left(\log_3\sqrt{2}\right); \operatorname{tg}\left(\log_3 \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)\right]$.

Ответ: $\operatorname{tg}\left(\log_3 \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$. ■

□ **140.** Поскольку $\sin^2 \leqslant 1$, $\cos^2 x \leqslant 1$, при всех значениях x верны неравенства $\sin^8 x \leqslant \sin^2 x$, $\cos^{14} x \leqslant \cos^2 x$. Складывая эти неравенства, мы получим, что при всех x значения функции $y = \sin^8 x + \cos^{14} x$ не превосходят 1. С другой стороны, эта граница достигается (например, при $x = \frac{\pi}{2}$). Поэтому искомое наибольшее значение равно 1.

Ответ: $y_{\max} = 1$. ■

□ **143.** Функцию $y(x)$ можно рассматривать как сумму двух функций: $g(x) = 2x + \frac{3\pi}{x}$ и $h(x) = \sin(x^2)$. Первая функция является суммой двух «почти взаимно обратных» положительных чисел. Естественно применить для оценки возможных значений этой функции неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$g(x) \geqslant 2\sqrt{2x \cdot \frac{3\pi}{x}} = 2\sqrt{6\pi}.$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $2x = \frac{3\pi}{x}$, что равносильно $x = \frac{\sqrt{6\pi}}{2}$ (напомним, что $x > 0$).

Значения второго слагаемого, $h(x) = \sin(x^2)$, не выходят за пределы отрезка $[-1; 1]$. Значение -1 достигается в бесконечном числе точек вида $x = \pm\frac{\sqrt{(8n+6)\pi}}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому наименьшее значение функции $h(x)$ на множестве $x > 0$ равно -1.

Вообще говоря, наименьшее значение суммы двух функций, $g(x)$ и $h(x)$, не равно сумме наименьших значений слагаемых. Но если существует точка x_0, в которой как $g(x)$, так и $h(x)$ достигают наименьшего значения, то в этой же точке достигается наименьшее значение функции $y(x) = g(x) + h(x)$ (и, следовательно, оно равно сумме наименьших значений $g(x)$ и $h(x)$). В нашем случае точка $x_0 = \dfrac{\sqrt{6\pi}}{2}$, в которой достигается наименьшее значение функции $g(x)$, встречается и среди положительных чисел $x = \dfrac{\sqrt{(8n+6)\pi}}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в которых достигается наименьшее значение функции $h(x)$ (под номером $n=0$). Поэтому наименьшее значение $y(x)$ равно $2\sqrt{6\pi} - 1$, причем оно достигается в точке $x_0 = \dfrac{\sqrt{6\pi}}{2}$.

Рассуждения, проведенные в предыдущем абзаце, можно было бы упростить, просто проверив, что в точке $x_0 = \dfrac{\sqrt{6\pi}}{2}$ функция $h(x)$ принимает (минимально возможное для нее) значение -1.

ОТВЕТ: $y_{\min} = 2\sqrt{6\pi} - 1 = y\left(\dfrac{\sqrt{6\pi}}{2}\right)$. ■

□ **145.** Прежде всего отметим, что наибольшее значение данной функции не может достигаться при отрицательном x. Действительно, если $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, то симметричное ему положительное число $-x$ лежит на промежутке $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, а $\dfrac{x}{2} < \dfrac{-x}{2}$, $\sin^2 x = \sin^2(-x)$, так что

$$y(x) = \frac{x}{2} + \sin^2 x < \frac{-x}{2} + \sin^2(-x) = y(-x).$$

На множестве $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ функции $f(x) = \dfrac{x}{2}$ и $g(x) = \sin^2 x$ возрастают. Следовательно, на этом множестве функция $y(x)$ также возрастает. Поэтому ее наибольшее значение достигается при $x = \dfrac{\pi}{2}$; оно равно $\dfrac{\pi}{4} + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 1$.

ОТВЕТ: $y_{\max} = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi+4}{4}$. ■

□ **147.** Функцию $y = \sin^2 x + 2\cos x - 1 = -\cos^2 x + 2\cos x$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y = -z^2 + 2z$ и $z = \cos x$. При изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ значения переменной z заполняют отрезок $[-1; 1]$. Поэтому множество значений функции $y = -\cos^2 x + 2\cos x$ совпадает с множеством значений функции $y = -z^2 + 2z$ при $z \in [-1; 1]$.

Вершина параболы $y = -z^2 + 2z$ имеет координаты $z_0 = 1 \in [-1; 1]$, $y_0 = 1$, а ее значение в точке $z = -1$ равно -3. Поэтому множество значений функции $y = -z^2 + 2z$ при $z \in [-1; 1]$ — это отрезок $[-3; 1]$.

Если $k > 0$, то множество значений исходной функции

$$y(x) = k\left(\sin^2 x + 2\cos x - 1\right)$$

будет отрезком $[-3k; k]$. Условие, что функция $y(x)$ не принимает значений, больших 3, равносильно тому, что $k \leqslant 3$ — из положительных значений k только эти значения должны быть включены в ответ.

Если $k < 0$, то множество значений исходной функции будет отрезком $[k; -3k]$. Условие, что функция $y(x)$ не принимает значений, больших 3, равносильно тому, что $-3k \leqslant 3 \Leftrightarrow k \geqslant -1$ — из отрицательных значений k только эти значения должны быть включены в ответ.

И наконец, если $k = 0$, то множество значений исходной функции будет состоять из одной точки 0, так что функция $y(x)$ не принимает значений, больших 3, и поэтому $k = 0$ должно быть включено в ответ.

ОТВЕТ: $-1 \leqslant k \leqslant 3$. ■

□ **148.** Запишем функцию

$$y = \cos x - \frac{3}{2}\cos\varphi + \cos(x+\varphi)$$

как линейную комбинацию $\sin x$ и $\cos x$:

$$y = (1+\cos\varphi)\cos x - \sin\varphi\sin x - \frac{3}{2}\cos\varphi.$$

Поэтому ее наибольшее значение равно

$$M(\varphi) = \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} - \frac{3}{2}\cos\varphi = \sqrt{2+2\cos\varphi} - \frac{3}{2}\cos\varphi =$$

$$= -3\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|^2 + 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| + \frac{3}{2}.$$

Функцию $M(\varphi)$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y = -3z^2 + 2z + \frac{3}{2}$ и $z = \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$. При изменении переменной φ от $-\infty$ до $+\infty$ значения переменной z заполняют отрезок $[0;1]$. Поэтому наибольшее значение функции $M(\varphi)$ совпадает с наибольшим значением функции $y = -3z^2 + 2z + \frac{3}{2}$ на отрезке $[0;1]$.

Вершина параболы $y = -3z^2 + 2z + \frac{3}{2}$ имеет координаты $z_0 = \frac{1}{3}$, $y_0 = \frac{11}{6}$. Поскольку старший коэффициент отрицателен, а $z_0 \in [0;1]$, наибольшее значение $M(\varphi)$ равно $y_0 = \frac{11}{6}$ и достигается при $\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| = \frac{1}{3}$. Это уравнение на отрезке $\frac{\varphi}{2} \in [0;\pi]$ имеет ровно два корня: $\frac{\varphi}{2} = \arccos\left(\pm\frac{1}{3}\right)$ (достаточно применить определение $\arccos a$ при $a = \pm\frac{1}{3}$).

ОТВЕТ: $2\arccos\frac{1}{3}\,; 2\pi - 2\arccos\frac{1}{3}$. ■

□ **151.** Чтобы найти наибольшее значение функции $y = f(x)$, определенной и непрерывной на замкнутом отрезке $[a;b]$, нужно

1) найти критические точки (точки, в которых производная $f'(x)$ не существует или равна 0), лежащие внутри отрезка $[a;b]$;
2) подсчитать значения функции в этих критических точках, а также в граничных точках отрезка;
3) выбрать из этих чисел наибольшее.

Применительно к нашей задаче эта процедура дает:

1) $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$. Поэтому $f'(x)$ существует при всех x. Далее, уравнение $f'(x) = 0$ сводится к уравнению

$$\cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{(2n+1)\pi}{3}, x = (2m+1)\pi, n, m \in \mathbb{Z}.$$

Из этих серий на интервал $0 < x < \frac{5\pi}{4}$ попадают только числа $x_1 = \pi$ и $x_2 = \frac{\pi}{3}$ — это и будут искомые критические точки;

2) $f(0)=0$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}$, $f(\pi)=0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

3) наибольшее из этих чисел — это $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ■

□ **152.** Понизим в выражении

$$A=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

степени за счет удвоения аргументов:

$$A=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma).$$

Поскольку $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, один из углов, скажем, γ, можно исключить:

$$A=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\big(\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\big).$$

Мы должны найти наименьшее значение этого выражения на множестве

$$\begin{cases}\alpha,\beta>0,\\ \alpha+\beta<\pi.\end{cases} \tag{15}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\cos x+\cos y-\cos(x+y)$$

и найдем ее наибольшее значение.

Поскольку $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\cos(x+y)=2\cos^2\frac{x+y}{2}-1$,

$$f(x,y)=-2\cos^2\frac{x+y}{2}+2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+1.$$

Введем новые переменные $u=\frac{x+y}{2}$, $v=\frac{x-y}{2}$, так что, в свою очередь, $x=u+v$, $y=u-v$. Поскольку между парами (x,y) и (u,v) имеется взаимно однозначное соответствие, наибольшее значение функции $f(x,y)$ совпадает с наибольшим значением функции

$$g(u,v)=-2\cos^2 u+2\cos u\cos v+1.$$

Для новых переменных $a=\cos u$, $b=\cos v$ эта функция примет вид:

$$h(a,b)=-2a^2+2ab+1.$$

Наибольшее значение функции $g(u,v)$ совпадает с наибольшим значением функции $h(a,b)$ на множестве $-1\leqslant a\leqslant 1$, $-1\leqslant b\leqslant 1$.

Относительно переменной a функция $h(a,b)$ является квадратичной. При фиксированном значении b ее наибольшее значение достигается в точке $a_0=\frac{b}{2}$ и равно $M(b)=h(a_0,b)=1+\frac{b^2}{2}$. Если $b\in[-1;1]$, то $a_0\in[-1;1]$. Поэтому $M(b)$ будет наибольшим значением $h(a,b)$ на множестве $a\in[-1;1]$.

Наибольшее значение $M(b)$ на множестве $b\in[-1;1]$, очевидно, достигается в точках ±1 и равно $M=\frac{3}{2}$.

Поэтому наибольшее значение функции $h(a,b)$ на множестве $-1 \leqslant a \leqslant 1$, $-1 \leqslant b \leqslant 1$ равно $\frac{3}{2}$; оно достигается в двух точках: $(a,b) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и $(a,b) = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.

Соответственно, наибольшее значение функции $g(u,v)$ также равно $\frac{3}{2}$. Оно достигается в точках (u,v), удовлетворяющих равенствам:

$$\begin{cases} \cos u = \dfrac{1}{2}, \\ \cos v = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos u = -\dfrac{1}{2}, \\ \cos v = -1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} u = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ v = 2\pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ v = \pi + 2\pi m, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Поэтому и наибольшее значение функции $f(x,y)$ равно $\frac{3}{2}$. Оно достигается в точках (x,y), которые даются формулами:

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n+m), \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(n-m), \; n, m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + \pi + 2\pi(n+m), \\ y = \pm\dfrac{2\pi}{3} - \pi + 2\pi(n-m), \; n, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Среди этих пар (x,y) есть одна пара, удовлетворяющая условиям (15): $(x,y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. Поэтому наименьшее значение выражения A равно $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

Наибольшее значение функции

$$f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y)$$

можно найти и другим способом.

Если $\cos(x+y)$ заменить на $\cos x \cos y - \sin x \sin y$, то $f(x,y)$ примет вид:

$$f(x,y) = \cos x(1 - \cos y) + \sin x \sin y + \cos y.$$

При фиксированном значении y выражение $\cos x(1-\cos y) + \sin x \sin y$ можно рассматривать как линейную комбинацию $\cos x$ и $\sin x$ с коэффициентами $a = 1 - \cos y$ и $b = \sin y$. Поэтому его наибольшее значение равно

$$\sqrt{a^2+b^2} \equiv \sqrt{(1-\cos y)^2 + \sin^2 y} = \sqrt{2 - 2\cos y} = \sqrt{4\sin^2\frac{y}{2}} = 2\left|\sin\frac{y}{2}\right|.$$

Соответственно, при фиксированном значении y наибольшее значение функции $f(x,y)$ (рассматриваемой как функция одной переменной x) равно

$$M(y) = 2\left|\sin\frac{y}{2}\right| + \cos y = -2\sin^2\frac{y}{2} + 2\left|\sin\frac{y}{2}\right| + 1.$$

Функция $M(y)$ является суперпозицией функций $F(t) = -2t^2 + 2t + 1$ и $t = \left|\sin\frac{y}{2}\right|$. Поэтому ее наибольшее значение равно наибольшему значению функции $F(t) = -2t^2 + 2t + 1$ на множестве $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Вершина параболы $F(t) = -2t^2 + 2t + 1$ имеет координаты $t_0 = \frac{1}{2}$, $M(t_0) = \frac{3}{2}$. Поскольку $t_0 \in [0; 1]$, наибольшее значение функции $F(t) = -2t^2 + 2t + 1$ на множестве $0 \leqslant t \leqslant 1$ равно $\frac{3}{2}$ и достигается в точке $t_0 = \frac{1}{2}$.

Соответственно, значения y, в которых достигается наибольшее значение функции $M(y)$, могут быть найдены из равенства

$$\left|\sin\frac{y}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2\frac{y}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1-\cos y}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для этих значений y исходная функция $f(x, y)$ примет вид:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\cos x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2} = \cos\left(x \mp \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}.$$

Ее наибольшее значение равно $\frac{3}{2}$ (впрочем, этот факт мы уже установили) и достигается при x, которые являются решениями уравнения

$$\cos\left(x \mp \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x \mp \frac{\pi}{3} = 2\pi m \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что второй способ исследования функции $f(x, y)$ дал более компактную форму записи точек, в которых достигается наибольшее значение $f(x, y)$:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi m, \\ y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, \\ y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$. ■

□ **153.** Поскольку $A + B + C = \pi$, один из углов, скажем C, можно исключить: $C = \pi - A - B$, так что теперь мы должны найти наибольшее значение тригонометрической функции от двух аргументов

$$f(A, B) = \cos A + 2\cos B - \cos(A + B) = 2\cos B + 2\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)\sin\frac{B}{2}.$$

При этом должны быть выполнены ограничения

$$\begin{cases} 0 < A \leqslant B, \\ A \leqslant \pi - 2B \end{cases} \tag{16}$$

(второе неравенство следует из неравенства $B \leqslant C$).

Область $\mathcal{D}$, задаваемая этими ограничениями, изображена на рис. 4. Чтобы найти $M = \max_{(A,B)\in\mathcal{D}} f(A,B)$, найдем $M(B) = \max_A f(A,B)$. Тогда $M = \max_B M(B)$.

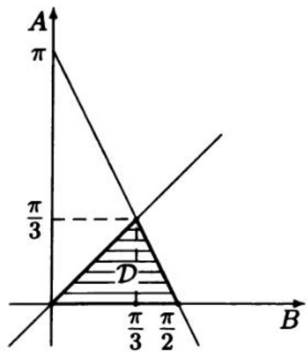


Рис. 4

Итак, зафиксируем $B \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$. При этом (имея в виду рис. 4) рассмотрим два случая: $0 < B \leqslant \frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3} < B \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Первый случай. Если $0 < B \leqslant \frac{\pi}{3}$, то система ограничений (16) сведется к двойному неравенству $0 < A \leqslant B$. Поскольку числа $A + \frac{B}{2}$ и $B + \frac{B}{2} = \frac{3B}{2}$ лежат на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, где синус монотонно возрастает, верно неравенство $\sin\left(A + \frac{B}{2}\right) \leqslant \sin\frac{3B}{2}$, так что

$$M(B) = 2\cos B + 2\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{B}{2} = 3\cos B - \cos 2B = -2\cos^2 B + 3\cos B + 1.$$

Второй случай. Если $\frac{\pi}{3} < B \leqslant \frac{\pi}{2}$, то система ограничений (16) сведется к двойному неравенству $0 < A \leqslant \pi - 2B$. Поскольку числа $A + \frac{B}{2}$ и $\pi - 2B + \frac{B}{2} = \pi - \frac{3B}{2}$ лежат на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, где синус монотонно возрастает, верно неравенство $\sin\left(A + \frac{B}{2}\right) \leqslant \sin\left(\pi - \frac{3B}{2}\right) = \sin\frac{3B}{2}$, так что

$$M(B) = 2\cos B + 2\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{B}{2} = 3\cos B - \cos 2B = -2\cos^2 B + 3\cos B + 1.$$

Итак, для любого $B \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ верно равенство

$$M(B) = 2\cos B + 2\sin\frac{3B}{2}\sin B = 3\cos B - \cos 2B = -2\cos^2 B + 3\cos B + 1.$$

Наибольшее значение функции $M(B)$ при $B \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ совпадает с наибольшим значением функции (ниже $z = \cos B$)

$$y = -2z^2 + 3z + 1$$

на промежутке $0 \leqslant z < 1$. Поскольку вершина параболы $y = -2z^2 + 3z + 1$ имеет координаты $z_0 = \frac{3}{4} \in (0; 1]$, $y_0 = \frac{17}{8}$, это наибольшее значение равно $y_0 = \frac{17}{8}$.

Ответ: $\frac{17}{8}$. ■

Решения к главе 3

□ **155.** С помощью формулы $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ понизим вдвое степень выражения в левой части нашего уравнения:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

Используя общую формулу для решения простейшего тригонометрического уравнения $\cos t = a$, имеем:

$$2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$, отсюда немедленно следует следующая формула для корней исходного уравнения:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **158.** Множество корней простейшего тригонометрического уравнения $\sin t = a$, $|a| \leqslant 1$, задается формулой

$$t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если с этим соотношением нужно проводить дальнейшие преобразования, удобно разбить его на две формулы:

$$t = \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \qquad t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Первая серия соответствует четным значениям n ($n = 2k$), а вторая — нечетным ($n = 2k + 1$).

Поскольку $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, множество корней простейшего тригонометрического уравнения $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ может быть описано двумя формулами:

$$x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad x + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Для всех значений x из первой серии выражение $\sin x$ принимает одно и то же значение $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Для всех значений x из второй серии выражение $\sin x$ принимает одно и то же значение

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\sin x = -1$ или $\frac{1}{2}$. ■

□ **162.** Чтобы избавиться от модулей, возведем обе части уравнения в квадрат (это преобразование в данном конкретном случае равносильно):

$$|\sin x|^2 + 2|\sin x||\cos x| + |\cos x|^2 = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\sin^2 x + |2\sin x\cos x| + \cos^2 x = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$|\sin 2x| = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\sin 2x = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **166.** Левая часть нашего уравнения имеет вид $a\sin x + b\cos x$ (является линейной комбинацией $\sin x$ и $\cos x$). В соответствии с общей теорией подсчитаем число $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+3} = 2$ и разделим на него обе части уравнения:

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{17}$$

Рассмотрим на координатной плоскости точку M с координатами $M_x = \frac{1}{2}$, $M_y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, равными коэффициентам при $\cos x$ и $\sin x$ в полученном уравнении (знаки не играют роли). Деление обеих частей исходного уравнения на 2 гарантирует, что сумма квадратов этих коэффициентов равна 1, т. е. точка $M = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ лежит на единичной окружности. Если ее соединить с началом координат O, то мы получим некоторый угол φ между положительным направлением оси Ox и радиусом OM. Непосредственно из определения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ следует, что они равны координатам точки M:

$$\cos\varphi = M_x = \frac{1}{2};$$
$$\sin\varphi = M_y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В данном конкретном случае угол φ можно найти в явном виде: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Поэтому коэффициенты $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в левой части уравнения (17) можно заменить на $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{3}$ и $\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{3}$ соответственно:

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Разбивая серию $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$ на две подсерии, одну, соответствующую знаку «+», а вторую — знаку «−», можно провести дальнейшие упрощения.

Ответ: $-\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ -\frac{7\pi}{12}+2\pi m,\ n,m\in\mathbb{Z}$. ■

□ **170.** Левая часть нашего уравнения имеет вид $a\sin x+b\cos x$ (является линейной комбинацией $\sin x$ и $\cos x$). В соответствии с общей теорией подсчитаем число $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$ и разделим на него обе части уравнения:

$$\frac{2}{\sqrt{53}}\sin x+\frac{7}{\sqrt{53}}\cos x=\frac{1}{2}\,. \tag{18}$$

Точка $M=\left(\frac{2}{\sqrt{53}};\frac{7}{\sqrt{53}}\right)$ лежит на единичной окружности. Соединив ее с началом координат O, мы получим некоторый угол φ между положительным направлением оси Ox и радиусом OM. Если описанную процедуру изобразить на рисунке, то будет ясно, что угол φ — это совершенно конкретный угол; он известен в том смысле, что точно задан геометрически.

Непосредственно из определения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ следует, что они равны координатам точки M:

$$\cos\varphi=M_x=\frac{2}{\sqrt{53}}\,;$$
$$\sin\varphi=M_y=\frac{7}{\sqrt{53}}\,.$$

Поскольку угол φ, очевидно, острый, его можно записать в виде: $\varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{53}}$ или $\varphi=\arcsin\frac{7}{\sqrt{53}}$. Кроме того, так как $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{7}{2}$, угол φ можно записать и как $\operatorname{arctg}\frac{7}{2}$. Особо подчеркнем, что в ходе этих рассуждений мы не находили угол φ, а лишь записывали известный угол (который явно задается геометрической процедурой, описанной в предыдущем абзаце) в алгебраических терминах.

Заменим коэффициенты $\frac{2}{\sqrt{53}}$ и $\frac{7}{\sqrt{53}}$ в левой части уравнения (18) на $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, соответственно:

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{1}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sin(x+\varphi)=\frac{1}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$x+\varphi=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}\,,$$
$$\Updownarrow$$
$$x=-\varphi+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Записывая угол φ любым из приведенных выше способов, мы получим ответ в «явном» виде.

Ответ: $x=-\operatorname{arctg}\frac{7}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. ■

□ **177.** Обращая внимание на повторяющийся блок $\sin x$, введем новую неизвестную $t = \sin x$. Для нее наше уравнение примет вид:

$$\sqrt{1+t} = 1 - 2t.$$

Это чисто алгебраическое уравнение, которое решается стандартными приемами из курса алгебры:

$$\sqrt{1+t} = 1 - 2t$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1 + t = (1-2t)^2, \\ 1 - 2t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 4t^2 - 5t = 0, \\ t \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$t = 0.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим, что исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x = 0$, множество корней которого описывается условной формулой $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: πn, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **181.** Сделаем так, чтобы в уравнении стояла одна и та же тригонометрическая функция. Поскольку $\sin x$ стоит в первой степени, его нельзя выразить через $\cos x$ (в виде «обычной» формулы). С другой стороны, $\cos x$ стоит во второй степени, поэтому с помощью основного тригонометрического тождества его можно выразить через $\sin x$:

$$3(1 - \sin^2 x) + 4\sin x = 0.$$

Теперь нашу задачу можно решить с помощью новой неизвестной $t = \sin x$:

$$3t^2 - 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим, что исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\sin x = \dfrac{2+\sqrt{13}}{3}$ и $\sin x = \dfrac{2-\sqrt{13}}{3}$. Поскольку число $\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}$ больше 1, множество корней первого из этих уравнений — пусто. С другой стороны, $\dfrac{2-\sqrt{13}}{3} \in (-1; 0)$, так что множество корней второго уравнения дается формулой $(-1)^n \arcsin \dfrac{2-\sqrt{13}}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(-1)^n \arcsin \dfrac{2-\sqrt{13}}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **186.** С помощью основного тригонометрического тождества сделаем так, чтобы в уравнение входил только $\sin x$:

$$\sin^3 x - (1 - \sin^2 x)^2 = -1.$$

Для новой неизвестной $t = \sin x$ это уравнение примет вид:

$$t^3 - (1-t^2)^2 = -1$$
$$\Updownarrow$$
$$t^2(t+1)(t-2) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$t = 0, t = -1, t = 2\,.$$

Соответственно исходное уравнение распадется на три уравнения:

$$\begin{array}{ccc} \sin x = 0 & \sin x = -1 & \sin x = 2 \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\,, & x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\,, & \varnothing\,. \end{array}$$

Ответ: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

□ **189.** С помощью формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ сделаем так, чтобы в уравнении стояли тригонометрические функции одного аргумента x:

$$3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 4\sin x = 1.$$

Теперь сделаем так, чтобы в уравнении стояла одна и та же тригонометрическая функция. Поскольку $\sin x$ стоит в первой степени, его нельзя выразить через $\cos x$ (в виде «обычной» формулы). С другой стороны, $\cos x$ стоит во второй степени, поэтому с помощью основного тригонометрического тождества его можно выразить через $\sin x$:

$$3(1 - 2\sin^2 x) + 4\sin x = 1.$$

Теперь нашу задачу можно решить с помощью новой неизвестной $t = \sin x$:

$$3t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ или } -\frac{1}{3}\,.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим, что исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{array}{cc} \sin x = 1 & \sin x = -\frac{1}{3} \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\,, & x = (-1)^{m+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}\,. \end{array}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^{m+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi m$, $n, n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **212.** С помощью формулы $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ выделим в уравнении повторяющийся блок $\sin x$:

$$\log_{\sin x}(2\sin^2 x + 3\sin x - 1) = 0.$$

Теперь с помощью новой неизвестной $t = \sin x$ мы сведем дело к стандартному логарифмическому уравнению

$$\log_t(2t^2 + 3t - 1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2t^2 + 3t - 1 = 1, \\ t > 0, \\ t \neq 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} t = -2; \frac{1}{2}, \\ t > 0, \\ t \neq 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$t = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, исходное тригонометрическое уравнение равносильно уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$, множество решений которого дается формулой $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **213.** Введем новую неизвестную $t = \sin x$. Для нее исходное уравнение примет вид:

$$\sqrt{t+2} = \sqrt{\frac{t}{t+1}} + 1. \tag{19}$$

Поскольку область значений функции $y = \sin x$ — это отрезок $[-1; 1]$, можно решать уравнение (19) на множестве $-1 \leqslant t \leqslant 1$ (даже если это уравнение имеет корень $t_0 \notin [-1; 1]$, соответствующее этому корню уравнение $\sin x = t_0$ будет иметь пустое множество решений и поэтому не будет вносить никакого вклада в ответ задачи). Это множество можно еще больше сузить, если принять в расчет область допустимых значений уравнения ($-2 \leqslant t < -1$, $t \geqslant 0$), что приведет к ограничению $0 \leqslant t \leqslant 1$. Условие $0 \leqslant t \leqslant 1$ не принципиально для решения уравнения (19), но позволит упростить анализ равносильности преобразований, которые мы будем проводить.

Чтобы решить уравнение (19), прежде всего избавимся от дроби в правой части:

$$\sqrt{(t+2)(t+1)} = \sqrt{t} + \sqrt{t+1}.$$

Теперь возведем обе части уравнения в квадрат:

$$t^2 + t + 1 = 2\sqrt{t^2 + t}.$$

На множестве $0 \leqslant t \leqslant 1$ проделанные преобразования равносильны.

В последнем уравнении виден повторяющийся блок $\sqrt{t^2+t}$. Поэтому введем новую неизвестную $u=\sqrt{t^2+t}$:

$$u^2+1=2u \Leftrightarrow (u-1)^2=0 \Leftrightarrow u=1.$$

Возвращаясь к неизвестной t, мы имеем:

$$\sqrt{t^2+t}=1 \Leftrightarrow t^2+t=1 \Leftrightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Условию $0 \leqslant t \leqslant 1$ удовлетворяет только корень $t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, так что исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

ОТВЕТ: $(-1)^n \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. ■

□ **214.** Ведем новую неизвестную $t=|\sin x|$. Для нее исходное уравнение примет вид:

$$8t\sqrt{6t^2+t}=24t^2-1. \tag{20}$$

Поскольку область значений функции $y=|\sin x|$ — это отрезок $[0;1]$, можно решать уравнение (20) на множестве $0 \leqslant t \leqslant 1$ (даже если это уравнение имеет корень $t_0 \notin [0;1]$, соответствующее этому корню уравнение $|\sin x|=t_0$ будет иметь пустое множество решений и поэтому не будет вносить никакого вклада в ответ задачи). Условие $0 \leqslant t \leqslant 1$ не принципиально для решения уравнения (20), но позволит упростить анализ равносильности преобразований, которые мы будем проводить.

Чтобы решить уравнение (20), возведением в квадрат избавимся от радикала в левой части:

$$\begin{cases} 192t^4-64t^3-48t^2+1=0, \\ 24t^2-1 \geqslant 0. \end{cases}$$

На множестве $0 \leqslant t \leqslant 1$ это преобразование равносильно. Левую часть первого уравнения системы методом неопределенных коэффициентов можно разложить на два квадратичных множителя, $8t^2-4t-1$ и $24t^2+4t-1$. Соответственно, это уравнение распадется на два:

$$\begin{array}{ccc} 8t^2-4t-1=0 & \qquad & 24t^2+4t-1=0 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ t=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{4}\,; & & t=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{12}\,. \end{array}$$

Условиям $0 \leqslant t \leqslant 1$, $24t^2-1 \geqslant 0$ удовлетворяет только $t=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим, что исходное уравнение равносильно уравнению $|\sin x|=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$, множество решений которого имеет вид $x=\pm\arcsin\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

ОТВЕТ: $\pm\arcsin\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. ■

□ **217.** Для новой неизвестной $y = \cos x$ уравнение превратится в стандартное иррациональное уравнение:

$$\sqrt{-24y+25} = 4y-3$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} -24y+25 = (4y-3)^2, \\ 4y-3 \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} y^2 = 1, \\ y \geqslant \frac{3}{4} \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$y = 1.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $\cos x = 1$, множество решений которого описывается формулой $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **218.** *Первый способ.* Преобразуем уравнение так, чтобы в нем стояли тригонометрические функции одного аргумента x:

$$2 + \cos^2 x - \sin^2 x = 4\cos^2 x.$$

Поскольку и $\sin x$, и $\cos x$ стоят во второй степени, можно избавиться от любой из этих функций. Однако $\sin x$ встречается только один раз, так что сведем дело к $\cos x$:

$$2\cos^2 x + 1 = 4\cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Множество решений уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ дается формулой $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ — формулой $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Эти две формулы можно объединить одной формулой $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ (при $k = 2n$ мы получим первую серию, а при $k = 2m-1$ — вторую).

Отметим, что, хотя мы и не вводили новую неизвестную, в сущности мы решали неполное квадратное уравнение относительно $y = \cos x$.

Второй способ. Понизим вдвое степень выражения в правой части:

$$2 + \cos 2x = 2(1 + \cos 2x) \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что, хотя мы и не вводили новую неизвестную, в сущности мы решали линейное уравнение относительно $y = \cos 2x$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **219.** Преобразуем уравнение так, чтобы в нем стояли тригонометрические функции одного аргумента x. Поскольку в правой части стоит $\cos x$, заменим

$\cos 2x$ в левой части по формуле $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$:

$$4 + 2\cos^2 x = 6\cos x.$$

Теперь можно ввести новую неизвестную $y = \cos x$:

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ или } 2\,.$$

Поэтому исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\begin{array}{cc} \cos x = 1 & \cos x = 2 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; & \varnothing\,. \end{array}$$

Ответ: $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **223.** Заменим $\sin^2 x$ (второе слагаемое в левой части) по формуле $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin^2 2x$ по формуле $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ и введем новую неизвестную $a = \cos 2x$:

$$1 - a^2 + \frac{1-a}{2} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow 16a^2 + 8a - 15 = 0 \Leftrightarrow a_1 = \frac{3}{4}\,; a_2 = -\frac{5}{4}\,.$$

Поэтому исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\begin{array}{cc} \cos 2x = \dfrac{3}{4} & \cos 2x = -\dfrac{5}{4} \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ 2x = \pm \arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, & \varnothing\,. \\ \Updownarrow & \\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; & \end{array}$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **236.** С помощью формул $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ понизим вдвое степени в левой части. После этого преобразования в задаче появится повторяющийся блок $\cos 2x$, так что можно будет ввести новую неизвестную $t = \cos 2x$:

$$\left(\frac{1+t}{2}\right)^3 + \left(\frac{1-t}{2}\right)^3 = \frac{15}{8}t - \frac{1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$t_1 = \frac{1}{2}\,, t_2 = 2\,.$$

Поэтому исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\begin{array}{cc} \cos 2x = \dfrac{1}{2} & \cos 2x = 2 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, & \varnothing\,. \\ \Updownarrow & \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; & \end{array}$$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **237.** Введем новую переменную $t = \frac{x}{2}$. Это позволит превратить задачу с половинным углом в задачу с двойным углом:

$$\cos t = 1 + \cos 2t,$$

которая решается стандартными преобразованиями

$$\cos t = 2\cos^2 t \Leftrightarrow \cos t = 0 \text{ или } \frac{1}{2}.$$

Множество решений первого уравнения имеет вид: $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, второго: $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Поскольку $x = 2t$, отсюда немедленно получаем ответ задачи.

Ответ: $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **244.** *Первый способ.* С помощью формулы $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ сделаем так, чтобы в задачу входили тригонометрические функции одного аргумента x:

$$3\sin^2 x - 4\sin^4 x = -\frac{1}{8}.$$

Теперь можно ввести новую неизвестную $t = \sin^2 x$:

$$4t^2 - 3t - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{11}}{8}.$$

Поэтому исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\sin^2 x = \frac{3 - \sqrt{11}}{8}, \qquad \sin^2 x = \frac{3 + \sqrt{11}}{8}.$$

Поскольку число $\frac{3 - \sqrt{11}}{8}$ отрицательно, множество решений первого из них пусто.

С другой стороны, $\frac{3 + \sqrt{11}}{8} \in (0; 1)$, так что множество решений второго уравнения дается формулой

$$x = \pm \arcsin\sqrt{\frac{3 + \sqrt{11}}{8}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{21}$$

Если перед тем как выписывать ответ уравнения $\sin^2 x = \frac{3 + \sqrt{11}}{8}$ заменить $\sin^2 x$ на $\frac{1 - \cos 2x}{2}$, мы получим уравнение $\cos 2x = \frac{1 - \sqrt{11}}{4}$, ответ которого имеет вид

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1 - \sqrt{11}}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Хотя формулы (21) и (22) различны, они задают одно и то же числовое множество — подобная ситуация, когда разные способы решения приводят к разным формам записи ответа, довольно часто встречается в тригонометрии.

Второй способ. Превратим произведение $\sin 3x \sin x$ в сумму тригонометрических функций (по формуле $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$):

$$\cos 2x - \cos 4x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{4}.$$

Поскольку $\frac{1+\sqrt{11}}{4} > 1$, уравнение $\cos 2x = \frac{1+\sqrt{11}}{4}$ не имеет корней. Уравнение $\cos 2x = \frac{1-\sqrt{11}}{4}$ уже появлялось в первом способе решения.

Ответ: $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{11}}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **253.** С помощью формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ сделаем так, чтобы в задачу входили тригонометрические функции одного аргумента x:

$$\sqrt{\frac{3}{4} - \cos x} = \sqrt{\frac{3}{4} - 4\cos^3 x + 3\cos x}\,.$$

Теперь можно ввести новую неизвестную $y = \cos x$ и свести дело к стандартному иррациональному уравнению:

$$\sqrt{\frac{3}{4} - y} = \sqrt{\frac{3}{4} - 4y^3 + 3y}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 4y^3 - 4y = 0, \\ \frac{3}{4} - y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$y = 0; -1\,.$$

Поэтому исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\begin{array}{ccc} \cos x = 0 & & \cos x = -1 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; & & \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}\,. \end{array}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **259.** Чтобы избавиться от модулей, возведем уравнение в квадрат (в данном случае это преобразование равносильно):

$$\cos^2 2x \sin^2 6x + 2\,|\sin 2x \cos 2x \sin 6x \cos 6x| + \cos^2 6x \sin^2 2x = \sin^2 \frac{3\pi}{11}\,.$$

Применяя формулы $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$, $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$, $\sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$, получим:

$$|\sin 4x \sin 12x| - \cos 4x \cos 12x = -\cos\frac{6\pi}{11}\,.$$

Превратим произведения $\sin 4x \sin 12x$ и $\cos 4x \cos 12x$ в суммы:

$$|\cos 8x - \cos 16x| - \cos 8x - \cos 16x = -2\cos\frac{6\pi}{11}$$

$$\Updownarrow$$

$$|-2\cos^2 8x + \cos 8x + 1| - \cos 8x - 2\cos^2 8x + 1 = -2\cos\frac{6\pi}{11}\,.$$

Теперь можно ввести новую неизвестную $y = \cos 8x$:

$$|2y^2 - y - 1| - 2y^2 - y + 1 = -2\cos\frac{6\pi}{11}\,.$$

Если $2y^2 - y - 1 \geqslant 0$, т. е. $y \leqslant -\frac{1}{2}$ или $y \geqslant 1$, то это уравнение примет вид: $y = \cos\frac{6\pi}{11}$. Однако это число не удовлетворяет ни условию $y \leqslant -\frac{1}{2}$, ни условию $y \geqslant 1$.

Если $2y^2 - y - 1 \leqslant 0$, т. е. $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$, то это уравнение примет вид: $2y^2 = 1 + \cos\frac{6\pi}{11}$, откуда $y = \pm\cos\frac{3\pi}{11}$. Поскольку $\cos\frac{3\pi}{11} > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, условию $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$ удовлетворяет только $y = \cos\frac{3\pi}{11}$.

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы немедленно получим:

$$\cos 8x = \cos\frac{3\pi}{11} \Leftrightarrow 8x = \pm\frac{3\pi}{11} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ОТВЕТ: $x = \pm\frac{3\pi}{88} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **260.** Применим в левой части уравнения тождество $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$ и введем новую неизвестную $y = \operatorname{ctg} 3x$:

$$y^2 - 7y + 6 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1, y_2 = 6.$$

Поэтому исходное уравнение распадается на два

$$\begin{array}{cc}
\operatorname{ctg} 3x = 1 & \operatorname{ctg} 3x = 6 \\
\Updownarrow & \Updownarrow \\
3x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} & 3x = \operatorname{arcctg} 6 + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \\
\Updownarrow & \Updownarrow \\
x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}; & x = \frac{1}{3}\operatorname{arcctg} 6 + \frac{\pi m}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}.
\end{array}$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $\frac{1}{3}\operatorname{arcctg} 6 + \frac{\pi m}{3}$, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **261.** Поскольку

$$\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}},$$

уравнение можно решить с помощью новой неизвестной $y = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$:

$$2 + \frac{2y}{1+y^2} = 3y \Leftrightarrow 3y^3 - 2y^2 + y - 2 = 0.$$

Последнее уравнение имеет один целый корень: $y = 1$. Поэтому многочлен $3y^3 - 2y^2 + y - 2$ можно разложить на множители, причем один из них — это $(y - 1)$. Второй множитель можно найти делением в столбик; он равен $3y^2 + y + 2$. Поскольку дискриминант этого трехчлена отрицателен, $y = 1$ — единственный корень.

Ему соответствует следующее уравнение относительно основной неизвестной t:

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **263.** *Первый способ.* Преобразуем уравнение так, чтобы в него входили тригонометрические функции только одного аргумента x:

$$2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 1.$$

Левая часть получившегося уравнения является однородным многочленом второй степени относительно $a=\sin x$ и $b=\cos x$, в то время как степень правой части равна 0. Однако с помощью основного тригонометрического тождества можно сделать так, что степень правой части тоже будет второй:

$$2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 0.$$

Однородное уравнение степени n относительно переменных a и b упростится, если его почленно разделить на a^n или b^n. Конечно, это можно делать, только если мы уверены, что соответствующая переменная не равна 0. В нашем случае можно доказать, что для решений нашего уравнения выполнено условие $\cos x \neq 0$. Действительно, если допустить противное, то уравнение примет вид: $\sin^2 x = 0$, что невозможно в силу основного тригонометрического тождества (если $\cos x = 0$). Поэтому обе части уравнения можно разделить на $\cos^2 x$, что даст следующее уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

Его можно решить с помощью новой неизвестной $y = \operatorname{tg} x$:

$$y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \pm 2.$$

Соответственно, исходное уравнение распадется на два уравнения

$$\operatorname{tg} x = -2 - \sqrt{3} \qquad\qquad \operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = \operatorname{arctg}(-2-\sqrt{3}) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \qquad x = \operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}) + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Второй способ. Заменим слагаемое $2\sin^2 x$ в левой части на $1 - \cos 2x$:

$$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 0. \tag{23}$$

Это уравнение является однородным уравнением первой степени относительно $a = \sin 2x$ и $b = \cos 2x$. Из уравнения следует, что $\cos 2x \neq 0$, так что его можно почленно разделить на $\cos 2x$:

$$\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение (23) можно было бы решать и в соответствии с общей процедурой решения уравнений вида $a\sin x + b\cos x = c$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ОТВЕТ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$ ■

□ **264.** Левая часть уравнения является однородным многочленом третьей степени относительно $a = \sin x$ и $b = \cos x$, в то время как степень правой части равна 1. Однако с помощью основного тригонометрического тождества можно сделать так, что степень правой части тоже будет 3:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin^3 x - \cos x \sin^2 x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \text{ или } \operatorname{tg} x = 1\,.$$

Ответ: πn, $\frac{\pi}{4} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **271.** Сделаем уравнение однородным относительно $a = \sin\frac{x}{2}$ и $b = \cos\frac{x}{2}$:

$$3(a^2 + b^2) + |2ab - 3b^2 + 3a^2| = 6ab + b^2 - a^2.$$

Если предположить, что $b = 0$, то это уравнение примет вид: $6a^2 = -a^2$, откуда $a = 0$, что противоречит тождеству $a^2 + b^2 = 1$.

Поэтому $b \neq 0$ и обе части последнего уравнения можно разделить на b^2. В итоге мы получим следующее уравнение относительно $y = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$4y^2 - 6y + 2 + |3y^2 + 2y - 3| = 0.$$

Это уравнение легко решается стандартным раскрытием модуля; оно имеет два корня: $y = \dfrac{2+\sqrt{11}}{7}$ и $y = 4 - \sqrt{11}$, откуда немедленно следует ответ.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{2+\sqrt{11}}{7} + 2\pi n$, $2\operatorname{arctg}(4-\sqrt{11}) + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **272.** Внешний вид уравнения естественно наводит на мысль воспользоваться формулами

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\,,$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\,,$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

и свести дело к простому алгебраическому уравнению относительно новой неизвестной $y = \operatorname{tg} x$:

$$\frac{1+y}{1-y} + 1 = 2 \cdot \frac{2y}{1-y^2} + 3 \cdot \frac{1}{y}\,. \tag{24}$$

Однако эти формулы можно применять, только если мы можем гарантировать существование $\operatorname{tg} x$. Поскольку этот факт, вообще говоря, не следует из исходного уравнения, придется рассмотреть два случая:

1. $\operatorname{tg} x$ существует (что равносильно $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) и
2. $\operatorname{tg} x$ не существует (что равносильно $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$).

В первом случае, как мы уже показали, дело сводится к решению уравнения (24):

$$\frac{2}{1-y}=\frac{y^2+3}{y(1-y)(1+y)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 2=\dfrac{y^2+3}{y(1+y)}\,, \\ 1-y\neq 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 2y^2+2y=y^2+3\,, \\ y\neq 0;1;-1 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} y^2+2y-3=0\,, \\ y\neq 0;1;-1 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} y=1;-3\,, \\ y\neq 0;1;-1 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$y=-3\,.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы имеем:

$$\operatorname{tg} x=-3 \Leftrightarrow x=-\operatorname{arctg} 3+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Во втором случае проводить преобразования, описанные в начале решения, нельзя, но в этом и нет необходимости, так как речь идет о том, будут или нет корнями совершенно конкретные значения неизвестной. Выяснить это можно простой подстановкой «подозрительных» значений $x=\frac{\pi}{2}+\pi m$ в исходное уравнение:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+\pi m\right)+1=2\operatorname{tg}(\pi+2\pi m)+3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi m\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$-1+1=2\cdot 0+3\cdot 0$$
$$\Updownarrow$$
$$0=0,$$

так что все проверяемые значения x являются корнями исходного уравнения.

ОТВЕТ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=-\operatorname{arctg} 3+\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$. ■

□ **274.** Преобразуем уравнение так, чтобы в нем стояли только тригонометрические функции одного аргумента $2x$:

$$\sqrt[8]{\frac{2\cos^2 2x}{2\sin^2 2x}}+\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2x}=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt[8]{\operatorname{ctg}^2 2x}+\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2x}=0\,.$$

Для новой неизвестной $y = \operatorname{ctg} 2x$ мы получим стандартное иррациональное уравнение:

$$\sqrt[8]{y^2} = -\sqrt[3]{y}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} y^6 = y^8, \\ -y \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} y = 0; 1; -1, \\ y \leqslant 0 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$y = 0; -1.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\begin{array}{cc} \operatorname{ctg} 2x = 0 & \operatorname{ctg} 2x = -1 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, & 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}; & x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **275.** Поскольку

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x,$$

уравнение можно переписать в виде:

$$1 - \big((\sin x + \cos x)^2 - 1\big) = -(\sin x + \cos x).$$

Теперь его можно решить с помощью новой неизвестной $y = \sin x + \cos x$:

$$1 - (y^2 - 1) = -y \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1; 2.$$

Соответственно, исходное уравнение распадется на два:

$$\begin{array}{cc} \sin x + \cos x = -1 & \sin x + \cos x = 2 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; & \varnothing \end{array}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **284.** Запишем левую часть уравнения как стандартный тригонометрический многочлен:

$$(4\sin 2x - 3\cos 2x) - 6\,(2\sin x + \cos x) + 9 = 0.$$

Обозначим линейную часть (без коэффициента -6) через y:

$$y = 2\sin x + \cos x$$

и подсчитаем величину y^2 (при этом запишем ее как стандартный тригонометрический многочлен):

$$y^2 = 4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 4\,\frac{1-\cos 2x}{2} + 2\sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\,(4\sin 2x - 3\cos 2x) + \frac{5}{2}\,.$$

Видно, что квадратичный блок исходного уравнения может быть выражен через квадрат линейного блока:

$$4\sin 2x - 3\cos 2x = 2y^2 - 5.$$

Поэтому наше уравнение можно решать с помощью новой неизвестной $y = 2\sin x + \cos x$:

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ или } 2\,.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим совокупность из двух уравнений: $2\sin x + \cos x = 1$ и $2\sin x + \cos x = 2$, которые легко решаются стандартной процедурой для уравнений вида $a\sin x + b\cos x = c$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$; $2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{2} + 2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **290.** Складывая логарифмы в левой части, мы получим следующее уравнение, равносильное исходному:

$$\log_2\left(3|\sin x||\cos x| - \cos^2 x\right) = 0,$$

откуда

$$3|\sin x||\cos x| - \cos^2 x = 1.$$

Почленное деление на $\cos^2 x = |\cos x|^2$ приводит к квадратному уравнению относительно новой неизвестной $t = \dfrac{|\sin x|}{|\cos x|} = |\operatorname{tg} x|$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности из двух уравнений: $|\operatorname{tg} x| = 1$ и $|\operatorname{tg} x| = 2$, откуда немедленно следует ответ.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \pm\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **291.** Заменим выражения $\cos 2x$ и $\cos 6x$ в левой части уравнения на $2\cos^2 x - 1$ и $2\cos^2 3x - 1$, соответственно. В правой части заменим произведение тригонометрических функций $\sin x \sin 2x$ на $\frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$:

$$9(2\cos^2 x - 1) + 9(2\cos^2 3x - 1) = 36\cos x \cos 3x + 70\sqrt{3}(\cos x - \cos 3x) - 162.$$

Поскольку в уравнении повторяются два блока, $\cos x$ и $\cos 3x$, введем новые переменные: $a = \cos x$ и $b = \cos 3x$:

$$18a^2 + 18b^2 - 18 = 36ab + 70\sqrt{3}(a - b) - 162$$

$$\Updownarrow$$

$$9(a-b)^2 - 35\sqrt{3}(a-b) + 72 = 0.$$

Последнее уравнение является квадратным относительно $t = a - b$:

$$9t^2 - 35\sqrt{3}t + 72 = 0.$$

Его дискриминант равен $D = 1083 = 3 \cdot 19^2$, так что оно имеет два корня: $t_1 = 3\sqrt{3}$, $t_2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Соответственно, исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\cos x - \cos 3x = 3\sqrt{3}, \qquad \cos x - \cos 3x = \frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

Первое уравнение легко решается методом оценок: поскольку его левая часть не превосходит 2, а $3\sqrt{3} > 2$, оно не имеет корней.

Для решения второго уравнения заменим $\cos 3x$ на $4\cos^3 x - 3\cos x$ и опять обозначим $\cos x$ через a. Это даст кубическое уравнение

$$9a^3 - 9a + 2\sqrt{3} = 0.$$

Чтобы избавиться от иррационального коэффициента, введем новую неизвестную $c = a\sqrt{3}$. Для нее последнее уравнение примет вид:

$$c^3 - 3c + 2 = 0.$$

Стандартными рассуждениями левая часть полученного уравнения раскладывается на множители:

$$(c-1)^2(c+2) = 0,$$

так что $c = 1$ или $c = -2$.

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим два уравнения: $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Поскольку $-\frac{2}{\sqrt{3}} < -1$, первое уравнение не имеет корней, а множество решений второго описывается формулой $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **292.** Перенесем все члены в левую часть и заменим $\sin 2x$ на $2\sin x \cos x$:

$$2\sin x \cos x - \sqrt{2}\sin x = 0.$$

Если общий множитель $\sin x$ вынести за скобку, то мы получим уравнение

$$\sin x \cdot \left(2\cos x - \sqrt{2}\right) = 0,$$

которое расщепляется на два более простых уравнения

$$\sin x = 0 \qquad\qquad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \qquad x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, πm, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **301.** Преобразуем уравнение так, чтобы в нем стояли тригонометрические функции одного аргумента x:

$$\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x - \sin x = 0\,.$$

Вынося $\sin x$ за скобку, мы разложим левую часть на множители:

$$\sin x\left(-\sin x + \sqrt{3}\cos x - 1\right) = 0,$$

что позволит расщепить уравнение на два более простых уравнения:

$$\sin x = 0 \qquad\qquad -\sin x + \sqrt{3}\cos x - 1 = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \qquad\qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, πn, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **304.** Перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители с помощью формулы $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$:

$$2\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{12} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **307.** Разложим правую часть на множители с помощью формулы $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$:

$$5\sin 2x = 2\sin 2x\cos 7x,$$

после чего уравнение распадется на два:

$$\begin{array}{ccc} \sin 2x = 0 & & \cos 7x = \frac{5}{2} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ 2x = \pi n, \quad n\in\mathbb{Z} & & \varnothing. \\ \Updownarrow & & \\ x = \frac{\pi n}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}; & & \end{array}$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. ■

□ **321.** Перенесем все члены в левую часть:

$$(\sin 2x + \sin 3x) - (1 - \cos 5x) = 0.$$

Каждую из двух групп можно разложить на множители:

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{5x}{2} = 0.$$

Общий множитель $2\sin\frac{5x}{2}$ можно вынести за скобку:

$$2\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{5x}{2}\right) = 0,$$

после чего уравнение распадется на два:

$$\sin\frac{5x}{2} = 0, \qquad \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{5x}{2} = 0.$$

Первое уравнение легко решается:

$$\frac{5x}{2} = \pi n, \quad n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi n}{5}, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Левую часть второго уравнения можно опять разложить на множители. Для этого превратим $\cos\frac{x}{2}$ в синус по формуле $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) - \sin\frac{5x}{2} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0.$$

Теперь это уравнение расщепляется на два простых уравнения:

$$\begin{array}{ccc} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) = 0 & & \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2} = \pi k, \quad k\in\mathbb{Z} & & \frac{\pi}{4} + x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m\in\mathbb{Z} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k\in\mathbb{Z}; & & x = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m\in\mathbb{Z}. \end{array}$$

Ответ: $\frac{2\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4} + \pi m$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $n, m, k\in\mathbb{Z}$. ■

☐ **329.** С помощью формул

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

превратим произведения в суммы, после чего можно привести подобные члены и оставшуюся сумму двух косинусов опять разложить на множители:

$$\cos 2x - \cos 4x = \cos 2x + \cos 6x$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos 4x + \cos 6x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\cos 5x\cos x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos 5x = 0 \text{ или } \cos x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}, \quad m \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}$, $m \in \mathbb{Z}$. ■

☐ **349.** Превратим произведение в правой части в сумму и перенесем все члены в левую часть:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \frac{1}{2} = 0. \tag{25}$$

Умножим это уравнение почленно на $2\sin\frac{x}{2}$:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 3x + \sin\frac{x}{2} = 0 \tag{26}$$

и превратим произведения в суммы:

$$-\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{5x}{2} + \sin\frac{7x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0.$$

После приведения подобных мы получим уравнение $\sin\frac{7x}{2} = 0$, которое мгновенно решается:

$$x = \frac{2\pi n}{7}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Однако мы не можем гарантировать, что эта формула дает ответ исходного уравнения. Дело в том, что одно из проделанных преобразований, переход от уравнения (25) к уравнению (26) за счет почленного умножения на $2\sin\frac{x}{2}$, вообще говоря, не является равносильным. Поэтому нужно либо сделать проверку, либо модифицировать это преобразование так, чтобы оно стало равносильным. Имея в виду полученное выражение для x, второй вариант представляется более простым.

Обратный переход от уравнения (26) к уравнению (25) заключается в делении на $2\sin\frac{x}{2}$. Сделать это можно, только если мы уверены, что $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, т. е.

$x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Эту информацию нельзя извлечь из уравнения (26), и поэтому мы рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 3x + \sin\frac{x}{2} = 0\,, \\ x \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases} \tag{27}$$

Из системы (27) следует уравнение (25).

Но теперь нужно проверить, что и система (27) следует из уравнения (25). Фактически речь идет о том, что из уравнения (25) следует условие $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Действительно, если допустить, что $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то уравнение (25) примет вид:

$$1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = 0.$$

Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Итак, теперь из серии $x = \frac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$, нужно исключить значения x, которые кратны 2π. Это равносильно тому, что из номеров n нужно исключить числа, кратные 7.

Ответ: $\frac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 7k$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

□ **351.** Поскольку $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$, уравнение можно переписать в виде:

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 2(\cos x + \sin x).$$

Обращая внимание на общий множитель $(\cos x + \sin x)$ в левой и правой частях, разобьем это уравнение на два:

$$\cos x + \sin x = 0\,, \qquad \cos x - \sin x = 2.$$

Эти уравнения имеют вид $a\sin x + b\cos x = c$ и поэтому легко решаются введением дополнительного аргумента:

$$\begin{array}{cc} \cos x + \sin x = 0 & \cos x - \sin x = 2 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 & \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; & \varnothing\,. \end{array}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **354.** Используя тождество сокращенного умножения $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ разложим на множители выражение $\sin^3 x - \cos^3 x$:

$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$. Тогда уравнение примет вид: $(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) + (\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(2 + \sin x \cos x) = 0$. Теперь его можно разбить на два уравнения:

$$\begin{array}{cc} \sin x - \cos x = 0 & 2 + \sin x \cos x = 0 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ \operatorname{tg} x = 1 & \sin 2x = -4 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; & \varnothing. \end{array}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **355.** Прежде всего решим исходное уравнение (с помощью введения дополнительного аргумента):

$$\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos\left(7x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$7x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi n}{7}, x = -\frac{13\pi}{84} + \frac{2\pi m}{7}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Для дальнейшего важно подчеркнуть следующее важное обстоятельство. Полученные формулы для x задают не два значения неизвестной, а две серии значений. Переменная n (так же, как и m) играет роль своеобразного номера корня в соответствующей серии, так что, может быть, лучше было бы писать $x_n = \frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$, и $x_m = -\frac{13\pi}{84} + \frac{2\pi m}{7}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Если параметру n придавать конкретные значения, то мы получим конкретные корни из первой серии. В следующей таблице приведена последовательность корней, задаваемая первой формулой (в первой строке указаны значения n, а во второй строке — соответствующие им значения x):

	-2	-1	0	1	2	3
$\ldots$	$-\frac{43\pi}{84}$	$-\frac{19\pi}{84}$	$\frac{5\pi}{84}$	$\frac{29\pi}{84}$	$\frac{53\pi}{84}$	$\frac{77\pi}{84}$

Если записать условие отбора корней в виде $\frac{33{,}6\pi}{84} < x < \frac{72\pi}{84}$, то станет ясно, что ему удовлетворяет только $x = \frac{53\pi}{84}$ (в силу монотонного возрастания последовательности $x = \frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi n}{7}$ никакие другие значения из этой последовательности не попадут на заданный интервал $0{,}4\pi < x < \frac{6\pi}{7}$).

Аналогично, если параметру m придавать конкретные значения, то мы получим конкретные корни из второй серии. В следующей таблице приведена последовательность корней, задаваемая второй формулой (в первой строке указаны значения m, а во второй строке — соответствующие им значения x):

$$\begin{array}{ccccccc} & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \ldots & -\dfrac{61\pi}{84} & -\dfrac{37\pi}{84} & -\dfrac{13\pi}{84} & \dfrac{11\pi}{84} & \dfrac{35\pi}{84} & \dfrac{59\pi}{84} \end{array}$$

Если записать условие отбора корней в виде $\dfrac{33{,}6\pi}{84} < x < \dfrac{72\pi}{84}$, то станет ясно, что ему удовлетворяет только $x = \dfrac{35\pi}{84}$ и $x = \dfrac{59\pi}{84}$ (в силу монотонного возрастания последовательности $x = -\dfrac{13\pi}{84} + \dfrac{2\pi m}{7}$ никакие другие значения из этой последовательности не попадут на заданный интервал $0{,}4\pi < x < \dfrac{6\pi}{7}$).

Второй способ произвести отбор корней заключается в следующем. Поскольку корни перенумерованы, вместо того чтобы отбирать корни, удовлетворяющие условию $0{,}4\pi < x < \dfrac{6\pi}{7}$, можно отбирать номера нужных корней. Условие для отбора номеров получится, если в неравенство $0{,}4\pi < x < \dfrac{6\pi}{7}$ вместо x поставить формулу $\dfrac{5\pi}{84} + \dfrac{2\pi n}{7}$:

$$0{,}4\pi < \frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi n}{7} < \frac{6\pi}{7}.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$1\,\frac{23}{120} < n < 2\,\frac{19}{24}.$$

Ему удовлетворяет только одно целое число: $n = 2$. Соответственно, корень с этим номером (из первой серии) должен быть включен в ответ задачи; этот корень равен

$$x_2 = \frac{5\pi}{84} + \frac{4\pi}{7} = \frac{53\pi}{84}.$$

Для второй серии корней условие отбора номеров нужных корней примет вид:

$$0{,}4\pi < -\frac{13\pi}{84} + \frac{2\pi m}{7} < \frac{6\pi}{7}$$
$$\Updownarrow$$
$$1\,\frac{113}{120} < m < 3\,\frac{13}{24}$$
$$\Updownarrow$$
$$m = 2; 3.$$

Соответственно, из второй серии в ответ задачи должны быть включены корни с номерами 2 и 3; эти корни равны:

$$x_2 = -\frac{13\pi}{84} + \frac{4\pi}{7} = \frac{35\pi}{84},$$
$$x_3 = -\frac{13\pi}{84} + \frac{6\pi}{7} = \frac{59\pi}{84}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{35\pi}{84}; \dfrac{53\pi}{84}; \dfrac{59\pi}{84}\right\}$. ■

□ **356.** Как и при решении задачи 355, прежде всего решим исходное уравнение, не обращая внимание на требование $x \in \left[\frac{2\pi}{3}\,; 3\pi\right]$:

$$1 + \cos 2x = 4\sin x \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Поскольку $-1 - \sqrt{2} < -1$, а $-1 + \sqrt{2} \in (0; 1)$, исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x = \sqrt{2} - 1$.

Множество решений этого уравнения можно описать двумя формулами:

$$x = \arcsin(\sqrt{2} - 1) + 2\pi n, x = \pi - \arcsin(\sqrt{2} - 1) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для отбора корней, попадающих на отрезок $\left[\frac{2\pi}{3}\,; 3\pi\right]$, можно применить тот же простой формальный прием, который мы использовали при отборе корней в задаче 355: заменим отбор корней отбором их номеров.

Найдем номера корней из первой серии, удовлетворяющих условию $x \in \left[\frac{2\pi}{3}\,; 3\pi\right]$. Для этого нужно решить неравенство

$$\frac{2\pi}{3} \leqslant \arcsin(\sqrt{2} - 1) + 2\pi n \leqslant 3\pi.$$

Элементарные преобразования приводят к следующему двойному неравенству:

$$\frac{\frac{2\pi}{3} - \arcsin(\sqrt{2} - 1)}{2\pi} \leqslant n \leqslant \frac{3\pi - \arcsin(\sqrt{2} - 1)}{2\pi}. \tag{28}$$

Чтобы найти целые числа, являющиеся его решениями, необходимо оценить числа

$$\frac{\frac{2\pi}{3} - \arcsin(\sqrt{2} - 1)}{2\pi} \text{ и } \frac{3\pi - \arcsin(\sqrt{2} - 1)}{2\pi}.$$

Начнем с приближенной прикидки: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, так что $\sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4$. Поэтому $\arcsin(\sqrt{2} - 1) \approx \arcsin 0{,}4 \approx \arcsin 0{,}5 = \frac{\pi}{6}$ (отметим, что $\arcsin(\sqrt{2} - 1) = 0{,}427\ldots$, а $\frac{\pi}{6} = 0{,}523\ldots$). Соответственно

$$\frac{\frac{2\pi}{3} - \arcsin(\sqrt{2} - 1)}{2\pi} \approx \frac{1}{4},$$

$$\frac{3\pi - \arcsin(\sqrt{2} - 1)}{2\pi} \approx \frac{17}{12},$$

так что, видимо, неравенству (28) удовлетворяет только $n = 1$.

Следует подчеркнуть, что проведенные рассуждения вовсе не являются решением неравенства (28) *в строгом смысле этого слова*. Но их можно превратить в абсолютно аккуратные с помощью неравенств для встречающихся иррациональных чисел.

Начнем с простой оценки $0<\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}$. Значит, $0<\arcsin(\sqrt{2}-1)<\frac{\pi}{6}$ и поэтому

$$\frac{1}{4}<\frac{\frac{2\pi}{3}-\arcsin(\sqrt{2}-1)}{2\pi}<\frac{1}{3}\,,$$
$$\frac{17}{12}<\frac{3\pi-\arcsin(\sqrt{2}-1)}{2\pi}<\frac{3}{2}\,.$$

Следовательно, неравенству (28) удовлетворяет только одно целое число: $n=1$. Корень из первой серии с этим номером равен $x=\arcsin(\sqrt{2}-1)+2\pi$.

Теперь найдем номера корней из второй серии, удовлетворяющих условию $x\in\left[\frac{2\pi}{3};3\pi\right]$. Для этого нужно решить неравенство

$$\frac{2\pi}{3}\leqslant\pi-\arcsin(\sqrt{2}-1)+2\pi n\leqslant 3\pi$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{-\frac{\pi}{3}+\arcsin(\sqrt{2}-1)}{2\pi}\leqslant n\leqslant\frac{2\pi+\arcsin(\sqrt{2}-1)}{2\pi}\,.$$

С помощью уже использовавшейся оценки $0<\arcsin(\sqrt{2}-1)<\frac{\pi}{6}$ мы имеем:

$$-\frac{1}{6}<\frac{-\frac{\pi}{3}+\arcsin(\sqrt{2}-1)}{2\pi}<-\frac{1}{12}\,,$$
$$1<\frac{2\pi+\arcsin(\sqrt{2}-1)}{2\pi}<\frac{13}{12}\,.$$

Следовательно, $n=0$ или 1. Корни из второй серии с этими номерами равны $\pi-\arcsin(\sqrt{2}-1)$ и $3\pi-\arcsin(\sqrt{2}-1)$.

Приведенный способ отбора корней в *данной ситуации* довольно сложен технически (хотя его логика очень простая и естественная). Гораздо проще поступить по-другому. Вместо того чтобы решать уравнение $\sin x=\sqrt{2}-1$ в общем виде, а затем отбирать корни, попадающие на отрезок $\left[\frac{2\pi}{3};3\pi\right]$, будем сразу находить нужные корни, решая графически наше уравнение на заданном отрезке. Для этого нужно нарисовать график функции $y=\sin x$ и провести горизонтальную прямую $y=\sqrt{2}-1$ (см. рис. 5).

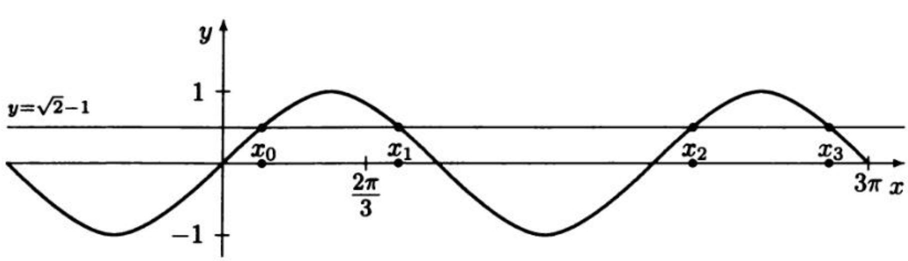


Рис. 5

Абсциссы точек пересечения прямой $y=\sqrt{2}-1$ и синусоиды $y=\sin x$ будут корнями уравнения $\sin x=\sqrt{2}-1$. Точка пересечения этой прямой и «центральной» дуги синусоиды (дуги, соответствующей $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) дает $x_0 = \arcsin(\sqrt{2} - 1)$. Поскольку $0 < \sqrt{2} - 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$, из графика ясно, что на отрезок $\left[\frac{2\pi}{3}; 3\pi\right]$ попадут только три точки: $x_1 = \pi - \arcsin(\sqrt{2} - 1)$, $x_2 = \arcsin(\sqrt{2} - 1) + 2\pi$, $x_3 = 3\pi - \arcsin(\sqrt{2} - 1)$.

Графический способ отбора корней, очевидно, гораздо проще формального. Однако он предполагает знание *доказательства* формул для решения простейших тригонометрических уравнений, а не просто знание *готовых* формул.

Ответ: $x_1 = -\arcsin(\sqrt{2} - 1) + \pi$, $x_2 = \arcsin(\sqrt{2} - 1) + 2\pi$, $x_3 = -\arcsin(\sqrt{2} - 1) + 3\pi$. ■

□ **360.** Превратим суммы тригонометрических функций в числителе и знаменателе дроби в левой части исходного уравнения в произведения тригонометрических функций:

$$\sin 2x + \cos 3x = \sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\cos 2x - \sin 3x = \cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Теперь исходное уравнение примет вид:

$$\frac{\sqrt{3}\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \neq 0. \end{cases}$$

Множество решений уравнения последней системы имеет вид:

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \frac{11\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из этой серии на интервал $(1; 2)$ попадает только корень $x_0 = \frac{11\pi}{30}$. Для этого корня число $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ равно $\frac{\pi}{15}$, так что условие $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \neq 0$ выполнено.

Ответ: $\frac{11\pi}{30}$. ■

□ **371.** Превратим уравнение в однородное относительно $a = \sin x$, $b = \cos x$:

$$2\sin x\cos x + 5(\cos^2 x - \sin^2 x) = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Updownarrow$$

$$4\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 0\,.$$

Из уравнения следует, что $\cos x \neq 0$. Поэтому его можно почленно разделить на $\cos^2 x$ и свести дело к квадратному уравнению относительно $y = \operatorname{tg} x$:

$$4y^2 - y - 1 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен 17. Поэтому оно имеет два (различных) корня $y_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$, $y_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$. Соответственно, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\operatorname{tg} x = y_1$, $\operatorname{tg} x = y_2$. Поскольку $y_1, y_2 \neq 0$, на интервале $-\pi < x < \pi$ каждое из этих уравнений имеет ровно два корня; обозначим их x_1', x_1'' (для первого уравнения) и x_2', x_2'' (для второго уравнения). Поскольку $y_1 \neq y_2$, все четыре корня различны.

Теперь мы можем подсчитать искомую величину $\operatorname{tg} x_1' + \operatorname{tg} x_1'' + \operatorname{tg} x_2' + \operatorname{tg} x_2''$; она равна

$$y_1 + y_1 + y_2 + y_2 = 2(y_1 + y_2) = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$. ■

□ **387.** Похожие числа $\frac{9}{10}$ и $\frac{9}{20}$ наводят на мысль о группировке:

$$\frac{9}{10}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) + \left(\cos x\sin\frac{x}{4} + 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4}\right) = 0.$$

Теперь разумно предположить, что вторую скобку также удастся разложить на множители, причем одним из множителей будет $\sin x - \frac{1}{2}$ (тогда его можно будет вынести за скобку и расщепить уравнение на два более простых). Попробуем реализовать эту идею. Начнем с напрашивающегося вынесения за скобку общего множителя $\sin\frac{x}{4}$ трех первых членов:

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{x}{4}\cdot\left(\cos x + 2\cos\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} = \\
&= \sin\frac{x}{4}\cdot\left(2\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} = \\
&= 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} = \\
&= 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} = \\
&= \cos\frac{x}{4}\cdot\left(4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \\
&= \cos\frac{x}{4}\cdot\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \\
&= \cos\frac{x}{4}\cdot\left(\sin x - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Итак, исходное уравнение приводится к виду

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{10} + \cos\frac{x}{4}\right) = 0$$

и поэтому распадается на два уравнения

$$\sin x = \frac{1}{2}\,, \qquad \cos\frac{x}{4} = -\frac{9}{10}\,.$$

Из графика функции $y = \sin x$ ясно, что первое уравнение имеет три корня на отрезке $\left[-\frac{9\pi}{2}\,; -\frac{3\pi}{2}\right]$ (мы сохраняем обычную нумерацию корней уравнения вида $\sin x = a$):

$$x_{-2} = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}\,,$$

$$x_{-3} = -\frac{\pi}{6} - 3\pi = -\frac{19\pi}{6}\,,$$

$$x_{-4} = \frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{23\pi}{6}\,.$$

Чтобы решить второе уравнение на отрезке $\left[-\frac{9\pi}{2}\,; -\frac{3\pi}{2}\right]$, введем новую неизвестную $t = \frac{x}{4}$, так что задача сведется к решению уравнения $\cos t = -\frac{9}{10}$ на отрезке $-\frac{9\pi}{8} \leqslant t \leqslant -\frac{3\pi}{8}$. Поскольку

$$A \equiv \cos\left(-\frac{9\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8} = -\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{8}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} < -\frac{9}{10}\,,$$

из графика функции $y = \cos t$ ясно, что на отрезке $-\frac{9\pi}{8} \leqslant t \leqslant -\frac{3\pi}{8}$ уравнение $\cos t = -\frac{9}{10}$ имеет единственный корень $t = -\arccos\left(-\frac{9}{10}\right)$. Ему соответствует значение $x = -4\arccos\left(-\frac{9}{10}\right)$.

ОТВЕТ: $-\frac{23\pi}{6}$, $-\frac{19\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$, $-4\arccos\left(-\frac{9}{10}\right)$. ■

□ **388.** Исходное уравнение

$$2\cos\frac{x}{3} + 2(\sqrt{5} - 1)\sin\frac{x}{6} = 2 - \sqrt{5}$$

можно привести к виду

$$4\sin^2\frac{x}{6} - 2(\sqrt{5} - 1)\sin\frac{x}{6} - \sqrt{5} = 0.$$

Для новой неизвестной $y = \sin\frac{x}{6}$ мы имеем квадратное уравнение:

$$4y^2 - 2(\sqrt{5} - 1)y - \sqrt{5} = 0.$$

Поскольку $\frac{D}{4} = (\sqrt{5} - 1)^2 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2$, его корни есть:

$$y_1 = -\frac{1}{2}\,, y_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

Следовательно, исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{2}\,, \qquad \sin\frac{x}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

Множество решений первого из них можно описать двумя формулами:

$$x = -\pi + 12\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \qquad x = 7\pi + 12\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

а множество решений второго — пусто.

Теперь определим, какие из найденных корней удовлетворяют условию $\cos\frac{3x}{4} < 0$.

1. Для $x = -\pi + 12\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, мы имеем:

$$\cos\frac{3x}{4} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4} + 9\pi n\right) = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Эта величина отрицательна тогда и только тогда, когда $(-1)^n > 0$, т. е. $n = 2k$ — число четное. Соответственно, из проверяемой серии в ответ включается только подсерия $x = -\pi + 24\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Для $x = 7\pi + 12\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, мы имеем:

$$\cos\frac{3x}{4} = \cos\left(\frac{21\pi}{4} + 9\pi m\right) = (-1)^m \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Эта величина отрицательна тогда и только тогда, когда $(-1)^m > 0$, т. е. $m = 2l$ — число четное. Соответственно, из проверяемой серии в ответ включается только подсерия $x = 7\pi + 24\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = -\pi + 24\pi k$, $x = 7\pi + 24\pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$. ■

□ **393.** Исходное уравнение равносильно бесконечной совокупности иррациональных уравнений

$$\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right) = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 3x - 16n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Каждое из этих уравнений равносильно системе

$$\begin{cases} 9x^2 + 160x + 800 = (3x - 16n)^2, \\ 3x - 16n \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3n+5)x = 8n^2 - 25, \\ x \geqslant \dfrac{16n}{3}. \end{cases}$$

Поскольку n — целое число, уравнение системы имеет единственный корень $x = \frac{8n^2 - 25}{3n + 5}$. Это число будет решением исходного уравнения тогда и только тогда, когда параметр n удовлетворяет неравенству

$$\frac{8n^2 - 25}{3n + 5} \geqslant \frac{16n}{3} \Leftrightarrow \frac{24n^2 + 80n + 75}{3n + 5} \leqslant 0.$$

Дискриминант квадратного трехчлена $24n^2 + 80n + 75$ отрицателен, и поэтому он больше 0 при всех значениях n. Следовательно, последнее неравенство сводится к неравенству $3n + 5 < 0$, множество решений которого в целых числах имеет вид: $\{-2; -3; \ldots\}$ — только для n из этого множества число $x = \frac{8n^2 - 25}{3n + 5}$ будет решением исходного уравнения.

Выясним теперь, при каких значениях n число $x = \frac{8n^2 - 25}{3n + 5}$ будет целым. Для этого выделим целую часть из неправильной дроби $\frac{8n^2 - 25}{3n + 5}$ (например, делением числителя на знаменатель «в столбик»):

$$\frac{8n^2-25}{3n+5}=\frac{8}{3}n-\frac{40}{9}-\frac{25}{9}\cdot\frac{1}{3n+5},$$

так что верно равенство

$$9x=(24n-40)-\frac{25}{3n+5}.$$

Поэтому, если x — целое число, то $3n+5$ должно быть делителем числа 25, т. е. $3n+5$ может быть лишь одним из шести чисел: ±1, ±5, ±25. Впрочем, имея в виду, что $n\in\{-2;-3;\dots\}$, остается только три возможности: $3n+5=-1$, $3n+5=-5$, $3n+5=-25$. Первый и третий случай означают, что $n=-2$ и $n=-10$ соответственно. Второй случай дает $n=-\frac{10}{3}$, т. е. невозможен.

Для завершения решения нужно проверить, будет ли целым число $x=\dfrac{8n^2-25}{3n+5}$ для этих двух «подозрительных» значений параметра n:

1) если $n=-2$, то $x=\dfrac{8\cdot4-25}{-6+5}=-7\in\mathbb{Z}$;

2) если $n=-10$, то $x=\dfrac{8\cdot100-25}{-30+5}=-31\in\mathbb{Z}$.

ОТВЕТ: $x_1=-7; x_2=-31$. ■

□ **394.** Раскрывая модуль по стандартной схеме, мы получим совокупность двух систем:

$$\begin{cases}\cos x\geqslant\frac{1}{2},\\ \operatorname{tg}x=1\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\cos x<\frac{1}{2},\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{2}\end{cases}$$

$$\Updownarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\Updownarrow$$

$$\begin{cases}\cos x\geqslant\frac{1}{2},\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z};\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos x<\frac{1}{2},\\ x=2\pi m, x=\frac{\pi}{2}+2\pi l,\quad m,l\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Для $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, величина $\cos x$ равна $(-1)^n\frac{\sqrt2}{2}$. Для четных n это число равно $\frac{\sqrt2}{2}$ и поэтому больше, чем $\frac{1}{2}$. Для нечетных n это число равно $-\frac{\sqrt2}{2}$ и поэтому меньше, чем $\frac{1}{2}$. Следовательно, в ответ включается подсерия, соответствующая $n=2k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Для $x=2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, величина $\cos x$ равна $1>\frac{1}{2}$. Поэтому ни одно значение из этой серии не включается в ответ.

Для $x=\frac{\pi}{2}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, величина $\cos x$ равна $0<\frac{1}{2}$. Поэтому вся эта серия включается в ответ.

ОТВЕТ: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi l$, $k,l\in\mathbb{Z}$. ■

□ **412.** *Первый способ.* Избавляясь от знаменателя, получим систему

$$\begin{cases}\sin4x-\cos6x=0,\\ \cos6x\neq0.\end{cases}$$

Уравнение $\sin 4x - \cos 6x = 0$ можно решить, разложив левую часть на множители:

$$\sin 4x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0,$$

после чего оно распадется на два уравнения:

$$\begin{array}{cc} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ 5x - \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} & x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}; & x = \frac{3\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Теперь отберем те корни, для которых выполнено условие $\cos 6x \neq 0$.

Для x из второй серии величина $\cos 6x$ равна

$$\cos\left(\frac{9\pi}{2} + 6\pi m\right) = 0,$$

так что ни один x из этой серии не является решением исходного уравнения.

Для x из первой серии такой простой способ отбора не сработает. Поэтому мы применим другой метод. Решив уравнение $\cos 6x = 0$, мы найдем, какие значения x должны быть отброшены; это числа, которые можно представить в виде:

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда уравнение (относительно целочисленных неизвестных n и k)

$$\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$$

определяет, какие номера n корней из первой серии должны быть отброшены.

Решим это уравнение:

$$6n - 5k = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$6(n-1) = 5(k-1)$$
$$\Updownarrow$$
$$n - 1 = 5l, k - 1 = 6l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, $n \neq 5l + 1$, $l \in \mathbb{Z}$.

Второй способ. Используя формулы $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, имеем:

$$\frac{2\sin 2x\cos 2x}{4\cos^3 2x - 3\cos 2x} = 1.$$

После сокращения на $\cos 2x$ получим следующую систему, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} \dfrac{2\sin 2x}{4\cos^2 2x - 3} = 1\,, \\ \cos 2x \neq 0\,. \end{cases}$$

Уравнение системы легко решается с помощью новой неизвестной $y = \sin 2x$:

$$\frac{2y}{4(1-y^2)-3} = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 4y^2 + 2y - 1 = 0 \\ 4y^2 \neq 1 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad y_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sin 2x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \sin 2x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

Поскольку $\arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\pi}{10}$, а $\arcsin\frac{-1-\sqrt{5}}{4} = -\frac{3\pi}{10}$, решением первого уравнения будут следующие две серии:

$$x = \frac{\pi}{20} + \pi m, x = \frac{9\pi}{20} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

а решением второго —

$$x = -\frac{3\pi}{20} + \pi m, x = \frac{13\pi}{20} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Величина $\cos 2x$ для этих значений неизвестной принимает значения $\cos\frac{\pi}{10}$, $\cos\frac{9\pi}{10}$, $\cos\frac{3\pi}{10}$, $\cos\frac{13\pi}{10}$. Ни одно из этих чисел не равно нулю, так что четыре приведенные выше серии дают ответ исходного уравнения (эти серии можно получить из ответа, который дал первый способ решения, если рассмотреть 4 возможных варианта значений параметра n: $n = 5m$, $n = 5m+2$, $n = 5m+3$, $n = 5m+4$).

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 5l+1$, $l \in \mathbb{Z}$. ■

□ **432.** Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos x = \sin x\,, \\ \sin x > 0\,, \\ \sin x \neq 1\,. \end{cases}$$

Первое уравнение системы является однородным относительно $a = \sin x$ и $b = \cos x$ и обычными рассуждениями приводится к виду $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Множество решений этого уравнения описывается формулой $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Для этих значений неизвестной

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = (-1)^n\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому условие $\sin x \neq 1$ выполнено для всех x, а условие $\sin x > 0$ — для корней с четными номерами: $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **445.** Почленное возведение в квадрат приводит к следующей системе, равносильной исходному уравнению:

$$\begin{cases} \sin x = -\cos x, \\ \sin x \geqslant 0. \end{cases}$$

Из уравнения системы следует, что $\cos x \neq 0$. Поэтому его можно разделить на $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Для найденных значений x условие $\sin x \geqslant 0$ примет вид:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \pi m\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow (-1)^m \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow (-1)^{m+1}\frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant 0.$$

Оно выполнено тогда и только тогда, когда m является нечетным числом, т. е. $m = 2n + 1$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Соответствующая серия значений x дается формулой:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi(2n+1) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n.$$

Отметим, что это соотношение можно получить непосредственно из системы

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \\ \sin x \geqslant 0, \end{cases}$$

если интерпретировать ее решение на тригонометрической окружности.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **454.** Избавимся от знаменателя в правой части:

$$\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x} = 4\sin x \cos x.$$

Из этого уравнения следует, что $\cos x \neq 0$ (в противном случае уравнение бы приняло вид $2 = 0$) и поэтому проделанное преобразование равносильно.

Чтобы избавиться от радикалов, возведем обе части последнего уравнения в квадрат; чтобы это преобразование было равносильным, необходимо сохранить условие неотрицательности правой части:

$$\begin{cases} 2 + 2\sqrt{1 - \cos^2 x} = 16\sin^2 x \cos^2 x, \\ 4\sin x \cos x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1 + |\sin x| = 8\sin^2 x(1 - |\sin x|)(1 + |\sin x|), \\ \sin 2x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1 = 8\sin^2 x(1 - |\sin x|), \\ \sin 2x \geqslant 0. \end{cases}$$

Чтобы решить уравнение системы, введем новую неизвестную $t = |\sin x|$:

$$8t^3 - 8t^2 + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет рациональный корень $t = \frac{1}{2}$. Поэтому левую часть можно разложить на множители, причем одним из множителей будет $t - \frac{1}{2}$. Второй множитель можно найти делением многочлена $8t^3-8t^2+1$ на двучлен $t-\frac{1}{2}$ в столбик; он равен $8t^2-4t-2$, что дает еще два корня: $t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$.

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим три уравнения:

$$\begin{array}{ccc}
|\sin x|=\frac{1}{2} & |\sin x|=\frac{1+\sqrt{5}}{4} & |\sin x|=\frac{1-\sqrt{5}}{4} \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\
\sin^2 x=\frac{1}{4} & \sin^2 x=\frac{3+\sqrt{5}}{8} & \varnothing. \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \\
\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{4} & \frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{8} & \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \\
\cos 2x=\frac{1}{2}\ ; & \cos 2x=\frac{1-\sqrt{5}}{4}\ ; &
\end{array}$$

С учетом условия $\sin 2x \geqslant 0$ множество решений этих уравнений дается формулами $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$ и $x=\frac{3\pi}{10}+\pi m$, $n,m\in\mathbb{Z}$, соответственно. При этом мы используем следующие равенства:

$$\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{4}=\pi-\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,,\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{2\pi}{5}\,.$$

Из первой серии на интервал $0<x<2\pi$ попадают только числа $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6}$; из второй — только числа $\frac{3\pi}{10}$ и $\frac{13\pi}{10}$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{7\pi}{6}\,;\frac{3\pi}{10}\,;\frac{13\pi}{10}\right\}$. ■

□ **474.** При всех значениях переменной x верны неравенства $1+x^2\geqslant 1$, $\cos x\leqslant 1$. Иначе говоря, $C=1$ — нижняя граница возможных значений $f(x)=1+x^2$ и верхняя граница возможных значений $g(x)=\cos x$. В этой ситуации ясно, что равенство $f(x)$ и $g(x)$ возможно тогда и только тогда, когда эти функции порознь равны C. Таким образом, уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=C, \\ g(x)=C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x^2=1, \\ \cos x=1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень $x=0$. Поскольку это число удовлетворяет второму уравнению системы, оно будет решением системы и, значит, исходного уравнения.

Ответ: $x=0$. ■

□ **478.** Стандартное раскрытие модуля позволяет разбить исходное уравнение на две системы:

$$\begin{cases} 1-2\sin x+\cos x\geqslant 0, \\ 2+\cos x=\cos 2x\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-2\sin x+\cos x<0, \\ 4\sin x-\cos x=\cos 2x\,. \end{cases}$$

Для решения уравнения первой системы введем новую неизвестную $y = \cos x$:

$$2 + y = 2y^2 - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$2y^2 - y - 3 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$y = \frac{3}{2}; -1 .$$

Поскольку $\frac{3}{2} > 1$, уравнение первой системы равносильно уравнению $\cos x = -1$, множество решений которого дается формулой $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Все эти значения неизвестной удовлетворяют неравенству первой системы. Поэтому они (и только они) являются решениями первой системы.

Чтобы решить вторую систему, перепишем ее в виде:

$$\begin{cases} 2\sin x > 1 + \cos x, \\ 4\sin x = \cos 2x + \cos x. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\cos 2x + \cos x > 2 \cdot (1 + \cos x)$$
$$\Updownarrow$$
$$2\cos^2 x - \cos x - 3 > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos x < -1 \text{ или } \cos x > \frac{3}{2} .$$

Поэтому вторая система не имеет решений.

ОТВЕТ: $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **481.** Приведем уравнение к виду

$$1 - \cos^2 x + 3x^2 \cos x + 3x^2 = 0$$

и введем новую неизвестную $y = \cos x$; при этом сохраним основную неизвестную x в выражениях $3x^2$:

$$y^2 - 3x^2 y - (1 + 3x^2) = 0.$$

Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно неизвестной y и подсчитаем его дискриминант: $D = 9x^4 + 4(1 + 3x^2) = (3x^2 + 2)^2$. Поэтому оно имеет два корня: $y = 3x^2 + 1$ и $y = -1$. Вспоминая, что обозначает неизвестная y, мы получим два уравнения: $\cos x = 3x^2 + 1$ и $\cos x = -1$. Первое уравнение практически не отличается от уравнения, которое предлагалось решить в задаче 474; оно также имеет единственный корень $x = 0$. Второе уравнение — это стандартное тригонометрическое уравнение, решения которого задаются формулой $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ОТВЕТ: $x = 0$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

☐ **482.** Неравенства $-1 \leqslant \cos\alpha, \cos\beta \leqslant 1$ влекут, что уравнение вида $\cos\alpha\cos\beta = 1$ равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} \cos\alpha = 1\,, \\ \cos\beta = 1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\alpha = -1\,, \\ \cos\beta = -1\,. \end{cases}$$

Получившиеся уравнения легко решаются, что в принципе позволяет получить ответ любой конкретной задачи рассматриваемого типа. Однако решение немного упростится, если предварительно превратить произведение $\cos\alpha\cos\beta$ в сумму $\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$. Тогда уравнение $\cos\alpha\cos\beta = 1$ примет вид $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2$, и ограниченность функции $y = \cos x$ приведет к системе (одной вместо двух)

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = 1\,, \\ \cos(\alpha-\beta) = 1\,. \end{cases}$$

Для решаемой задачи эта система выглядит следующим образом

$$\begin{cases} \cos 3\pi x = 1\,, \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2n}{3}\,, & n \in \mathbb{Z}\,, \\ x = 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Чтобы решить последнюю систему, нужно решить в целых числах уравнение $\frac{2n}{3} = 2\pi m$. Если допустить, что $m \neq 0$, то из этого уравнения следует, что $\pi = \frac{n}{m}$, т. е. π является рациональным числом. Значит, $m = 0$, а тогда и $n = 0$. Таким образом, только число $x = 0$ можно представить как в виде $x = \frac{2n}{3}$, $\quad n \in \mathbb{Z}$, так и в виде $x = 2\pi m$, $\quad m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = 0$. ■

☐ **483.** Область значений функции $y = a\sin x + b\cos x$ — это отрезок

$$\left[-\sqrt{a^2+b^2}; \sqrt{a^2+b^2}\right].$$

Следовательно, область значений левой части уравнения — отрезок $[0; 16]$.

Правую часть уравнения можно привести к виду $2\cos^2 9x + 12\cos 9x + 26 = 2y^2 + 12y + 26$, где $y = \cos 9x$. Поэтому область значений правой части совпадает с множеством значений функции $f(y) = 2y^2 + 12y + 26$ при $y \in [-1; 1]$. Поскольку абсцисса вершины этой параболы равна $y_0 = -3$, на множестве $y \in [-1; 1]$ функция $f(y) = 2y^2 + 12y + 26$ возрастает, так что искомое множество значений есть $[f(-1); f(1)] = [16; 40]$.

Из полученных оценок следует, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 8\left|\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x\right| = 16\,, \\ 2\cos^2 9x + 12\cos 9x + 26 = 16\,. \end{cases} \tag{29}$$

Первое уравнение системы решается введением дополнительного аргумента:

$$\left|\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right|=1$$
$$\Updownarrow$$
$$\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$$
$$\Updownarrow$$
$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Второе уравнение, как следует из проведенных ранее рассуждений, равносильно уравнению $\cos 9x=-1$ (нижняя граница возможных значений правой части достигается при $y=\cos 9x=-1$). Поэтому его множество решений дается формулой $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi m}{9}$, $m\in\mathbb{Z}$.

Решениями системы (29) будут те значения x, которые входят как в серию $x_n=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}$, так и в серию $x_m=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi m}{9}$. Соответствующие номера n,m можно найти как решение следующего уравнения в целых числах:

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi m}{9}$$
$$\Updownarrow$$
$$9n=4(m-1)$$
$$\Updownarrow$$
$$n=4k, m-1=9k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Поэтому решение системы (29) дается формулой:

$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi\cdot 4k}{2}=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

ОТВЕТ: $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. ■

□ **494.** Обращая внимание на почти одинаковые логарифмические выражения, преобразуем уравнение так, чтобы выделить повторяющиеся блоки:

$$2(x^2+4)\lg|\sin 3x|+2x^2\lg|\cos 2x|=4\lg|\cos 2x|+12\lg|\sin 3x|.$$

Группируя члены, содержащие идентичные логарифмические выражения, получим:

$$(x^2-2)\lg|\sin 3x|+(x^2-2)\lg|\cos 2x|=0$$
$$\Updownarrow$$
$$(x^2-2)\left(\lg|\sin 3x|+\lg|\cos 2x|\right)=0$$
$$\Updownarrow$$
$$(x^2-2)\lg(\sin 3x\cos 2x)=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x^2-2=0\,, \\ \sin 3x\cos 2x>0\,, \end{cases}\quad \text{или}\quad \lg(\sin 3x\cos 2x)=0\,.$$

Уравнение $x^2 - 2$ имеет два корня: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$. Они будут корнями исходного уравнения, если выполнено условие $\sin 3x \cos 2x > 0$.

Поскольку $\frac{\pi}{3} < \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, число $3\sqrt{2}$ лежит на интервале $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, так что $\sin 3\sqrt{2} < 0$. Число $2\sqrt{2}$ лежит на интервале $\left(\frac{2\pi}{3}; \pi\right)$, так что $\cos 2\sqrt{2} < 0$. Поэтому $x_1 = \sqrt{2}$ удовлетворяет проверяемому условию.

Так как функция $y = \sin 3x \cos 2x$ — нечетная и в точке $x_1 = \sqrt{2}$ принимает положительное значение, можно гарантировать, что в точке $x_2 = -\sqrt{2}$ ее значение отрицательно, т. е. $x_2 = -\sqrt{2}$ не удовлетворяет условию $\sin 3x \cos 2x > 0$.

Уравнение $\lg(\sin 3x \cos 2x) = 0$ равносильно уравнению $\sin 3x \cos 2x = 1$, которое может быть решено тем же методом, что и задача 482:

$$\sin 5x + \sin x = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \sin 5x = 1\,, \\ \sin x = 1\,. \end{cases}$$

Решение второго уравнения имеет вид: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Все эти значения, очевидно, удовлетворяют первому уравнению.

Ответ: $x = \sqrt{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **503.** Перепишем уравнение в виде

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}$$

и рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \cos x + \cos y - \cos(x+y).$$

Как было установлено в ходе решения задачи 152, наибольшее значение функции $f(x,y)$ равно $\frac{3}{2}$. Оно достигается в точках (x,y), которые даются формулами:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi m\,, \\ y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad m, n \in \mathbb{Z}\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m\,, \\ y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad m, n \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Эти формулы, очевидно, и дают ответ исходного уравнения.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi m; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **505.** В правой части стоит сумма двух взаимно обратных положительных чисел $a = \operatorname{tg}^2 x$ и $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{a}$. Поэтому она больше или равна 2, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $a = \operatorname{tg}^2 x = 1$.

Левая часть является линейной комбинацией $\sin x$ и $\cos x$. Применяя стандартное преобразование с помощью дополнительного аргумента:

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

мы найдем ее область значений — это отрезок $[-2; 2]$.

Из полученных оценок следует, что равенство левой и правой частей уравнения возможно тогда и только тогда, когда эти части порознь равны 2. Используя результаты о том, когда эта граница достигается, мы получим следующую систему, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 1\,, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1\,. \end{cases}$$

Решение второго уравнения имеет вид:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для всех этих значений неизвестной, очевидно, выполнено первое уравнение системы.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **506.** Поскольку $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, уравнение можно переписать в виде:

$$2^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^{\cos 2x}}} + 2^{\sqrt{2}^{\cos 2x}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}}.$$

Обращая внимание на «почти взаимно обратные» числа $a = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^{\cos 2x}}$ и $b = \sqrt{2}^{\cos 2x}$, применим к положительным числам $A = 2^a$ и $B = 2^b$ неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического:

$$2^a + 2^b \geqslant 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}(a+b)}.$$

В показателе степени в правой части стоит среднее арифметическое положительных чисел a и b. В силу неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического эта величина не меньше, чем

$$\sqrt{ab} \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^{\cos 2x}} \cdot \sqrt{2}^{\cos 2x}} = \sqrt[4]{2}.$$

Соответственно, левая часть исходного уравнения при всех x больше или равна $2^{1+\sqrt[4]{2}}$.

Если хотя бы в одном из двух использованных неравенств для среднего арифметического и среднего геометрического стоял знак $>$, а не $=$, то левая часть исходного уравнения будет строго больше $2^{1+\sqrt[4]{2}}$. Поэтому равенство левой и правой частей исходного уравнения возможно тогда и только тогда, когда в обоих использованных неравенствах для среднего арифметического и среднего геометрического стоял знак $=$. Это равносильно тому, что числа, к которым применялось это неравенство, равны:

$$\begin{cases} 2^a = 2^b\,, \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b\,.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы имеем:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^{\cos 2x}} = \sqrt{2}^{\cos 2x} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **509.** Поскольку уравнение содержит две неизвестные, естественно попытаться превратить его в систему из двух уравнений. Одна из возможностей сделать это — метод оценок, поскольку в ситуации $f(x,y) \geqslant C$, $g(x,y) \leqslant C$ (C — нижняя граница возможных значений $f(x,y)$ и верхняя граница возможных значений $g(x,y)$) он всегда превращает уравнение $f(x,y) = g(x,y)$ в систему вида

$$\begin{cases} f(x,y) = C, \\ g(x,y) = C. \end{cases}$$

Итак, попробуем оценить возможные значения выражений в левой и правой частях исходного уравнения.

С правой частью все просто. Поскольку $\sin y \in [-1; 1]$, справедливо двойное неравенство

$$-11.5 \leqslant 12 + \frac{1}{2}\sin y \leqslant 12.5, \tag{30}$$

причем эти границы нельзя улучшить (они достигаются при некоторых y).

Взаимно обратные положительные числа $\sin^2 x$ и $\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\cos^2 x$ и $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ приводят к естественному выводу: воспользоваться неравенством для суммы двух взаимно обратных положительных чисел:

$$\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \geqslant 2,$$
$$\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \geqslant 2,$$

так что выражение в левой части исходного уравнения (обозначим его для краткости буквой F) больше или равно 8. Сопоставляя оценку $F \geqslant 8$ с *точной* оценкой (30) правой части, мы видим, что метод оценок не сработает.

Отсюда может быть два вывода:

1) идея применить метод оценок была ошибочной;

2) оценка $F \geqslant 8$ очень грубая и ее можно уточнить; ясно, что для применения метода оценок нужно иметь неравенство $F \geqslant 12.5$ (или неравенство $F \geqslant C$, где $C > 12.5$ — тогда исходное уравнение вообще не имеет решений).

Общие соображения, приведенные в начале решения, показывают, что второй вывод, видимо, более разумный. Действительно, число 8 никак не может быть *точной* нижней границей значений левой части уравнения: если она достигается, то одновременно должны быть выполнены два равенства $\sin^2 x = 1$, $\cos^2 x = 1$, что невозможно в силу основного тригонометрического тождества. Причина этого связана с тем, что выражения $a = \sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}$ и $b = \cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$ взаимозависимы, а мы их оценивали независимо друг от друга.

Поскольку выражение F имеет вид $a^2 + b^2$, применим для его оценки неравенство о среднем квадратичном и среднем арифметическом:

$$F = a^2 + b^2 = 2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \geqslant 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{\sin^2 2x}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2} = 12.5, \tag{31}$$

причем эта нижняя граница возможных значений выражения F является точной, так как достигается при некотором значении x из области определения.

Из оценок (30) и (31) следует, что исходное уравнение равносильно системе (мы используем результат о том, когда в неравенстве о среднем квадратичном и среднем арифметическом достигается знак =):

$$\begin{cases} 12 + \frac{1}{2}\sin y = 12.5, \\ \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}, \\ \sin^2 2x = 1. \end{cases}$$

После простых тригонометрических преобразований эта система приводится к виду:

$$\begin{cases} \sin y = 1, \\ \cos 2x = 0, \end{cases}$$

откуда немедленно следует ответ задачи.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **517.** Выражения $\sqrt{1-x^2}$ и $4x^3 - 3x$ встречаются в тригонометрии — так устроены правые части известных формул $|\sin t| = \sqrt{1-\cos^2 t}$ и $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ соответственно. Поэтому естественно попытаться заменить x на $\cos t$. Конечно, сделать это можно, только если мы уверены, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$. В рассматриваемой задаче это следует из области допустимых значений неизвестной: $1 - x^2 \geqslant 0$.

Каждому значению x из отрезка $-1 \leqslant x \leqslant 1$ соответствует и притом только одно значение t из отрезка $0 \leqslant t \leqslant \pi$ такое, что $x = \cos t$ (отметим, что $t = \arccos x$, и поэтому фактически речь идет о введении новой неизвестной, хотя в задачах такого рода принято говорить о «подстановке»).

Для новой переменной t наша задача примет вид:

$$\sqrt{1-\cos^2 t} = 4\cos^3 t - 3\cos t.$$

Выражение $\sqrt{1-\cos^2 t}$, вообще говоря, равно $|\sin t|$. Но, поскольку переменная t меняется на отрезке $[0;\pi]$, можно гарантировать, что $\sin t \geqslant 0$. Поэтому наша задача примет вид (после применения формулы для $\cos 3t$)

$$\sin t = \cos 3t$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \cos 3t = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-2\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2t\right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = 0 \text{ или } \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2t\right) = 0.$$

Первое уравнение имеет единственный корень на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \pi$: $t = \frac{3\pi}{4}$.

Второе уравнение имеет два корня на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \pi$: $t = \frac{\pi}{8}$ и $t = \frac{5\pi}{8}$.

Соответственно исходное уравнение имеет три корня: $x_1 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $x_3 = \cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Изложенный выше метод применяется при решении и других алгебраических задач (уравнений, неравенств, систем и т. д.), в которых появляются выражения, по своей структуре похожие на формулы тригонометрии. Среди наиболее распространенных отметим выражения $\sqrt{1-x^2}$ ($|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$), $3x - 4x^3$ ($\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$), $\frac{2x}{1-x^2}$ $\left(\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)$, $x^2 + y^2$ ($\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$).

Отметим, что наше уравнение можно решить и без использования тригонометрической подстановки, применяя стандартные алгебраические методы. Именно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - x^2 = 16x^6 - 24x^4 + 9x^2\,, \\ 4x^3 - 3x \geqslant 0\,. \end{cases} \tag{32}$$

Для решения уравнения системы введем новую неизвестную $t = x^2$:

$$16t^3 - 24t^2 + 10t - 1 = 0. \tag{33}$$

Это уравнение имеет рациональный корень $t = \frac{1}{2}$. Поэтому его левую часть можно разложить на множители, причем одним из них будет $t - \frac{1}{2}$. Второй множитель можно найти делением в столбик; он равен $16t^2 - 16t + 2$. Соответственно, уравнение (33) распадется на два уравнения:

$$\begin{array}{cc} t - \frac{1}{2} = 0 & 8t^2 - 8t + 1 = 0 \\ & \Updownarrow \\ t = \frac{1}{2}\,; & t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}\,. \end{array}$$

Поэтому уравнение системы (32) имеет шесть корней $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Неравенство системы (32) легко решается методом интервалов:

$$x\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geqslant 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant 0 \;\text{ или }\; x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Поэтому неравенству системы удовлетворяют только корни $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}\,, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\,, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. ■

□ **520.** Из уравнения следует, что $1 - x^2 \geqslant 0$, т. е. $x \in [-1; 1]$. Каждому значению x из этого отрезка соответствует и притом только одно значение t из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}\,; \frac{\pi}{2}\right]$ такое, что $x = \sin t$ (отметим, что $t = \arcsin x$).

Для новой переменной наша задача примет вид (после несложных тригонометрических преобразований):

$$\sqrt{1-\sin t} = \sin 2t - \cos 2t$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \sin 4t - \sin t = 0\,, \\ \sin 2t \geqslant \cos 2t \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2\cos\frac{5t}{2}\cdot\sin\frac{3t}{2} = 0\,, \\ \sin 2t \geqslant \cos 2t\,. \end{cases}$$

Первое уравнение последней системы распадается на два:

$$\cos\frac{5t}{2} = 0 \qquad\qquad \sin\frac{3t}{2} = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$t = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}\,,\quad n\in\mathbb{Z}\,; \qquad t = \frac{2\pi m}{3}\,,\quad m\in\mathbb{Z}\,.$$

Из первой серии на отрезок $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ попадают только числа $\frac{\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{5}$, а из второй — только число 0. Из этих чисел только $t = \frac{\pi}{5}$ удовлетворяет условию $\sin 2t \geqslant \cos 2t$. Итак, исходное уравнение имеет единственный корень $x = \sin\frac{\pi}{5} = \sin 36°$.

Как было показано в задаче 85, $\sin 36°$ можно выразить в радикалах; он равен $\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$. ■

□ **521.** Введем новую переменную $y = 3x$:

$$2y\cdot\sqrt{1-y^2} + 2y^2 - \sqrt2 y - 1 = 0.$$

Из этого уравнения следует, что $y\in[-1;1]$. Каждому значению y из этого отрезка соответствует и притом только одно значение t из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ такое, что $y = \sin t$ (отметим, что $t = \arcsin y$).

Для переменной t наша задача примет вид:

$$2\sin t\cos t + 2\sin^2 t - \sqrt2\sin t - 1 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin 2t - \cos 2t - \sqrt2\sin t = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) - \sin t = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \text{ или } \cos\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0\,.$$

На отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ первое уравнение имеет единственный корень $t = \frac{\pi}{4}$, а второе уравнение — два корня: $t = \frac{5\pi}{12}$ и $t = -\frac{\pi}{4}$. Им соответствуют три корня исходного уравнения:

$$x_1 = \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12},$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}$. ■

□ **522.** Выделим полный квадрат во второй скобке:

$$8x \cdot (2x^2 - 1) \cdot \left(2(2x^2-1)^2 - 1\right) = 1.$$

Выражение вида $2x^2 - 1$ встречается в тригонометрии — так устроена правая часть известной формулы $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Поэтому естественно попытаться заменить x на $\cos\alpha$. Конечно, сделать это можно, только если мы уверены, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Обычно информацию такого рода извлекают из области допустимых значений неизвестной, но в нашем случае возможные значения x заполняют всю числовую прямую. В высшей алгебре имеются определенные неравенства для корней алгебраического уравнения (самые простые из них — в терминах его коэффициентов), но от них мало пользы, в частности, потому, что в соответствии с Программой по математике для поступающих в МГУ «объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, ... могут использоваться поступающим ... при условии, что он способен их пояснять и доказывать».

Однако, хотя из уравнения не удается получить неравенство $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (не удается простыми рассуждениями; ниже мы покажем, что на самом деле все корни нашего уравнения расположены на интервале $(-1; 1)$), условие задачи («найти число корней на отрезке $[0; 1]$») позволяет обойти эту проблему.

Эти общие соображения приводят к следующему решению задачи.

Каждому значению x из отрезка $[0; 1]$ соответствует и притом только одно значение t из отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ такое, что $x = \cos t$ (отметим, что $t = \arccos x$).

Для новой переменной наша задача примет вид (после несложных тригонометрических преобразований):

сколько корней на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет уравнение

$$8\cos t \cdot \cos 2t \cdot \cos 4t = 1?$$

Поскольку $t = 0$ не является корнем этого уравнения, а на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin t \neq 0$, задачу можно преобразовать к виду:

сколько корней на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет уравнение

$$8\cos t \cdot \cos 2t \cdot \cos 4t \cdot \sin t = \sin t?$$

Последнее уравнение легко приводится к виду

$$\sin 8t = \sin t \Leftrightarrow 2\cos\frac{9t}{2}\sin\frac{7t}{2} = 0,$$

после чего расщепляется на два уравнения: $\cos\frac{9t}{2} = 0$ и $\sin\frac{7t}{2} = 0$. Решение первого из дается формулой

$$t = \frac{\pi(2n+1)}{9}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

а второго — формулой

$$t = \frac{2\pi n}{7}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из первой серии на промежуток $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ попадают только корни $\frac{\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, а из второй — только один корень $\frac{2\pi}{7}$.

Отметим, что проведенные выше рассуждения практически не меняются, если мы будем находить корни исходного уравнения на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Поскольку $x = -1$ не является корнем, дело сведется к отбору корней двух последних тригонометрических уравнений, попадающих на интервал $0 < t < \pi$. Первая серия даст значения $t_1 = \frac{\pi}{9}$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$, $t_3 = \frac{5\pi}{9}$, $t_4 = \frac{7\pi}{9}$, а вторая — значения $t_5 = \frac{2\pi}{7}$, $t_6 = \frac{4\pi}{7}$, $t_7 = \frac{6\pi}{7}$. Поскольку уравнение 7-й степени не может иметь больше 7 корней, число корней исходного уравнения в точности равно 7, и все они лежат на интервале $-1 < x < 1$.

ОТВЕТ: 3 корня: $x_1 = \cos\frac{\pi}{9}$, $x_2 = \cos\frac{2\pi}{7}$, $x_3 = \frac{1}{2}$. ■

□ **523.** Перепишем исходную систему неравенств в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{1+xy} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{y-z}{1+yz} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{x-z}{1+xz} > \sqrt{3}. \end{cases} \tag{34}$$

Выражения в левых частях устроены как правая часть формулы

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Имея в виду это сходство, хотелось бы заменить x, y, z тангенсами некоторых углов.

Это, действительно, можно сделать. Так как при $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg} t$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, для каждого $u > 0$ существует и притом ровно одно число $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ такое, что $\operatorname{tg} t = u$. Ясно, что $t = \operatorname{arctg} u$ (непосредственно по определению $\operatorname{arctg} u$).

Введем в нашей задаче вместо неизвестных x, y, z новые неизвестные a, b, c по формулам:

$$a = \operatorname{arctg} x,$$
$$b = \operatorname{arctg} y,$$
$$c = \operatorname{arctg} z,$$

или, что эквивалентно, по формулам:

$$\operatorname{tg} a = x, \quad 0 < a < \frac{\pi}{2},$$
$$\operatorname{tg} b = y, \quad 0 < b < \frac{\pi}{2},$$
$$\operatorname{tg} c = z, \quad 0 < c < \frac{\pi}{2}.$$

Для этих неизвестных система (34) примет вид:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(a-b) < \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg}(b-c) < \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg}(a-c) > \sqrt{3}. \end{cases} \tag{35}$$

Поскольку $a, b, c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, разности $a-b$, $b-c$, $a-c$ лежат на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом интервале функция $\operatorname{tg} t$ монотонно возрастает. Поэтому система (35) равносильна системе

$$\begin{cases} a-b < \dfrac{\pi}{6}, \\ b-c < \dfrac{\pi}{6}, \\ a-c > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Складывая два первых неравенства этой системы, мы получим $a - c < \frac{\pi}{3}$, что противоречит третьему неравенству. Таким образом, исходная система неравенств не имеет решений.

ОТВЕТ: нет. ■

□ **524.** По аналогии с решением задачи 523 перепишем исходную систему неравенств в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{1+xy} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{y-z}{1+yz} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{x-z}{1+xz} \geqslant \sqrt{3}, \end{cases} \tag{36}$$

и введем вместо неизвестных x, y, z новые неизвестные a, b, c по формулам:

$$a = \operatorname{arctg} x,$$
$$b = \operatorname{arctg} y,$$
$$c = \operatorname{arctg} z,$$

или, что эквивалентно, по формулам:

$$\operatorname{tg} a = x, \quad 0 < a < \frac{\pi}{2},$$
$$\operatorname{tg} b = y, \quad 0 < b < \frac{\pi}{2},$$
$$\operatorname{tg} c = z, \quad 0 < c < \frac{\pi}{2}.$$

Для этих неизвестных система (36) примет вид:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(a-b) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg}(b-c) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg}(a-c) \leqslant \sqrt{3}. \end{cases} \tag{37}$$

Поскольку $a, b, c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, разности $a-b$, $b-c$, $a-c$ лежат на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом интервале функция $\operatorname{tg} t$ монотонно возрастает. Поэтому система (37) равносильна системе

$$\begin{cases} a-b \leqslant \dfrac{\pi}{6}, \\ b-c \leqslant \dfrac{\pi}{6}, \\ a-c \geqslant \dfrac{\pi}{3}. \end{cases} \tag{38}$$

Складывая два первых неравенства этой системы, мы получим $a-c \leqslant \frac{\pi}{3}$. Учитывая третье неравенство, можно гарантировать, что $a-c = \frac{\pi}{3}$. Исключая отсюда $a = c + \frac{\pi}{3}$, мы приведем первое неравенство к виду $b-c \geqslant \frac{\pi}{6}$. Учитывая второе неравенство, можно гарантировать, что $b-c = \frac{\pi}{6}$.

Легко видеть, что любое решение системы

$$\begin{cases} a-b = \dfrac{\pi}{6}, \\ a-c = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \tag{39}$$

является и решением системы (38).

Множество решений системы (39) дается формулой

$$\begin{cases} a = t, \\ b = t - \dfrac{\pi}{6}, \\ c = t - \dfrac{\pi}{3}, \end{cases}$$

где $t \in \mathbb{R}$ — параметр.

Требование $a, b, c \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, означает, что параметр t удовлетворяет условию $\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{2}$.

Возвращаясь к основным неизвестным x, y, z, мы получим:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = \dfrac{\sqrt{3}u - 1}{\sqrt{3} + u}, \\ z = \dfrac{u - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}u}, \end{cases}$$

где $u \equiv \operatorname{tg} t > \sqrt{3}$ — произвольный параметр.

ОТВЕТ: система имеет бесконечно много решений, которые задаются формулой $\left(u; \dfrac{\sqrt{3}u - 1}{\sqrt{3} + u}; \dfrac{u - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}u}\right)$, где $u > \sqrt{3}$ — произвольный параметр. ■

□ **525.** Все три уравнения исходной системы очень похожи друг на друга — отличие связано с коэффициентами при неизвестных и правыми частями. Чтобы сделать систему полностью симметричной, введем новые неизвестные $u = 3x$, $v = 3y$, $w = z$ (неизвестная w введена для симметрии обозначений). Для новых неизвестных система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{v}{u} - uv = 2, \\ \dfrac{w}{v} - wv = 2, \\ \dfrac{u}{w} - uw = 2. \end{cases}$$

Для того чтобы еще упростить систему, избавимся от знаменателей:

$$\begin{cases} v(1 - u^2) = 2u, \\ w(1 - v^2) = 2v, \\ u(1 - w^2) = 2w, \\ u, v, w \neq 0. \end{cases} \tag{40}$$

Уравнения этой системы напоминают формулу

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Имея в виду это сходство, сделаем замену $u = \operatorname{tg} t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ (иначе говоря, введем вместо неизвестной u новую неизвестную $t = \operatorname{arctg} u$). Тогда система (40) примет вид:

$$\begin{cases} v = \operatorname{tg} 2t, \\ w = \operatorname{tg} 4t, \\ u = \operatorname{tg} 8t, \\ u, v, w \neq 0. \end{cases} \tag{41}$$

Поскольку $u = \operatorname{tg} t$, третье уравнение системы (41) дает следующее уравнение для t:

$$\operatorname{tg} 8t = \operatorname{tg} t \Leftrightarrow \frac{\sin 7t}{\cos 8t \cos t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7t = 0, \\ \cos 8t \neq 0, \\ \cos t \neq 0. \end{cases}$$

Решение уравнения $\sin 7t = 0$ имеет бесконечно много корней, которые можно описать формулой $t_n = \frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$. Неравенству $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ удовлетворяют корни, соответствующие $n = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$. Для корня $t_0 = 0$ соответствующие значения переменных u, v, w равны 0, что противоречит условию $u, v, w \neq 0$. Для корней $t = \pm\frac{\pi}{7}, \pm\frac{2\pi}{7}, \pm\frac{3\pi}{7}$ соответствующие значения u, v, w отличны от 0. Для основных неизвестных x, y, z теперь имеем:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}\operatorname{tg} t, \frac{1}{3}\operatorname{tg} 2t, \operatorname{tg} 4t\right),$$

где

$$t = \pm\frac{\pi}{7}, \pm\frac{2\pi}{7}, \pm\frac{3\pi}{7}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg} t, \frac{1}{3}\operatorname{tg} 2t, \operatorname{tg} 4t\right)$, где $t = \pm\frac{\pi}{7}, \pm\frac{2\pi}{7}, \pm\frac{3\pi}{7}$. ■

□ **526.** Равенство $x^2 + y^2 = 1$ означает, что точка $(x; y)$ лежит на единичной окружности. Поэтому существует и притом однозначно определенное число α из промежутка $[0; 2\pi)$ такое, что $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$.

Теперь исходная задача сводится к доказательству неравенства

$$-\sqrt{2} \leqslant \cos\alpha + \sin\alpha \leqslant \sqrt{2}.$$

С помощью дополнительного аргумента сумма $\cos\alpha + \sin\alpha$ может быть записана как $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, так что требуемое неравенство следует из того, что $|\sin t| \leqslant 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$. ■

□ **530.** Перепишем систему, которой удовлетворяют переменные x, y, u, v в виде:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{u}{5}\right)^2 + \left(\frac{v}{5}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Эти равенства означают, что точки $\left(\frac{x}{3}; \frac{y}{3}\right)$ и $\left(\frac{u}{5}; \frac{v}{5}\right)$ лежат на единичной окружности. Поэтому существуют и притом однозначно определенные значения α и β из промежутка $[0; 2\pi)$ такие, что $\frac{x}{3} = \cos\alpha$, $\frac{y}{3} = \sin\alpha$, $\frac{u}{5} = \cos\beta$, $\frac{v}{5} = \sin\beta$.

Теперь исходная задача может быть переформулирована следующим образом.

При условии, что сумма

$$15(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \equiv 15\cos(\alpha - \beta)$$

минимальна, найти:

а) максимальное значение суммы $3\cos\alpha + 5\sin\beta$;

б) минимальное значение суммы $3\sin\alpha + 5\cos\beta$.

Но минимальное значение величины $15\cos(\alpha - \beta)$ равно -15; оно достигается при $\alpha = \beta + \pi + 2\pi n$ (n — некоторое целое число).

Тогда сумма $3\cos\alpha + 5\sin\beta$ равна $-3\cos\beta + 5\sin\beta$. Ее максимальное значение равно $\sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$.

Сумма $3\sin\alpha + 5\cos\beta$ равна $-3\sin\beta + 5\cos\beta$. Ее минимальное значение равно $-\sqrt{3^2+5^2} = -\sqrt{34}$.

Ответ: а) $\sqrt{34}$; б) $-\sqrt{34}$. ■

□ **531.** Ограничение $4x^2 + y^2 = 16$ напоминает уравнение окружности. Чтобы превратить его в уравнение, которое является уравнением окружности, разделим обе части на 16 и перепишем получившееся равенство в виде $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$.

Равенство $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ означает, что точка $\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{4}\right)$ лежит на единичной окружности. Каждой такой точке соответствует и притом только одно значение α из промежутка $[0; 2\pi)$ такое, что $\frac{x}{2} = \cos\alpha$, $\frac{y}{4} = \sin\alpha$, или, что то же самое, $x = 2\cos\alpha$, $y = 4\sin\alpha$.

Теперь задача может быть переформулирована следующим образом: *найти наибольшее значение выражения* $6\cos\alpha - 8\sin\alpha$ *при условии, что* $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Из курса тригонометрии известно, что область значений функции $f(\alpha) = a\sin\alpha + b\cos\alpha$ — это отрезок $[-\sqrt{a^2+b^2}; +\sqrt{a^2+b^2}]$. Поскольку $f(\alpha)$ периодична с периодом 2π, ограничение $\alpha \in [0; 2\pi)$ не меняет область значений.

В нашем случае $a = -8$, $b = 6$, так что $\sqrt{a^2+b^2} = 10$.

Ответ: 10. ■

□ **533.** Введем новые переменные a, b, c по формулам:

$$x = \operatorname{tg} a, \quad 0 < a < \frac{\pi}{2},$$

$$y = \operatorname{tg} b, \quad 0 < b < \frac{\pi}{2},$$

$$z = \operatorname{tg} c, \quad 0 < c < \frac{\pi}{2}.$$

Для этих переменных ограничение $xy + xz + yz = 1$ примет вид:

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \operatorname{tg}(a+b)$$

$$\Updownarrow$$

$$a + b + c = \frac{\pi}{2}.$$

Проведенные рассуждения означают, что *если* a, b, c — *положительные числа, то равенства* $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ *и* $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c = 1$ *равносильны.*

Далее, выражение $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ превратится в выражение

$$F(a) = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a} - \operatorname{tg} a = \frac{1-\sin a}{\cos a} = \frac{\left(\cos\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right).$$

Соответственно выражения $f(y) = \sqrt{1+y^2} - y$ и $f(z) = \sqrt{1+z^2} - z$ превратятся в выражения

$$F(b) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right),$$

$$F(c) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{c}{2}\right).$$

Числа $a' = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}$, $b' = \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}$, $c' = \frac{\pi}{4} - \frac{c}{2}$ — положительны (поскольку числа a, b, c меньше, чем $\frac{\pi}{2}$), и их сумма равна

$$\frac{3\pi}{4} - \frac{a+b+c}{2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому для их тангенсов верно равенство

$$\operatorname{tg} a' \operatorname{tg} b' + \operatorname{tg} a' \operatorname{tg} c' + \operatorname{tg} b' \operatorname{tg} c' = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$F(a)F(b) + F(a)F(c) + F(b)F(c) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x)\cdot f(y) + f(x)\cdot f(z) + f(y)\cdot f(z) = 1.$$

ОТВЕТ: это выражение равно 1. ■

□ **534.** С помощью тригонометрической подстановки $x = \operatorname{tg} t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ (что равносильно введению новой неизвестной $t = \operatorname{arctg} x$) функция $y = \frac{x}{x^2+1}$ превратится в функцию $y = \frac{1}{2}\sin 2t$ — теперь нужно находить ее область значений при изменении переменной t на интервале $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Из графика этой функции ясно, что искомая область значений — это отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

ОТВЕТ: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. ■

□ **535.** Поскольку

$$2\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x + \cos x,$$

исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin(3\cos x) = \frac{1}{2}.$$

Применяя общую формулу для решения уравнения вида $\sin x = a$, мы получим:

$$\cos x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{или} \quad \cos x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi m}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Равенство

$$\cos x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{42}$$

задает бесконечную совокупность уравнений вида $\cos x = a$. При конкретном значении переменной n мы получим конкретное уравнение, например значению $n = 0$ соответствует уравнение $\cos x = \frac{\pi}{18}$, значению $n = 1$ — уравнение $\cos x = \frac{13\pi}{18}$ и т. д. Таким образом, параметр n играет роль своеобразного номера конкретного уравнения из этой совокупности.

Эту бесконечную совокупность уравнений можно записать и в виде:

$$\ldots, \quad \cos x = -\frac{11\pi}{18}, \quad \cos x = \frac{\pi}{18}, \quad \cos x = \frac{13\pi}{18}, \quad \ldots$$

Найдем, какие из уравнений этой совокупности имеют непустое множество решений. Для этого решим двойное неравенство

$$-1 \leqslant \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{18+\pi}{12\pi} \leqslant n \leqslant \frac{18-\pi}{12\pi}.$$

Поскольку $\frac{18+\pi}{12\pi} \in (0;1)$, $\frac{18-\pi}{12\pi} \in (0;1)$, этому неравенству удовлетворяет только $n = 0$.

Итак, уравнения совокупности (42) с номерами $n \neq 0$ имеют пустое множество решений и поэтому не вносят вклада в множество решений этой совокупности. Иначе говоря, бесконечная совокупность уравнений (42) равносильна одному уравнению $\cos x = \frac{\pi}{18}$, решение которого имеет вид: $x = \pm \arccos\left(\frac{\pi}{18}\right) + 2\pi n$.

Аналогичные рассуждения показывают, что в бесконечной совокупности уравнений

$$\cos x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi m}{3}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

только уравнение с номером $m = 0$ имеет непустое множество решений.

Ответ: $\pm \arccos\left(\frac{\pi}{18}\right) + 2\pi n$; $\pm \arccos\left(\frac{5\pi}{18}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **549.** Исходное уравнение имеет вид:

$$\sin\alpha\cos\beta = 1.$$

Так же как и при решении задачи 482, превратим произведение $\sin\alpha\cos\beta$ в сумму $\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$. Тогда наше уравнение примет вид

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2$$

и ограниченность функции $y = \sin x$ приведет к системе

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = 1, \\ \sin(\alpha-\beta) = 1. \end{cases}$$

Для решаемой задачи эта система выглядит следующим образом

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(6x + 15\sqrt{x}\right)\right) = 1, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(2x - 13\sqrt{x}\right)\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 15\sqrt{x} = 4n + 1, & n \in \mathbb{Z}, \\ 2x - 13\sqrt{x} = 4m + 1, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

При конкретных значениях параметров n и m последняя система является системой двух уравнений с одной неизвестной x. Ее решениями будут значения x, которые являются корнями и первого, и второго уравнений одновременно.

Эти уравнения (и тем самым дальнейший анализ) можно упростить, если рассмотреть эту систему как линейную систему относительно x и $\sqrt{x}$ и решить ее:

$$\begin{cases} x = \dfrac{13n+15m+7}{27}, \\ \sqrt{x} = \dfrac{2n-6m-1}{27}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{43}$$

Эта система имеет решение тогда и только тогда, когда целочисленные параметры n и m удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{\frac{13n+15m+7}{27}} = \frac{2n-6m-1}{27}. \tag{44}$$

Таким образом, наша задача свелась к решению в целых числах уравнения (44).

Это уравнение имеет вид

$$\sqrt{\frac{N}{27}} = \frac{M}{27}, \tag{45}$$

где

$$N = 13n + 15m + 7, M = 2n - 6m - 1.$$

Поэтому мы прежде всего решим в целых числах уравнение (45).

Избавляясь от радикала и дробей, мы получим уравнение

$$3^3 N = M^2, N, \quad M \in \mathbb{Z}_+. \tag{46}$$

Отсюда следует, что для некоторого $p \in \mathbb{Z}_+$ верно равенство $M = 3^2 p$, откуда, в свою очередь, вытекает, что $N = 3p^2$. Обратно, целые числа $N = 3p^2$, $M = 3^2 p$, где $p \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяют уравнению (46).

Возвращаясь к переменным n и m, мы получим, что целые числа n и m являются решениями уравнения (44) тогда и только тогда, когда для некоторого $p \in \mathbb{Z}_+$ эти числа являются решениями системы

$$\begin{cases} 13n + 15m + 7 = 3p^2, \\ 2n - 6m - 1 = 9p. \end{cases} \tag{47}$$

В этом случае основная неизвестная x дается формулой:

$$x = \frac{N}{27} \equiv \frac{3p^2}{27} = \frac{p^2}{9}.$$

Чтобы решить систему (47), проанализируем делимость коэффициентов уравнений.

Начнем со второго уравнения. Его левая часть является нечетным числом. Поэтому и правая часть нечетна. Следовательно, число p — нечетное: $p = 2q + 1$ для некоторого $q \in \mathbb{Z}_+$. Это позволяет переписать второе уравнение системы (47) в виде:

$$n = 3m + 9q + 5.$$

Если числа m и q — целые, то n автоматически будет целым. Поэтому неизвестную n можно исключить. Теперь первое уравнение системы (47) примет вид:

$$18m = 4q^2 - 35q - 23.$$

Отсюда следует, что переменная q является нечетным числом: $q=2a+1$, где $a\in\mathbb{Z}_+$. В этом случае последнее уравнение примет вид:

$$9m=8a^2-27a-27.$$

Отсюда следует, что a^2 делится на 9, т. е. a делится на 3: $a=3k$, где $k\in\mathbb{Z}$. Это позволит произвести дальнейшее упрощение первого уравнения системы (47):

$$m=8k^2-9k-3.$$

Если число k — целое, то m автоматически будет целым. Это означает, что мы решили систему (47):

$$\begin{cases} m=8k^2-9k-3, \\ n=24k^2+27k+5, \quad k\in\mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Для основной неизвестной x мы имеем:

$$x=\frac{p^2}{9}=\frac{(2q+1)^2}{9}=\frac{(4a+3)^2}{9}=\frac{(12k+3)^2}{9}=(4k+1)^2.$$

Ответ: $x=(4k+1)^2$, $k\in\mathbb{Z}_+$. ■

□ **558.** Преобразуем уравнение к квадратному относительно $y=\cos x$:

$$2(2\cos^2 x-1)-4a\cos x+a^2+2=0\Leftrightarrow 4\cos^2 x-4a\cos x+a^2=0\Leftrightarrow(2\cos x-a)^2=0.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $\cos x=\frac{a}{2}$. Это уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда $\frac{a}{2}<-1$ или $\frac{a}{2}>1$.

Ответ: $a<-2; a>2$. ■

□ **559.** Введением дополнительного аргумента выражение $a\sin x+b\cos x$ можно преобразовать к виду

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

Поэтому область значений выражения $a\sin x+b\cos x$ — отрезок $\left[-\sqrt{a^2+b^2};\sqrt{a^2+b^2}\right]$. Это означает, что уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ имеет решение тогда и только тогда, когда

$$c\in\left[-\sqrt{a^2+b^2};\sqrt{a^2+b^2}\right].$$

Если $a=2$, $b=3$, то $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$, что немедленно дает ответ нашей задачи.

Отметим, что условие $c\in\left[-\sqrt{a^2+b^2};\sqrt{a^2+b^2}\right]$ можно записать в виде

$$|c|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow c^2\leqslant a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2-c^2\geqslant 0.$$

Итак, уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ имеет решение тогда и только тогда, когда величина $D=a^2+b^2-c^2$ неотрицательна. Поэтому число D может быть названо дискриминантом этого уравнения.

Ответ: $-\sqrt{13}\leqslant A\leqslant\sqrt{13}$. ■

□ **560.** Понижая степени в левой части, приведем уравнение к виду:

$$y^2+14y+17-32a=0, \tag{48}$$

где $y=\cos 4x$.

Дальнейшее решение будет зависеть от знака дискриминанта D квадратного уравнения (48). Поскольку $\frac{D}{4} = 32(a+1)$,

1) при $a < -1$ уравнение (48) не имеет корней. Соответственно, и исходное уравнение не имеет корней;
2) при $a = -1$ уравнение (48) имеет единственный корень $y = -7$. Поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $\cos 4x = -7$ и, значит, не имеет корней;
3) при $a > -1$ уравнение (48) имеет два корня: $y_1 = -7 - 4\sqrt{2(a+1)}$, $y_2 = -7 + 4\sqrt{2(a+1)}$. Соответственно, исходное уравнение распадается на два уравнения

$$\cos 4x = -7 - 4\sqrt{2(a+1)}, \qquad \cos 4x = -7 + 4\sqrt{2(a+1)}.$$

Число y_1, очевидно, меньше, чем -7. Поэтому первое из этих уравнений не имеет корней. Второе уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда

$$-1 \leqslant -7 + 4\sqrt{2(a+1)} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leqslant \sqrt{2(a+1)} \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leqslant a \leqslant 1.$$

Для этих a множество корней дается формулой

$$x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(-7 + 4\sqrt{2(a+1)}\right) + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: если $a \notin \left[\frac{1}{8}, 1\right]$, то $\varnothing$;
если $a \in \left[\frac{1}{8}, 1\right]$, то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(-7 + 4\sqrt{2(a+1)}\right) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **561.** Поскольку

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x\cos x,$$

для решения уравнения можно ввести новую неизвестную $y = \sin x + \cos x$. Она удовлетворяет уравнению

$$y^2 + 2y - (1 + 2a) = 0. \tag{49}$$

Область значений функции $f(x) = \sin x + \cos x \equiv \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ — отрезок $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Поэтому исходное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда квадратное уравнение (49) имеет хотя бы один корень на отрезке $-\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}$.

Для этого прежде всего необходимо, чтобы дискриминант этого уравнения был больше или равен нулю:

$$D \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant -1.$$

Для значений $a \geqslant -1$ график функции $g(y) = y^2 + 2y - (1 + 2a)$ — это парабола, симметричная относительно вертикальной прямой $y = -1$. Эта парабола пересекает ось Oy хотя бы в одной точке из отрезка $-\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}$ тогда и только тогда, когда

$$g(\sqrt{2}) \geqslant 0 \Leftrightarrow a \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2}.$$

Ответ: $-1 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2}$. ■

□ **562.** Прежде всего упростим уравнение; сумму двух последних членов в правой части превратим в произведение:

$$2(1+\cos 2x)^2 \cdot \bigl|\sin(2x+a)\bigr| = 2\cos 2x - 2\cos(4x+2a) - 2\cos(4x+2a)\cos(2x)$$

и заменим выражение $\cos(4x+2a)$ на $1-2\sin^2(2x+a)$:

$$2(1+\cos 2x)^2 \cdot \bigl|\sin(2x+a)\bigr| = 2\cos 2x - 2\bigl(1-2\sin^2(2x+a)\bigr) - 2\bigl(1-2\sin^2(2x+a)\bigr)\cos(2x).$$

Обращая внимание на повторяющиеся блоки $\cos 2x$ и $\bigl|\sin(2x+a)\bigr|$, введем новые переменные $u=\cos 2x$ и $v=\bigl|\sin(2x+a)\bigr|$. Для них исходное уравнение примет вид:

$$2(1+u)^2 v = 2u - 2(1-2v^2) - 2(1-2v^2)u \Leftrightarrow u^2 v + 2u(v-v^2) - (2v^2-v-1) = 0. \tag{50}$$

Его имеет смысл решать на множестве $u \in [-1;1]$, $v \in [0;1]$.

Если $v=0$, то это уравнение примет вид $1=0$, т. е. не имеет решений.

Если $v>0$, то это уравнение можно рассматривать как квадратное относительно одной неизвестной u. Если оно имеет решение, то

$$\frac{D}{4} \geqslant 0 \Leftrightarrow v(v-1)(v^2+v+1) \geqslant 0.$$

С учетом ограничения $0<v\leqslant 1$ мы получим единственную возможность: $v=1$.

Если $v=1$, то уравнение (50) примет вид:

$$u^2=0 \Leftrightarrow u=0.$$

Итак, уравнение (50) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $0\leqslant v\leqslant 1$: $(u;v)=(0;1)$. Соответственно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ |\sin(2x+a)| = 1. \end{cases}$$

Множество решений первого уравнения дается формулой $2x=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$. Следовательно, эта система, а вместе с ней и исходное уравнение, имеет решение тогда и только тогда, когда хотя бы для одного $m\in\mathbb{Z}$ верно равенство

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi m+a\right)\right| = 1.$$

С помощью формул приведения это равенство можно заменить равенством

$$|\cos a| = 1.$$

Оно верно тогда и только тогда, когда $a=\pi n$ для некоторого $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $a=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. ■

□ **574.** Пусть при некотором значении параметра a исходное уравнение имеет два корня, разница между которыми равна $\frac{3}{2}\pi$. Обозначим меньший из этих корней x. Тогда второй корень равен $x+\frac{3}{2}\pi$.

Тот факт, что эти числа являются корнями исходного уравнения, означает, что одновременно выполнены два равенства

$$\begin{cases} \sin 2x + 4a\sin x - \cos x - 2a = 0, \\ \sin 2\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) + 4a\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) - \cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) - 2a = 0, \end{cases} \tag{51}$$

т. е. число x является решением системы (51).

Обратно, если число x является решением системы (51), то (по определению решения системы) одновременно выполнены оба уравнения системы, т. е. при этом значении a как число x, так и число $x + \frac{3}{2}\pi$ будут корнями исходного уравнения. Иначе говоря, исходное уравнение имеет два корня, разница между которыми равна $\frac{3}{2}\pi$.

Поэтому, чтобы получить ответ, нужно просто установить, при каких значениях параметра a система (51) совместна.

Начнем решение этой новой задачи с того, что упростим уравнения системы. Для первого уравнения (т. е. фактически исходного уравнения) имеем:

$$\sin 2x + 4a\sin x - \cos x - 2a = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sin x\cos x + 4a\sin x - \cos x - 2a = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sin x(\cos x + 2a) - (\cos x + 2a) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(2\sin x - 1)(\cos x + 2a) = 0\,.$$

Поэтому первое уравнение системы (51) распадается на два уравнения:

$$\sin x = \frac{1}{2}\,, \qquad \cos x = -2a\,.$$

Второе уравнение системы (51) получается из первого уравнения заменой x на $x + \frac{3}{2}\pi$. Поэтому оно распадается на два уравнения:

$$\cos x = -\frac{1}{2}\,, \qquad \sin x = -2a\,.$$

Соответственно, система (51) распадается на четыре системы:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}\,, \\ \cos x = -\frac{1}{2}\,, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}\,, \\ \sin x = -2a\,, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = -2a\,, \\ \cos x = -\frac{1}{2}\,, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = -2a\,, \\ \sin x = -2a\,. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, так как из нее следует, что $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$.

Вторая система имеет решение тогда и только тогда, когда $-2a = \frac{1}{2}$, т. е. $a = -\frac{1}{4}$.

Третья система имеет решение тогда и только тогда, когда $-2a = -\frac{1}{2}$, т. е. $a = \frac{1}{4}$.

Четвертая система имеет решение тогда и только тогда, когда точка $(-2a; -2a)$ лежит на единичной окружности, т. е. $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Система (51) имеет решение тогда и только тогда, когда хотя бы одна из этих четырех систем имеет решение, т. е. для $a = -\frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{4}$, $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\pm\frac{1}{4}\,; \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$. ■

□ **576.** Нарисуем фигуру на координатной плоскости $(x;a)$, задаваемую уравнением
$$\sin^5(3x+a)=\cos(\pi\cdot[x]).$$
Для этого приведем это уравнение к виду $a=f(x)$.

Поскольку $[x]$ — число целое, правая часть уравнения равна $(-1)^{[x]}$. Извлекая из обеих частей корень 5-й степени, мы получим:
$$\sin(3x+a)=(-1)^{[x]}.$$
Решение этого уравнения дается формулой
$$3x+a=(-1)^{[x]}\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a=-3x+(-1)^{[x]}\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$
Для дальнейшего упрощения «раскроем квадратные скобки» (знак целой части числа) с помощью равенства
$$[x]=n,\ \text{если } n\leqslant x<n+1,\ \text{где } n\in\mathbb{Z}.$$
Поскольку по условию переменная x принимает значения из отрезка $[1;\pi]$, мы получим совокупность трех систем. Чтобы учесть все условия задачи, мы сразу включим в эти системы и ограничение на возможные значения параметра a. Кроме того, для сокращения записей мы не будем явно указывать, что $k\in\mathbb{Z}$:
$$\begin{cases}a=-3x-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 1\leqslant x<2,\\ 0\leqslant a\leqslant\pi,\end{cases}\qquad \begin{cases}a=-3x+\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 2\leqslant x<3,\\ 0\leqslant a\leqslant\pi,\end{cases}\qquad \begin{cases}a=-3x-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 3\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0\leqslant a\leqslant\pi.\end{cases}\tag{52}$$

Рассмотрим эти системы подробнее.

Уравнение $a=-3x-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ первой системы задает семейство параллельных прямых. Дополнительный целочисленный параметр k играет роль своеобразного «номера» прямой из этого семейства. Например, прямая с «номером» $k=0$ задается уравнением $a=-3x-\frac{\pi}{2}$, прямая с «номером» $k=1$ задается уравнением $a=-3x+\frac{3\pi}{2}$ и т. д. Неравенства $1\leqslant x<2$, $0\leqslant a\leqslant\pi$ первой системы задают на координатной плоскости $(x;a)$ прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат (без правой вертикальной стороны). Из рис. 6 ясно, что с этим прямоугольником пересекается только прямая с номером $k=1$, причем пересечением будет отрезок AB, где $A=\left(1;\frac{3\pi-6}{2}\right)$, $B=\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.

Для второй системы совокупности (52) аналогичный анализ дает, что из бесконечного семейства параллельных прямых $a=-3x+\frac{\pi}{2}+2\pi k$ с прямоугольником $2\leqslant x<3$, $0\leqslant a\leqslant\pi$ пересекается только прямая с номером $k=1$, причем пересечением будет отрезок CD, где $C=\left(2;\frac{5\pi-12}{2}\right)$, $D=\left(\frac{5\pi}{6};0\right)$.

Для третьей системы совокупности (52) аналогичный анализ дает, что из бесконечного семейства параллельных прямых $a=-3x-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ с прямоугольником $3\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant a\leqslant\pi$ пересекается только прямая с номером $k=2$, причем пересечением будет отрезок EF, где $E=\left(3;\frac{7\pi-18}{2}\right)$, $F=\left(\pi;\frac{\pi}{2}\right)$.

Итоговая фигура изображена на рис. 7. На этом рисунке мы намеренно исказили масштаб с тем, чтобы яснее показать взаимное расположение точек.

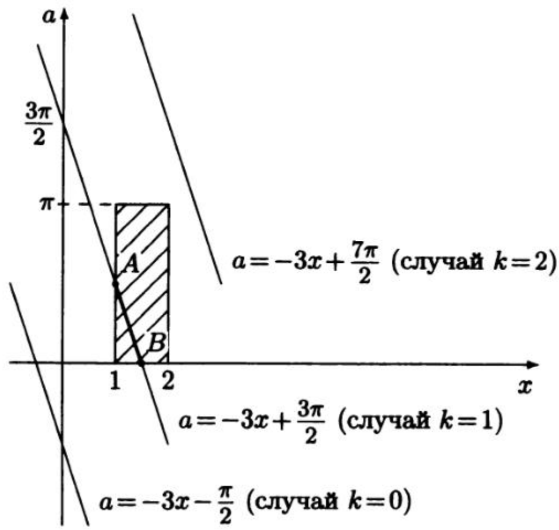


Рис. 6

Теперь начнем решать нашу исходную задачу с параметром. Ключевым является следующее соображение: при данном значении параметра a множество решений исходного уравнения является проекцией на ось абсцисс точек пересечения горизонтальной прямой, проведенной на высоте a, с фигурой, изображенной на рис.7. Эту горизонтальную прямую удобно мыслить как движущуюся ось Ox. Тогда ее пересечение с вышеупомянутой фигурой непосредственно дает множество решений исходного уравнения.

Поэтому из рис.7 очевидно, что наша задача имеет нечетное число решений при $a \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi-6}{2}\right]$ и $a \in \left(\frac{5\pi-12}{2}\,;\,\frac{7\pi-18}{2}\right]$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{3\pi-6}{2}$, $\frac{5\pi-12}{2} < a \leqslant \frac{7\pi-18}{2}$. ■

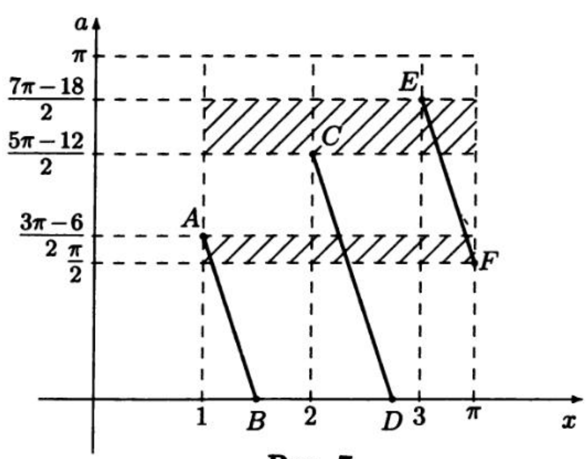


Рис. 7

□ **584.** Прежде всего обозначим выражение $\operatorname{tg}|b|$ через a, так что наше уравнение примет вид:

$$a = \log_2(\cos x - |x|). \tag{53}$$

Неизвестная x входит в это уравнение через две четные функции: $y = \cos x$ и $y = |x|$. Поэтому оно не изменится, если x заменить на $(-x)$. Действительно, подстановка на место x выражения $(-x)$ приведет к уравнению

$$a = \log_2(\cos(-x) - |-x|),$$

которое в силу тождеств $\cos(-x) = \cos x$, $|-x| = x$, идентично исходному уравнению (53).

Из этого свойства *инвариантности* (неизменности) уравнения (53) относительно преобразования $x \to (-x)$ (стрелка «$\to$» означает «заменить на») вытекает, что если какое-то число x_0 является корнем уравнения (53), то и число $(-x_0)$ также будет корнем.

Поэтому множество корней уравнения (53) (назовем это множество M_a; индекс «a» указывает на зависимость от параметра) может быть:

1) пустым (иначе говоря, уравнение (53) не имеет корней);

2) иметь вид $\{x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots\}$, где $x_1, x_2, \dots$ — различные положительные числа;

3) иметь вид $\{0, x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots\}$, где $x_1, x_2, \dots$ — различные положительные числа.

В двух последних случаях мы не утверждаем, что множество M_a конечно или счетно. Использованная запись лишь подчеркивает симметрию этого множества относительно нуля. Однако если M_a — конечно, то во втором случае корней четное количество, а в третьем — нечетное.

Третий случай можно разбить на два подслучая:

а) когда числа $x_1, -x_1, \dots$ действительно присутствуют, так что если M_a — конечно, то оно содержит нечетное число элементов, большее 1;

б) когда числа $x_1, -x_1, \dots$ на самом деле отсутствуют, так что если M_a — одноэлементное множество $\{0\}$ (иначе говоря, уравнение (53) имеет единственный корень $x_0 = 0$).

Поэтому уравнение (53) имеет единственный корень только в третьем случае, когда среди корней присутствует число $x_0 = 0$. При этом не исключено наличие и других корней. Но важнее то, что если среди корней нет числа 0, то множество M_a не может быть одноэлементным.

Найдем, при каких значениях параметра a число 0 является корнем уравнения (53). Для этого подставим число 0 на место неизвестной:

$$a = \log_2(\cos 0 - |0|) \Leftrightarrow a = 0.$$

Итак, уравнение (53) может иметь единственный корень только для $a = 0$, и этим единственным корнем может быть только число 0. Еще раз подчеркнем, что это не исключает наличие и других корней; важно лишь то, что для значений параметра a, отличных от 0, уравнение (53) не может иметь единственный корень.

Для завершения решения задачи достаточно выяснить, сколько корней имеет уравнение (53) для «подозрительного» значения параметра.

Если $a = 0$, то уравнение (53) примет вид:

$$\log_2(\cos x - |x|) \Leftrightarrow \cos x = 1 + |x|.$$

Последнее уравнение практически не отличается от уравнения, которое предлагалось решить в задаче 474; дословное повторение рассуждений, проведенных при решении этой задачи, показывает, что наше уравнение имеет единственный корень $x = 0$. Поэтому проверяемое значение параметра a удовлетворяет условию задачи.

В ответ нужно включить соответствующее значение параметра b:

$$\operatorname{tg}|b| = 0 \Leftrightarrow b = \pm\pi k, k = 0, 1, 2, \dots \Leftrightarrow b = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $b = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **585.** Выражение $\frac{2x}{1+x^2}$, которое встречается в показателе степени в исходном уравнении

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a \cdot \cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0, \tag{54}$$

по своей структуре напоминает известную формулу из тригонометрии

$$\sin t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}.$$

Поскольку функция $x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $x \in (-\infty; +\infty)$ и $t \in (-\pi; \pi)$, естественно применить для упрощения нашего уравнения тригонометрическую подстановку $x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $t \in (-\pi; \pi)$ (или, что то же самое, ввести новую неизвестную $t = 2\operatorname{arctg} x$). Имея в виду область определения уравнения (54) ($x \neq 0$), дополнительно нужно потребовать, чтобы $t \neq 0$.

Конечно, эта тригонометрическая подстановка будет иметь смысл, только если упростится выражение $\frac{x^2-1}{x}$. Это выражение после замены x на $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ примет вид:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} - 1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{t}{2} - \cos^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}} : \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} = -2\operatorname{ctg} t.$$

Теперь исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{\sin t} + a \cdot \cos(2\operatorname{ctg} t) + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \tag{55}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$-\pi < t < 0 \text{ *или* } 0 < t < \pi. \tag{56}$$

Уравнение (55), очевидно, инвариантно относительно замены переменной t на $t + 2\pi$, но эта замена не сохраняет неизменными условия (56): точка $t + 2\pi$ удовлетворяет условиям $\pi < t + 2\pi < 2\pi$ или $2\pi < t + 2\pi < 3\pi$.

В качестве альтернативы рассмотрим преобразование $t \to \pi - t$. Оно не меняет вид уравнения (55) и, кроме того, в случае, когда $t \in (0; \pi)$, можно утверждать, что и $\pi - t \in (0; \pi)$. Однако если $t \in (-\pi; 0)$, то $\pi - t \in (\pi; 2\pi)$. Поэтому в случае $t \in (-\pi; 0)$ мы рассмотрим преобразование $t \to -\pi - t$. Оно, очевидно, не меняет уравнение (55) и сохраняет условие (56).

Итак, задача (55)–(56) инвариантна относительно замены t на функцию $g(t)$, которая дается формулой

$$g(t) = \begin{cases} \pi - t, & \text{если } 0 < t < \pi, \\ -\pi - t, & \text{если } -\pi < t < 0. \end{cases}$$

Отметим, что этой инвариантности соответствует инвариантность исходного уравнения (54) относительно преобразования $x \to \frac{1}{x}$.

Это означает, что если x_0 — единственный корень уравнения (54), то $x_0 = \frac{1}{x_0}$, т. е. $x_0 \in \{+1; -1\}$. В принципе мы можем вернуться к рассмотрению уравнения (54), т. е. к переменной x. Мы предлагаем читателю пройти этот путь и преодолеть все возникающие технические трудности, а сами будем анализировать систему (55)–(56) для переменной t.

Если задача (55)–(56) имеет единственное решение t_0, то должно быть выполнено равенство $t_0 = g(t_0)$. Это уравнение имеет два корня: $t_0 = \frac{\pi}{2}$ и $t_0 = -\frac{\pi}{2}$.

Число $\frac{\pi}{2}$ является корнем уравнения (55) тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет соотношению

$$2 + a + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow a^2 + a + \frac{3}{4} = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения отрицателен, так что ни при одном значении параметра число $\frac{\pi}{2}$ не будет корнем уравнения (55).

Число $-\frac{\pi}{2}$ является корнем уравнения (55) тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2} + a + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow a^2 + a - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ или } -\frac{3}{2}.$$

Найдем теперь количество решений задачи (55)–(56) для двух «подозрительных» значений параметра a, $a = \frac{1}{2}$ и $a = -\frac{3}{2}$.

1. Если $a = \frac{1}{2}$, то уравнение (55) примет вид

$$\cos(2\operatorname{ctg} t) = 2 - 2^{1+\sin t}. \tag{57}$$

Будем решать его графически.

Функцию $y(t) = \cos(2\operatorname{ctg} t)$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y(u) = \cos u$ и $u(t) = 2\operatorname{ctg} t$. При изменении t от $-\pi$ до 0 функция $u(t)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Соответственно, функция $y(t)$ совершает бесконечное число колебаний от -1 до $+1$; при этом $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Для $t \in (0; \pi)$ в силу четности функции $y(t)$ ситуация аналогична.

Функцию $y(t) = 2 - 2^{1+\sin t}$ можно рассматривать как суперпозицию функций $y(u) = 2 - 2^{1+u}$ и $u(t) = \sin t$. График функции $y(u)$ получается из графика стандартной показательной функции 2^u переносом на 1 влево, осевой симметрией относительно оси Ox, переносом на 2 вверх. Поэтому при изменении переменной t от $-\pi$ до π функция $y(t)$ сначала возрастает от $y(-\pi) = 0$ до $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$, затем убывает от $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ до $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$, и затем опять возрастает от $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$ до $y(\pi) = 1$.

Поэтому уравнение (57) имеет бесконечно много корней на множестве $(-\pi;0)\cup(0;\pi)$, так что проверяемое значение параметра не включается в ответ.

2. Если $a=-\frac{3}{2}$, то уравнение (55) примет вид

$$\cos(2\operatorname{ctg} t)=\frac{1}{3}\left(2+2^{1+\sin t}\right). \tag{58}$$

При $t\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$ функция $y=\cos(2\operatorname{ctg} t)$ принимает значения из отрезка $[-1;1]$, а функция $y=\frac{1}{3}\left(2+2^{1+\sin t}\right)$ — из множества $[1;2]\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}$. Поэтому уравнение (58) равносильно системе

$$\begin{cases}\cos(2\operatorname{ctg} t)=1,\\ \frac{1}{3}\left(2+2^{1+\sin t}\right)=1.\end{cases}$$

Второе уравнение этой системы имеет единственный корень, удовлетворяющий условию (56): $t=-\frac{\pi}{2}$. Этот корень является и корнем первого уравнения системы. Таким образом, уравнение (58) имеет единственный корень, удовлетворяющий условию (56), так что проверяемое значение параметра включается в ответ.

Ответ: $a=-\frac{3}{2}$. ■

Решения к главе 4

□ **607.** Из первого уравнения исключим $\sin y$:

$$\sin y=\frac{-11-3x}{4}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, мы получим одно уравнение с одной неизвестной x:

$$-2x+5\cdot\frac{-11-3x}{4}=\frac{7}{2}.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x=-3$.

Теперь найдем значение неизвестной y:

$$\sin y=\frac{-11-3\cdot(-3)}{4}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(-3;(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. ■

□ **612.** Из первого уравнения исключим неизвестную y:

$$y=\frac{\pi}{4}-x.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, мы получим одно уравнение с одной неизвестной x:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1.$$

Для решения этого уравнения введем новую неизвестную $t=\operatorname{tg} x$:

$$t+\frac{1-t}{1+t}=1\Leftrightarrow\begin{cases}t^2=t,\\ t+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow t=0;1.$$

Отметим, что замена $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ на $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=\frac{1-t}{1+t}$ законна, так как из исходного уравнения следует, что $\operatorname{tg} x$ существует.

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим два уравнения: $\operatorname{tg} x = 0$ и $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $x = \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, соответственно.

Теперь можно определить значение исключенной неизвестной y. Если $x = \pi n$, то $y = \frac{\pi}{4} - \pi n$; если $x = \frac{\pi}{4} + \pi m$, то $y = -\pi m$. Итак, множество решений исходной системы состоит из двух серий пар $(x; y)$:

$$(x; y) = \left(\pi n; \frac{\pi}{4} - \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$(x; y) = \left(\frac{\pi}{4} + \pi m; -\pi m\right), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Особо подчеркнем, что в формуле для x и *соответствующего ему* значения y должна стоять *одна и та же* переменная n (или m соответственно). Если употребить разные буквы, то серия будет задавать на координатной плоскости множество точек, напоминающее двумерную целочисленную решетку, в то время как из первого уравнения исходной системы вытекает, что все решения должны располагаться на прямой $y = \frac{\pi}{4} - x$.

В разных сериях пар $(x; y)$ в принципе можно употреблять одну и ту же переменную, т. е. вместо m использовать n, но экзаменаторы обычно требуют, чтобы в никак не связанных между собой сериях для нумерации решений использовались разные целочисленные параметры.

Ответ: $\left(\pi n; \frac{\pi}{4} - \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\left(\frac{\pi}{4} + \pi m; -\pi m\right)$, $m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **613.** Из второго уравнения исключим неизвестную y:

$$y = \frac{\pi}{4} - x.$$

Подставляя это выражение в первое уравнение, мы получим одно уравнение с одной неизвестной x:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Для его решения введем новую неизвестную $t = \operatorname{tg} x$:

$$t \cdot \frac{1-t}{1+t} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} t^2 - 2(\sqrt{6} - 2)t + 5 - 2\sqrt{6} = 0, \\ t + 1 \neq 0. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$t_1 = \sqrt{6} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{2}; t_2 = \sqrt{6} + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{3}.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим два уравнения:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{6} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = \sqrt{6} + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{3}.$$

Их решения даются формулами

$$x = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{2}) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

и

$$x = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{3}) + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

соответственно.

Теперь можно определить значение исключенной неизвестной y. Для первой серии значений x соответствующие значения y даются формулой

$$y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(\sqrt{6} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{2}) - \pi n,$$

а для второй — формулой

$$y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(\sqrt{6} + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{3}) - \pi m.$$

При всей громоздкости, полученные формулы дают вполне удовлетворительный ответ задачи (в том виде, как она была поставлена). Однако если бы требовалось провести дальнейший анализ множества решений (например, отобрать решения, удовлетворяющие определенным условиям), то от полученных формул было бы мало пользы.

С этой точки зрения предпочтительнее был бы другой метод решения исходной системы. Он заключается в следующем.

Преобразуем левую часть первого уравнения системы:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)}.$$

Используя второе уравнение, мы теперь можем переписать первое уравнение в виде:

$$\frac{\cos(x-y) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\cos(x-y) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 5 - 2\sqrt{6},$$

откуда

$$\cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Это уравнение распадается на две бесконечные совокупности уравнений

$$x - y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Соответственно, исходная система распадается на две бесконечные совокупности систем:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Эти линейные системы легко решаются почленным сложением и вычитанием уравнений, что дает две серии пар $(x; y)$:

$$\left(\frac{5\pi}{24} + \pi n; \frac{\pi}{24} - \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

и

$$\left(\frac{\pi}{24} + \pi m; \frac{5\pi}{24} - \pi m\right), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

соответственно.

В принципе ответ в этом виде можно было бы получить и при первом методе решения, если сообразить (или знать — см. задачу 9), что

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24} = \operatorname{tg} 37^\circ 30' = \sqrt{6} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} = \operatorname{tg} 7^\circ 30' = \sqrt{6} + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{3}.$$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{24} + \pi n; \frac{\pi}{24} - \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; $\left(\frac{\pi}{24} + \pi m; \frac{5\pi}{24} - \pi m\right)$, $m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **614.** Из первого уравнения исключим неизвестную y:

$$y = -\frac{\pi}{3} - x.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, мы получим одно уравнение с одной неизвестной x:

$$4\cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 1 = 0.$$

С помощью тождества

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

это уравнение превратится в простейшее тригонометрическое уравнение:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = -1.$$

Множество его корней дается формулой $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теперь можно определить значение исключенной неизвестной y: $y = -\frac{2\pi}{3} - \pi n$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; -\frac{2\pi}{3} - \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **615.** Во втором уравнении системы заменим $\operatorname{tg} x$ на $\frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} y$ на $\frac{\cos y}{\sin y}$:

$$3\,\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Избавляясь от дробей и используя первое уравнение исходной системы, получим уравнение

$$\cos x \cos y = \frac{3}{4}.$$

Теперь исходная система примет вид:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Поскольку из этой системы следует, что $\sin y$ и $\cos x$ отличны от 0, проделанные преобразования равносильны.

Складывая и вычитая уравнения последней системы, мы получим равносильную ей систему

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos(x+y) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Первое уравнение распадается на бесконечную совокупность уравнений $x - y = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а второе уравнение — на две бесконечные совокупности: $x + y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $x + y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Соответственно, исходная система распадается на две бесконечные совокупности систем (системы из этих совокупностей занумерованы парами целых чисел $(n;k)$):

$$\begin{cases} x-y=2\pi n, \\ x+y=\frac{\pi}{3}+2\pi k, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=2\pi n, \\ x+y=-\frac{\pi}{3}+2\pi k. \end{cases}$$

Каждая из этих систем является линейной относительно основных неизвестных x, y и мгновенно решается почленным сложением и вычитанием уравнений.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k+n), \frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right), \left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n), -\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right), k,n\in\mathbb{Z}$. ■

□ **616.** Так же как и при решении задачи (615), сложим и вычтем уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(x-y)=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Первое уравнение распадается на бесконечную совокупность уравнений $x+y=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, а второе уравнение — на две бесконечные совокупности: $x-y=\frac{\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, и $x-y=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$. Соответственно, исходная система распадается на две бесконечные совокупности систем (системы из этих совокупностей занумерованы парами целых чисел $(n;m)$):

$$\begin{cases} x+y=\pi n\,, \\ x-y=\frac{\pi}{6}+2\pi m\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\pi n\,, \\ x-y=\frac{5\pi}{6}+2\pi m\,. \end{cases}$$

Каждая из этих систем является линейной относительно основных неизвестных x, y и мгновенно решается почленным сложением и вычитанием уравнений. В итоге мы получим две серии пар $(x;y)$, занумерованных парами целых чисел $(n;m)$:

$$(x;y)=\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}(n+2m), -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}(n-2m)\right),$$
$$(x;y)=\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{2}(n+2m), -\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{2}(n-2m)\right).$$

Теперь нужно отобрать те пары, которые удовлетворяют условиям

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Для первой серии решений эти условия дадут следующие неравенства для параметров m и n:

$$\begin{cases} -\frac{7}{6}\leqslant n+2m\leqslant\frac{5}{6}\,, \\ -\frac{5}{6}\leqslant n-2m\leqslant\frac{7}{6}\,. \end{cases}$$

Поскольку числа $n+2m$, $n-2m$ — целые, первое неравенство системы равносильно совокупности из двух уравнений: $n+2m=-1$ и $n+2m=0$, а второе — совокупности из двух уравнений: $n-2m=0$ и $n-2m=1$. Соответственно, вся система превратится в совокупность четырех систем:

$$\begin{cases} n+2m=-1\,, \\ n-2m=0\,, \end{cases} \quad \begin{cases} n+2m=-1\,, \\ n-2m=1\,, \end{cases} \quad \begin{cases} n+2m=0\,, \\ n-2m=0\,, \end{cases} \quad \begin{cases} n+2m=0\,, \\ n-2m=1\,. \end{cases}$$

Из этих систем только третья имеет решение в целых числах: $(n,m)=(0,0)$. Этой паре $(n;m)$ соответствует пара $(x;y)=\left(\frac{\pi}{12}\,,-\frac{\pi}{12}\right)$.

Для второй серии решений неравенства для параметров m и n аналогичны:

$$\begin{cases} -\frac{11}{6} \leqslant n+2m \leqslant \frac{1}{6}\,, \\ -\frac{1}{6} \leqslant n-2m \leqslant \frac{11}{6}\,. \end{cases}$$

Эта система равносильна тому, что $n+2m=0$, $n-2m=0$. Отсюда $n=0$, $m=0$. Этой паре $(n;m)$ соответствует пара $(x;y)=\left(\frac{5\pi}{12}\,,-\frac{5\pi}{12}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{12}\,,-\frac{\pi}{12}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{12}\,,-\frac{5\pi}{12}\right)$. ■

□ **618.** Начнем с упрощения уравнений системы.

Первое уравнение распадается на бесконечную совокупность линейных уравнений

$$3x=\frac{y-5}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Целочисленный параметр n играет роль номера конкретного уравнения из этой совокупности. Чтобы это преобразование было равносильным, нужно сохранить условие существования $\operatorname{tg}3x$ ($\operatorname{tg}\frac{y-5}{2}$ тогда существует автоматически), например, в виде $\cos 3x\neq 0$.

Для упрощения второго уравнения упростим логарифмические члены:

$$4^{3\log_8\sqrt{y}}=2^{2\log_2\sqrt{y}}=2^{\log_2 y}=y.$$

Чтобы упростить два оставшихся члена, рассмотрим их разность

$$3\log_{\frac{4x}{\pi}}\sqrt[3]{\frac{\pi^2 x}{16}}-\frac{3}{4}\log_{\sqrt[4]{\frac{4x}{\pi}}}\left(\frac{4x^2}{\pi}\right)$$

и перейдем к одному основанию $a=\frac{4x}{\pi}$. Тогда эта разность будет равна

$$\log_a\frac{\pi^2 x}{16}-\log_a\left(\frac{4x^2}{\pi}\right)^3=\log_a\frac{\pi^5}{1024x^5}=\log_a a^{-5}=-5.$$

Таким образом, второе уравнение сведется к уравнению $2x-5=-y$. Чтобы проделанные преобразования были равносильными, нужно сохранить условия $y>0$, $x>0$, $x\neq\frac{\pi}{4}$, гарантирующие существование членов, которые мы упрощали.

Итак, исходная система распадается на бесконечную совокупность систем, занумерованных целочисленным параметром n:

$$\begin{cases} 3x = \dfrac{y-5}{2} + \pi n, \\ 2x - 5 = -y, \\ y > 0, \\ x > 0, \\ x \neq \dfrac{\pi}{4}, \\ \cos 3x \neq 0. \end{cases}$$

Два первых уравнения образуют линейную систему относительно основных неизвестных x, y. Для каждого n она имеет единственное решение $(x; y) = \left(\dfrac{\pi n}{4}; 5 - \dfrac{\pi n}{2}\right)$. Оставшиеся условия дают следующую систему для параметра n:

$$\begin{cases} 5 - \dfrac{\pi n}{2} > 0, \\ \dfrac{\pi n}{4} > 0, \\ \dfrac{\pi n}{4} \neq \dfrac{\pi}{4}, \\ \cos \dfrac{3\pi n}{4} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n < \dfrac{10}{\pi}, \\ n > 0, \\ n \neq 1, \\ \cos \dfrac{3\pi n}{4} \neq 0. \end{cases}$$

Два первых неравенства дают три возможных значения параметра n: 1, 2, 3. Двум оставшимся условиям удовлетворяет только $n = 3$, которому соответствует единственное решение исходной системы: $x = \dfrac{3\pi}{4}$, $y = 5 - \dfrac{3\pi}{2}$.

ОТВЕТ: $\left(\dfrac{3\pi}{4}; 5 - \dfrac{3\pi}{2}\right)$. ■

□ **619.** Первое уравнение системы равносильно бесконечной совокупности уравнений

$$(x - \sqrt{\pi})^2 + y^2 = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если параметр n отрицателен, то соответствующее уравнение имеет пустое множество решений, так что ниже мы будем считать, что $n \geqslant 0$.

Второе уравнение можно упростить, если ввести новую неизвестную $z = \sqrt{\log_{2\pi}(x^2 + y^2)}$. Для нее это уравнение примет вид:

$$z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ или } -2.$$

Поэтому второе уравнение распадется на два уравнения:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{\log_{2\pi}(x^2 + y^2)} = 1 & \qquad & \sqrt{\log_{2\pi}(x^2 + y^2)} = -2 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x^2 + y^2 = 2\pi\,; & & \varnothing\,. \end{array}$$

Таким образом, исходная система равносильна бесконечной совокупности систем, пронумерованных неотрицательными целыми числами n:

$$\begin{cases} (x - \sqrt{\pi})^2 + y^2 = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}_+\,, \\ x^2 + y^2 = 2\pi\,. \end{cases}$$

Продолжим упрощение нашей системы, возведя в квадрат первое слагаемое в левой части первого уравнения:

$$\begin{cases} x^2 - 2\sqrt{\pi}x + \pi + y^2 = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ , \\ x^2 + y^2 = 2\pi . \end{cases}$$

Второе уравнение позволяет заменить в первом уравнении сумму членов x^2 и y^2 числом 2π:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\pi}\dfrac{3-n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ , \\ x^2 + y^2 = 2\pi . \end{cases}$$

По условию нас интересуют только решения, для которых $x > 0$. Поэтому в первом уравнении параметр n может принимать только значения 0, 1, 2, т. е. первое уравнение превратится в совокупность из трех уравнений: $x = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{2}$, $x = \sqrt{\pi}$, $x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Во всех трех случаях условие $x > 0$ выполнено, так что дальше его можно не учитывать.

Теперь из второго уравнения можно определить y.

Если $x = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{2}$, то это уравнение примет вид: $y^2 = -\dfrac{\pi}{4}$ — оно не имеет корней.

Если $x = \sqrt{\pi}$, то это уравнение примет вид: $y^2 = \pi$ — оно имеет два корня: $y = \sqrt{\pi}$, $y = -\sqrt{\pi}$.

Если $x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, то это уравнение примет вид: $y^2 = \dfrac{7\pi}{4}$ — оно имеет два корня: $y = \dfrac{\sqrt{7\pi}}{2}$, $y = -\dfrac{\sqrt{7\pi}}{2}$.

Ответ: $(\sqrt{\pi}; \sqrt{\pi})$, $(\sqrt{\pi}; -\sqrt{\pi})$, $\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \dfrac{\sqrt{7\pi}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}, -\dfrac{\sqrt{7\pi}}{2}\right)$. ■

□ **620.** Поскольку правая часть первого уравнения равна $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi x\right)$, из этого уравнения следует, что

$$y = x + \frac{1}{4} + n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если сохранить условия, гарантирующие существование $\operatorname{tg}\pi x$ и $\operatorname{tg}\pi y$ (например, условия $\cos\pi x \neq 0$, $\cos\pi y \neq 0$), то это преобразование будет равносильным.

Таким образом, исходная система равносильна бесконечной совокупности систем, занумерованных целочисленным параметром n:

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{1}{4} + n, \\ 2x^2 + y^2 = \dfrac{3}{8}, \\ \cos\pi x \neq 0, \\ \cos\pi y \neq 0. \end{cases}$$

Исключая из первого уравнения неизвестную y, мы превратим второе уравнение в квадратное уравнение относительно одной неизвестной x:

$$48x^2 + 8(4n+1)x + (16n^2 + 8n - 5) = 0. \tag{59}$$

Его дискриминант дается формулой

$$\frac{D}{4} = -256(2n^2 + n - 1).$$

Это квадратное уравнение имеет непустое множество корней тогда и только тогда, когда

$$2n^2 + n - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant n \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = 0; -1\,.$$

В случае $n = 0$ уравнение (59) примет вид:

$$48x^2 + 8x - 5 = 0.$$

Оно имеет два корня: $x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = -\frac{5}{12}$. Соответствующие значения y равны (с учетом того, что $n = 0$) $y_1 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = -\frac{1}{6}$.

В случае $n = -1$ уравнение (59) примет вид:

$$16x^2 - 8x + 1 = 0.$$

Оно имеет один корень $x_3 = \frac{1}{4}$. Соответствующее значение y равно (с учетом того, что $n = -1$) $y_3 = -\frac{1}{2}$.

Из трех найденных пар $(x; y)$ условиям $\cos \pi x \neq 0$, $\cos \pi y \neq 0$ удовлетворяет только одна: $\left(-\frac{5}{12}; -\frac{1}{6}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{5}{12}; -\frac{1}{6}\right)$. ■

□ **623.** Начнем решение с преобразования первого уравнения.

Прежде всего превратим произведение в левой части в сумму тригонометрических функций:

$$\cos 2x - \cos(2x + 2y) = \cos 2x.$$

После сокращения члена $\cos 2x$ мы получим уравнение

$$\cos(2x + 2y) = 0,$$

которое распадается на бесконечное число линейных уравнений

$$2x + 2y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Целочисленный параметр n является номером конкретного уравнения из этой совокупности.

Дальнейшее решение для всех значений n проводится по одной схеме. Исключим неизвестную y: $2y = -2x + \frac{\pi}{2} + \pi n$. Тогда второе уравнение исходной системы превратится в уравнение относительно одной неизвестной x:

$$\sin 2x - (-1)^n \cos 2x = \sqrt{2}.$$

Его легко можно решить с помощью метода дополнительного аргумента:

$$\sin\left(2x - (-1)^n \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$2x - (-1)^n \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}\,.$$

Теперь можно восстановить исключенную неизвестную y:

$$y = -(-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} - \pi m.$$

Окончательный ответ будет выглядеть немного красивее, если мы разобьем возможные значения параметра n на две группы: четных ($n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$) и нечетных ($n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$), а затем введем дополнительный параметр $l = k - m$.

ОТВЕТ: $\left(\frac{3\pi}{8} + \pi m; -\frac{\pi}{8} + \pi l\right)$, $\left(\frac{\pi}{8} + \pi m; \frac{5\pi}{8} + \pi l\right)$, $m, l \in \mathbb{Z}$. ■

□ **624.** Перепишем первое уравнение в виде $\cos x = -2\sin x \sin y$ и заменим с его помощью множитель $\cos x$ в левой части второго уравнения:

$$1 - 2\sin^2 y \sin x = 2\cos^2 y \sin x$$

$$\Updownarrow$$

$$1 = 2(\sin^2 y + \cos^2 y)\sin x$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin x = \frac{1}{2}\ .$$

Последнее уравнение имеет две серии корней: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для первой серии первое уравнение исходной системы примет вид:

$$\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

откуда

$$y = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{3} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Для второй серии первое уравнение исходной системы примет вид:

$$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

откуда

$$y = (-1)^m \frac{\pi}{3} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; (-1)^{m+1}\frac{\pi}{3} + \pi m\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; (-1)^m \frac{\pi}{3} + \pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **625.** Сложим уравнения и сохраним (для равносильности преобразования) первое уравнение:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos(x+y)} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x + \cos y = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение полученной системы можно переписать в виде

$$\cos y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда $y = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ или $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\cos(x + y) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 0$, т. е. знаменатель дроби в левой части первого уравнения обращается в 0. Значит, эта возможность исключена.

Если $y = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то первое уравнение примет вид:

$$\frac{\sin x}{\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{2}, \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь можно восстановить исключенную неизвестную y: $y = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi(n + k)$. Для более компактной записи ответа удобно ввести новый целочисленный параметр $m = n + k$.

ОТВЕТ: $\left(\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **626.** Из первого уравнения исключим y: $y = \frac{2}{x}$. Тогда второе уравнение превратится в уравнение с двумя неизвестными x и z:

$$(-x) + \frac{4}{-x} = 3 + \sin z.$$

Будем решать его методом оценок.

Правая часть этого уравнения меняется в промежутке $[2; 4]$. Значит, $-x > 0$. Применяя неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического двух положительных чисел $a = -x$, $b = \frac{4}{-x}$, мы получим, что левая часть уравнения больше или равна 4. Поэтому равенство левой и правой частей возможно тогда и только тогда, когда

$$3 + \sin z = 4 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

и одновременно

$$-x = \frac{4}{-x},$$

что с учетом условия $-x > 0$ дает $x = -2$.

Теперь можно восстановить исключенную неизвестную y: $y = -1$.

ОТВЕТ: $(-2; -1; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **627.** Условие задачи означает, что для некоторого натурального n верны равенства

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = n, \\ \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = n+1, \\ \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = n+2. \end{cases}$$

Поскольку $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, один из углов, скажем γ, можно исключить. В итоге мы получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = n, \\ \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = n+1, \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) = n+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{n}, \\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{n+1}, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = n+2. \end{cases}$$

С помощью формулы для тангенса суммы двух углов третье уравнение приводится к виду:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = n+2.$$

Исключая из двух первых уравнений $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, мы получим уравнение относительно n:

$$\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}} = n+2,$$

которое на множестве натуральных чисел равносильно уравнению

$$n^3+3n^2-n-3=0 \Leftrightarrow (n+3)(n^2-1)=0 \Leftrightarrow n=1.$$

Теперь исходные уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 1, \\ \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 2, \\ \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = 3, \end{cases}$$

откуда $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}$, $\frac{\beta}{2}=\operatorname{arcctg}2$, $\frac{\gamma}{2}=\operatorname{arcctg}3$.

ОТВЕТ: $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=2\operatorname{arcctg}2$, $\gamma=2\operatorname{arcctg}3$. ■

□ **628.** Избавимся от модуля в первом уравнении, рассмотрев три логически возможных случая: $\cos y>0$, $\cos y=0$, $\cos y<0$.

1. Если $\cos y>0$, то первое уравнение можно сократить на $\cos y$, что приведет к стандартному показательному уравнению относительно одной неизвестной x:

$$3^{x^3+8}=27^{x^2+2x} \Leftrightarrow x^3+8=3(x^2+2x).$$

Кубическое уравнение $x^3-3x^2-6x+8=0$ решим с помощью разложения левой части на множители. Для этого прежде всего отметим, что $x=1$ является корнем. Поэтому многочлен $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ делится без остатка на двучлен $x - 1$. Частное можно найти делением в столбик; оно равно $x^2 - 2x - 8$, что дает еще два корня: $x = 4$ и $x = -2$.

Найденные значения x можно подставить во второе уравнение исходной системы, после чего оно превратится в уравнение с одной неизвестной y.

Если $x=1$, то это уравнение примет вид: $\sin y=0$. С учетом условия $\cos y>0$ получим $y = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $x=4$, то $\sin y=1$. Тогда $\cos y=0$, так что этот случай нужно исключить.

Если $x = -2$, то $\log_2 x$ не определен, так что этот случай также нужно исключить.

2. Если $\cos y=0$, т. е. $y=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, то первое уравнение выполнено при всех x. Второе уравнение можно упростить, используя найденные значения y.

Для серии $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ ($m=2n$ — четное) $\sin y=1$. Поэтому $\log_2 x=2$, откуда $x=4$.

Для серии $y=-\frac{\pi}{2}+2\pi l$ ($m=2l-1$ — четное) $\sin y=-1$. Поэтому $\log_2 x=-2$, откуда $x=\frac{1}{4}$.

3. Если $\cos y<0$, то левая часть первого уравнения отрицательна, в то время как правая положительна. Поэтому в этом случае наша задача решений не имеет.

Ответ: $(1, 2\pi k)$, $\left(\frac{1}{4}; -\frac{\pi}{2}+2\pi l\right)$, $\left(4; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $k, l, n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **629.** В первом уравнении вместо $\sin^2 y$ поставим $1-\cos^2 y$:

$$\begin{cases} 12\sin^2 x - (1-\cos^2 y) = 3\,, \\ 6\sin x + \cos y = -2\,. \end{cases}$$

Поскольку в системе повторяется два блока: $\sin x$ и $\cos y$, введем новые неизвестные $a=\sin x$, $b=\cos y$. Для них исходная система превратится в простую алгебраическую систему:

$$\begin{cases} 12a^2 + b^2 = 4\,, \\ 6a + b = -2\,. \end{cases}$$

Эта система легко решается методом исключения. Из первого уравнения следует, что $b=-2-6a$, после чего второе уравнение превращается в квадратное уравнение относительно неизвестной a:

$$12a^2 + (2+6a)^2 = 4 \Leftrightarrow 2a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 0; -\frac{1}{2}\,.$$

Соответствующие значения b равны -2 и 1.

Поэтому исходная система распадается на две системы:

$$\begin{cases} \sin x = 0\,, \\ \cos y = -2\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}\,, \\ \cos y = 1\,. \end{cases}$$

Первая система имеет пустое множество решений, а вторая сводится к решению изолированных простейших тригонометрических уравнений, что немедленно дает ответ задачи.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n; 2\pi m\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi n; 2\pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **633.** С помощью основного тригонометрического тождества преобразуем первое уравнение системы так, чтобы в него входили только $\cos x$ и $\sin y$. После этого можно ввести новые неизвестные $a = \cos x$, $b = \sin y$. Для них система примет вид:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{5}{4}, \\ ab = \dfrac{\sqrt{6}}{4}, \\ a \geqslant 0. \end{cases}$$

Она легко решается методом исключения. Из второго уравнения следует, что $b = \dfrac{\sqrt{6}}{4a}$, после чего первое уравнение превращается в биквадратное уравнение относительно неизвестной a:

$$8a^4 - 10a^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{4}; \frac{1}{2}\,.$$

С учетом условия $a \geqslant 0$ отсюда получим: $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Соответствующие значения b равны $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому исходная система распадается на две системы:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,, \\ \sin y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,. \end{cases}$$

Обе системы сводятся к решению изолированных простейших тригонометрических уравнений, что немедленно дает ответ задачи.

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n; (-1)^m\frac{\pi}{4} + \pi m\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n; (-1)^m\frac{\pi}{3} + \pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **638.** Обращая внимание на повторяющиеся блоки $\cos x$, $\sin y$, введем новые неизвестные $a = \cos x$, $b = \sin y$. Для них исходная система превратится в алгебраическую систему с модулями:

$$\begin{cases} |b| \cdot b = \dfrac{|a|}{a}, \\ |a-1|^2 + |b|^2 = 4. \end{cases}$$

Как обычно, будем «раскрывать» модули по случаям. Начнем с $|a|$:

$$\begin{cases} a > 0\,, \\ b|b| = 1\,, \\ (a-1)^2 + b^2 = 4\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0\,, \\ b|b| = -1\,, \\ (a-1)^2 + b^2 = 4\,. \end{cases}$$

Из уравнения $b|b| = 1$ следует, что $b > 0$, а тогда это уравнение даст $b = 1$. Из равенства $b = 1$, очевидно, вытекает равенство $b|b| = 1$.

Из уравнения $b|b| = -1$ следует, что $b < 0$, а тогда это уравнение даст $b = -1$. Из равенства $b = -1$, очевидно, вытекает равенство $b|b| = -1$.

Поэтому предыдущая совокупность двух систем примет вид:

$$\begin{cases} a>0\,, \\ b=1\,, \\ (a-1)^2+b^2=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a<0\,, \\ b=-1\,, \\ (a-1)^2+b^2=4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} a>0\,, \\ b=1\,, \\ (a-1)^2=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a<0\,, \\ b=-1\,, \\ (a-1)^2=3 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} a=1+\sqrt{3}\,, \\ b=1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1-\sqrt{3}\,, \\ b=-1\,. \end{cases}$$

Возвращаясь к основным неизвестным x и y, мы получим две системы:

$$\begin{cases} \cos x=1+\sqrt{3}\,, \\ \sin y=1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x=1-\sqrt{3}\,, \\ \sin y=-1\,. \end{cases}$$

Поскольку $1+\sqrt{3}>1$, уравнение $\cos x=1+\sqrt{3}$, а вместе с ним и первая система, имеют пустое множество решений.

Со второй системой все в порядке — число $1-\sqrt{3}\in(-1;0)$. Поэтому, решая входящие в нее изолированные простейшие тригонометрические уравнения, мы немедленно получаем ответ задачи.

Ответ: $\left(\pm\arccos(1-\sqrt{3})+2\pi n,\, -\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$, $n, m\in\mathbb{Z}$. ■

□ **640.** Логарифмические члены можно преобразовать так, чтобы появился один и тот же логарифм:

$$\log_3 y^2 = 2\log_3 y,$$

$$\log_y 9 = \frac{2}{\log_3 y}\,.$$

Тригонометрическое выражение в правой части второго уравнения можно преобразовать так, чтобы появился $\operatorname{tg} x$:

$$\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin x+\cos x}{\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\operatorname{tg} x+1).$$

Теперь введем новые неизвестные $a=\operatorname{tg} x$, $b=\log_3 y$. Для них исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 3a+80b=163, \\ b=a+1, \\ b\neq 0\,. \end{cases}$$

Система из двух первых уравнений имеет единственное решение $(a;b)=(1;2)$, для которого выполнено условие $b\neq 0$.

Этому решению соответствует следующая система относительно основных неизвестных x и y:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \log_3 y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ y = 9\,. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; 9\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **641.** Как неизвестная x, так и неизвестная y входят в систему в составе «почти» одинаковых блоков: $\sin x$, $\cos x$ и $\sin y$, $\cos y$. Если бы для каждой неизвестной одна из функций (синус или косинус) стояла только в четной степени, то мы могли бы ее исключить и свести дело к двум новым неизвестным (см. задачи 629, 633). Чтобы решить эту проблему, мы сами сделаем вторые степени, возведя первое уравнение в квадрат:

$$4\sin^2 x + 4\sin x \sin y + \sin^2 y = 0.$$

К сожалению, в удвоенном произведении возведения в квадрат не произошло. Поэтому мы немного модифицируем это преобразование, а именно, сначала перенесем член $\sin y$ в правую часть, а лишь затем возведем в квадрат:

$$4\sin^2 x = \sin^2 y. \tag{60}$$

Это преобразование, вообще говоря, не является равносильным. Поэтому нам нужно либо модифицировать его, чтобы сделать равносильным, либо не обращать на равносильность внимания, а в конце решения сделать полную проверку (подставить найденные решения задачи-следствия в исходную задачу и выяснить, являются ли они и ее решениями).

Обычно считается, что равносильные преобразования предпочтительнее, так как они не требуют проверки. Но, как правило, они не отменяют проверку, а лишь заменяют ее на проверку более простых условий («ослабленную» проверку). Это упрощение достигается усложнением логики решения. Кроме того, если допустить ошибку при анализе равносильности, то это может привести к отбору в ответ не тех решений, которые нужно, и никакой возможности «поймать» это обычно нет. Полная проверка при всей своей громоздкости имеет важное достоинство (особенно важное в условиях экзамена) — она позволяет вылавливать многие ошибки.

Конечно, равносильные преобразования — это более «культурный» метод решения, и мы рекомендуем при решении экзаменационных задач пользоваться именно им. Однако, в силу вышеизложенного, нужно уметь работать и с альтернативным методом: получать следствия и в конце решения делать проверку.

Все сказанное по поводу равносильных преобразований относится только к уравнениям и системам уравнений, когда в конце появляется лишь небольшое число «подозрительных» решений, которые можно проверить прямой подстановкой в исходную задачу. В неравенствах типичный ответ содержит бесконечно много точек, так что прямая проверка, как правило, невыполнима. Поэтому в неравенствах все преобразования должны быть равносильными.

После этих общих комментариев вернемся к нашей задаче. Можно показать, что переход от первого уравнения исходной системы к уравнению (60) будет равносильным, если к уравнению (60) добавить неравенство $\sin x \cdot \sin y \leqslant 0$ (которое, очевидно, следует из первого уравнения исходной системы) или, что то же самое, совокупность из двух пар неравенств: $\sin x \geqslant 0, \sin y \leqslant 0$ и $\sin x \leqslant 0, \sin y \geqslant 0$. Поэтому вместо полной проверки нужно будет проверять только эти условия.

Но мы подробно разберем второй метод: будем решать систему, которая *следует* из исходной (а затем сделаем проверку):

$$\begin{cases} 4\sin^2 x = \sin^2 y, \\ 10\cos x + 5\cos y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(1-\cos^2 x) = 1-\cos^2 y, \\ 10\cos x + 5\cos y = 9. \end{cases}$$

Для новых неизвестных $a = \cos x$, $b = \cos y$ мы получим систему

$$\begin{cases} 4(1-a^2) = 1-b^2, \\ 10a + 5b = 9, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение

$$\begin{cases} a = \dfrac{13}{15}, \\ b = \dfrac{1}{15}. \end{cases}$$

Возвращаясь к основным неизвестным, мы получим систему из двух простейших тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{13}{15}, \\ \cos y = \dfrac{1}{15}, \end{cases}$$

общее решение которой имеет вид:

$$\begin{cases} x = \pm \arccos \dfrac{13}{15} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ y = \pm \arccos \dfrac{1}{15} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{61}$$

Отметим, что формула (61) задает четыре серии решений, соответствующие четырем возможностям выбора знаков $+$ и $-$ перед арккосинусами.

Теперь нужно проверить, являются ли найденные пары $(x; y)$ решениями исходной системы.

Со вторым уравнением, очевидно, все в порядке, так как оно являлось частью системы, из которой мы нашли проверяемые значения неизвестных.

Первое уравнение после подстановки найденных значений x и y примет вид (с учетом периодичности и нечетности синуса):

$$\pm_x 2\sin\left(\arccos\frac{13}{15}\right) \pm_y \sin\left(\arccos\frac{1}{15}\right) = 0.$$

Знаки «$\pm$» в этом равенстве соответствуют знакам «$\pm$» в формуле (61). Мы отметили это обстоятельство индексами x и y.

Применяя тождество $\sin\arccos a = \sqrt{1-a^2}$, мы получим

$$\pm_x 2\cdot\frac{\sqrt{56}}{15} \pm_y \cdot \frac{2\sqrt{56}}{15} = 0.$$

Это равенство истинно тогда и только тогда, когда в формуле (61) у неизвестных x, y перед arccos стоят разные знаки.

Ответ:

$$\left(\arccos\frac{13}{15}+2\pi n, -\arccos\frac{1}{15}+2\pi m\right),\quad \left(-\arccos\frac{13}{15}+2\pi n, \arccos\frac{1}{15}+2\pi m\right),$$
$$n, m\in\mathbb{Z}.$$ ■

□ **642.** Поскольку в исходной системе неизвестные x и y появляются только в составе повторяющихся групп $\cos x$ и $\sin y$, введем новые неизвестные $a=\cos x$, $b=\sin y$. Для них исходная система примет вид:

$$\begin{cases}\sqrt{13a+98b}-\sqrt{13a+28b}=4,\\ 2\sqrt{13a+28b}-\sqrt{70b+8}=2.\end{cases}$$

Под радикалами стоят линейные выражения. Поэтому от них можно избавиться, обозначив их новыми буквами. Имея в виду, что в нашей задаче две неизвестные, разумно сделать это с двумя радикалами. Это, конечно, $\sqrt{13a+28b}$ и, например, $\sqrt{13a+98b}$. Итак, введем новые неизвестные $u = \sqrt{13a+28b}$, $v=\sqrt{13a+98b}$. Тогда $u^2=13a+28b$, $v^2=13a+98b$, так что неизвестные a и b могут быть выражены через неизвестные u и v: $a=\dfrac{7u^2-2v^2}{65}$, $b=\dfrac{v^2-u^2}{70}$. Для неизвестных u и v последняя система примет вид:

$$\begin{cases}v-u=4,\\ 2u-\sqrt{v^2-u^2+8}=2.\end{cases}$$

Она имеет единственное решение $(u;v)=(5;9)$, которому соответствует пара $(a;b)=\left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Для основных неизвестных x и y мы получим систему из двух простейших тригонометрических уравнений: $\cos x=\frac{1}{5}$ и $\sin y=\frac{4}{5}$, откуда немедленно следует ответ.

Ответ: $\left(\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n, (-1)^m\arcsin\frac{4}{5}+\pi m\right)$, $n, m\in\mathbb{Z}$. ■

□ **643.** Первое уравнение системы распадается на две системы:

$$\begin{cases}\cos y+\sin x-1=0,\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\neq 0,\\ \cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)\neq 0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0,\\ \operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=0.\end{cases}$$

Второе уравнение системы распадается на два уравнения:

$$\sin x-\cos y=0,\quad 2-\sin 2y+\sin y=0.$$

В силу того что $-1\leqslant \sin 2y, \sin y\leqslant 1$, равенство $2-\sin 2y+\sin y=0$ возможно только в случае, когда одновременно $\sin y=-1$ и $\sin 2y=1$. Из второго равенства следует, что $\cos y=-\frac{1}{2}$, а это противоречит тому, что $\sin y=-1$. Поэтому на самом деле второе уравнение исходной системы равносильно уравнению $\sin x - \cos y = 0$.

Вся исходная система распадается на две системы:

$$\begin{cases} \cos y + \sin x - 1 = 0\,, \\ \sin x - \cos y = 0\,, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0\,, \\ \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0\,, \\ \operatorname{tg}\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 0\,, \\ \sin x - \cos y = 0\,. \end{cases}$$

Уравнения первой системы образуют линейную систему относительно неизвестных $a = \sin x$, $b = \cos y$, откуда

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}\,, \\ \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ или } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \\ y = \frac{\pi}{3} + 2\pi m \text{ или } y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Условиям

$$\begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0\,, \\ \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \end{cases}$$

удовлетворяют только серии

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \\ y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Два первых уравнения второй системы дают возможность определить x и y:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \\ y = -\frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Третье уравнение можно не решать, а использовать как условие для отбора тех пар $(x; y)$, которые превратят его в верное числовое равенство:

$$\sin x - \cos y = 0 \Leftrightarrow (-1)^n \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1)^m \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Последнее равенство возможно только в случаях, когда числа n и m либо одновременно четные, либо одновременно нечетные. Это дает две серии решений вида

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \\ y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \\ y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right)$, $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi l\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi l\right)$, $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$. ■

□ **644.** Исключим из третьего уравнения неизвестную z: $z=\pi-x-y$. Тогда два первых уравнения дадут систему относительно x и y:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(\pi-x-y)=3, \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg}(\pi-x-y)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}=-3, \\ \operatorname{tg} y \dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}=-6 . \end{cases}$$

Для новых неизвестных $a=\operatorname{tg} x$, $b=\operatorname{tg} y$ эта система примет вид:

$$\begin{cases} a \dfrac{a+b}{1-ab}=-3, \\ b \dfrac{a+b}{1-ab}=-6 . \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе и сохраним первое уравнение. В итоге получим следующую систему, равносильную предыдущей:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}, \\ a \dfrac{a+b}{1-ab}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a, \\ \dfrac{3a^2}{1-2a^2}=-3 . \end{cases}$$

Второе уравнение имеет два корня: $a=1$, $a=-1$. Восстанавливая исключенную неизвестную b, получим два решения системы:

$$\begin{cases} a=1, \\ b=2, \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1, \\ b=-2 . \end{cases}$$

Вспоминая, что скрывалось за буквами a и b, мы получим две системы из простейших тригонометрических уравнений относительно основных неизвестных x и y:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x=1, \\ \operatorname{tg} y=2, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x=-1, \\ \operatorname{tg} y=-2, \end{cases}$$

которые немедленно дают ответ задачи.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi k; \operatorname{arctg} 2+\pi m; \dfrac{3\pi}{4}-\operatorname{arctg} 2-\pi(k+m)\right)$,
$\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi k; -\operatorname{arctg} 2+\pi m; \dfrac{5\pi}{4}+\operatorname{arctg} 2-\pi(k+m)\right)$, $k, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **645.** Первое уравнение системы распадается на систему (неравенство гарантирует существование радикала во втором множителе) и уравнение:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi(2x-y-2)}{6}=0, \\ 3-x^2-y^2+2x \geqslant 0, \end{cases} \qquad \sqrt{3-x^2-y^2+2x}-3=0 .$$

Уравнение $\sqrt{3-x^2-y^2+2x}-3=0$ выглядит довольно просто, поэтому сразу попробуем максимально упростить его:

$$\sqrt{3-x^2-y^2+2x}=3$$
$$\Updownarrow$$
$$3-x^2-y^2+2x=9$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2-2x+(y^2+6)=0 .$$

Получившееся уравнение можно рассматривать как квадратное относительно неизвестной x. Его дискриминант дается формулой $\dfrac{D}{4} = 1 - (y^2 + 6) = -y^2 - 5$. Поэтому $D < 0$, и поэтому уравнение не имеет корней.

Таким образом, первое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x}{2} + \sin\dfrac{\pi(2x-y-2)}{6} = 0\,, \\ 3 - x^2 - y^2 + 2x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Во втором уравнении обратим внимание на члены $\sin\dfrac{\pi(2x-y)}{6}$ и $\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi(2x-y)}{6}$. Если второе выражение перенести в левую часть, то мы получим линейную комбинацию синуса и косинуса вида $\sin t - \sqrt{3}\cos t$ $\left(t = \dfrac{\pi(2x-y)}{6}\right)$. С помощью метода вспомогательного аргумента это выражение преобразуется к виду $2\sin\left(t - \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sin\dfrac{\pi(2x-y-2)}{6}$.

Следовательно, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x}{2} + \sin\dfrac{\pi(2x-y-2)}{6} = 0\,, \\ 3\cos\dfrac{\pi x}{2} + 2\sin\dfrac{\pi(2x-y-2)}{6} = 0\,, \\ 3 - x^2 - y^2 + 2x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Два первых уравнения образуют систему относительно новых неизвестных $a = \cos\dfrac{\pi x}{2}$ и $b = \sin\dfrac{\pi(2x-y-2)}{6}$:

$$\begin{cases} \sqrt{3}a + b = 0\,, \\ 3a + 2b = 0\,. \end{cases}$$

Эта линейная система легко решается; она имеет единственное решение $(a; b) = (0; 0)$. Ему соответствует система из двух простейших тригонометрических уравнений относительно основных неизвестных x и y:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} = 0, \\ \sin\dfrac{\pi(2x-y-2)}{6} = 0, \end{cases}$$

которая распадается на бесконечное число линейных систем, занумерованных парами целых чисел n и m:

$$\begin{cases} x = 2n + 1, \\ 2x - y - 2 = 6m. \end{cases} \tag{62}$$

Каждая из этих систем имеет единственное решение $(x; y) = (2n + 1; 4n - 6m)$.

Теперь нужно отобрать те решения, для которых выполнено условие $3 - x^2 - y^2 + 2x \geqslant 0$. Это условие отбора решений превращается в следующее условие отбора их «номеров»:

$$5n^2 - 12m \cdot n + (9m^2 - 1) \leqslant 0.$$

Рассмотрим это неравенство как квадратное относительно переменной n. Оно имеет решения тогда и только тогда, когда дискриминант неотрицателен:

$$\frac{D}{4} = 5 - 9m^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow m^2 \leqslant \frac{5}{9} \Leftrightarrow m = 0.$$

В случае $m = 0$ неравенство примет вид: $n^2 \leqslant \frac{1}{5}$ — ему удовлетворяет только одно целое число $n = 0$.

Итак, из бесконечного множества пар $(x; y) = (2n + 1; 4n - 6m)$ только пара $(1; 0)$, отвечающая случаю $n = 0$, $m = 0$, удовлетворяет условию $3 - x^2 - y^2 + 2x \geqslant 0$ и, следовательно, является решением исходной системы.

Отбор решений можно было бы производить и геометрически. Для этого отметим, что неравенство $3 - x^2 - y^2 + 2x \geqslant 0$ можно записать в виде: $(x - 1)^2 + y^2 \leqslant 4$. На координатной плоскости оно задает круг $\mathcal{K}$ радиуса 2 с центром в точке $(1; 0)$.

Первое уравнение системы (62) задает бесконечную совокупность вертикальных прямых: $\ldots, x = -1, x = 1, x = 3, \ldots$. Через круг $\mathcal{K}$ проходит только три из них: $x = -1, x = 1, x = 3$.

Второе уравнение системы (62) задает бесконечную совокупность наклонных прямых: $\ldots, y = 2x + 4, y = 2x - 2, y = 2x - 8, \ldots$. Через круг $\mathcal{K}$ проходит только одна из них: $y = 2x - 2$. Она пересекается в пределах этого круга только с прямой $x = 1$; точка пересечения — $(1; 0)$.

ОТВЕТ: $(1; 0)$. ■

□ **646.** Упростим уравнения системы.

В левой части первого уравнения стоит два неотрицательных слагаемых, $\left|\sin \frac{\pi(x+y)}{4}\right|$ и $\left|1 - \sin \frac{\pi(x-y)}{4}\right|$. Их сумма может быть равна нулю тогда и только тогда, когда они одновременно равны 0. Таким образом, первое уравнение превращается в систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \sin \dfrac{\pi(x+y)}{4} = 0, \\ 1 - \sin \dfrac{\pi(x-y)}{4} = 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, распадается на бесконечное число линейных систем, занумерованных парами целых чисел n и m:

$$\begin{cases} x + y = 4n, \\ x - y = 2 + 8m. \end{cases}$$

Каждая из этих систем имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = 1 + 2n + 4m, \\ y = -1 + 2n - 4m. \end{cases} \tag{63}$$

Второе уравнение системы выполнено при всех x, y, для которых существует арифметический квадратный корень из $4 - |x| - |y + 2|$. Иначе говоря, второе уравнение равносильно неравенству $4 - |x| - |y + 2| \geqslant 0$. После стандартного раскрытия модулей (с помощью преобразования $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$) оно превратится в систему

$$\begin{cases} y \leqslant -x + 2, \\ y \geqslant -x - 6, \\ y \leqslant x + 2, \\ y \geqslant x - 6. \end{cases} \tag{64}$$

Это условие отбора пар $(x;y)$ дает следующее условие для отбора их «номеров» $(n;m)$:

$$\begin{cases} -6 \leqslant 4n \leqslant 2\,, \\ -2 \leqslant 2+8m \leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \leqslant n \leqslant \dfrac{1}{2}\,, \\ -\dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Этим условиям удовлетворяют только два «номера»: $(n;m) = (-1;0)$, $(n;m) = (0;0)$, которым соответствуют следующие пары $(x;y)$: $(x;y) = (-1;-3)$, $(x;y) = (1;-1)$.

Отбор решений можно было бы провести и геометрически. На координатной плоскости $(x;y)$ формула (64) для решений первого уравнения исходной системы (при всевозможных $n, m \in \mathbb{Z}$) задает семейство точек, изображенное на рис. 8. Условие отбора (64) задает квадрат $\mathcal{K}$. Из этого рисунка ясно, что в квадрат $\mathcal{K}$ попадает только две точки этого семейства — $(-1;-3)$ и $(1;-1)$.

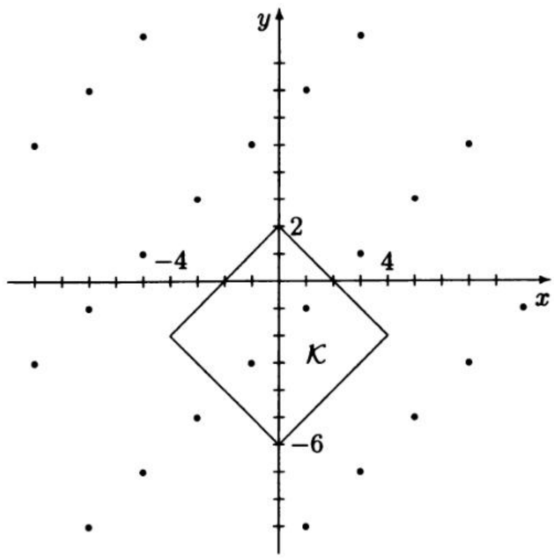


Рис. 8

Ответ: $\{(-1;-3);(1;-1)\}$. ■

□ **648.** Обозначим для сокращения записей аргументы функций в левой части первого уравнения через α и β, так что это уравнение примет вид:

$$\cos^3\alpha + \frac{1}{\sin\beta} = 0.$$

Поскольку $\cos\alpha, \sin\beta \in [-1;1]$, это уравнение распадается на две системы

$$\begin{cases} \cos\alpha = 1\,, \\ \sin\beta = -1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\alpha = -1\,, \\ \sin\beta = 1\,. \end{cases}$$

В принципе каждую из этих систем уже можно решить, но мы продолжим упрощение. Для этого отметим, что на те же две системы распадется и урав-

нение
$$\sin\beta\cdot\cos\alpha=-1.$$
Если выражение в левой части этого уравнения превратить в произведение тригонометрических функций, то мы получим уравнение
$$\sin(\beta+\alpha)+\sin(\beta-\alpha)=-2,$$
которое в силу оценок $\cos\alpha, \sin\beta\in[-1;1]$ равносильно одной системе (а не двум)
$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=-1,\\ \sin(\alpha-\beta)=1.\end{cases}$$
Для основных неизвестных z и y эта система примет вид:
$$\begin{cases}\sin(3z+6y)=-1,\\ \cos(z-2y)=1.\end{cases}$$
Используя изложенный выше прием, мы и второе уравнение исходной системы сведем к системе
$$\begin{cases}\sin(7z-2y)=-1,\\ \cos(z-2y)=1.\end{cases}$$
Таким образом, исходная система превратится в систему из трех более простых уравнений:
$$\begin{cases}\sin(3z+6y)=-1,\\ \cos(z-2y)=1,\\ \sin(7z-2y)=-1.\end{cases}$$
Два первых уравнения мы решим, а третье будем использовать как условие для отбора найденных решений.

Система из двух первых уравнений распадается на бесконечную совокупность линейных систем, занумерованных парами целых чисел n и m:
$$\begin{cases}3z+6y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\\ z-2y=2\pi m.\end{cases}$$
Каждая из этих линейных систем имеет единственное решение
$$\begin{cases}z=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}+\pi m,\\ y=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{6}-\frac{\pi m}{2}.\end{cases}$$
Теперь отберем те решения, для которых выполнено условие $\sin(7z-2y)=-1$. Поскольку
$$\sin(7z-2y)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n+8\pi m\right)=-1,$$
этому условию удовлетворяют все проверяемые решения.

Ответ: $z=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}+\pi m$, $y=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{6}-\frac{\pi m}{2}$, $n,m\in\mathbb{Z}$. ■

□ **649.** *Первый способ.* Поскольку система не меняется при изменении порядка неизвестных, можно считать, что
$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n.$$
Тогда условие $|x_i-x_j|\leqslant\pi$, $i,j=1,2,\ldots,n$, превратится в более простое условие $x_n-x_1\leqslant\pi$.

Теперь умножим первое уравнение на $\cos x_1$, второе — на $\sin x_1$ и сложим:

$$\cos(x_n - x_1) + \cos(x_{n-1} - x_1) + \dots + \cos(x_2 - x_1) + 1 = 0.$$

Если мы умножим первое уравнение на $\sin x_1$, а второе — на $\cos x_1$, и вычтем, то получим уравнение:

$$\sin(x_n - x_1) + \sin(x_{n-1} - x_1) + \dots + \sin(x_2 - x_1) = 0.$$

Введем неизвестные $t_k = x_k - x_1$, $k = 1, 2 \dots, n$. Для них имеем систему:

$$\begin{cases} \sin t_1 + \sin t_2 + \dots + \sin t_n = 0, \\ \cos t_1 + \cos t_2 + \dots + \cos t_n = 0. \end{cases}$$

Поскольку все числа $t_k \in [0; \pi]$, их синусы неотрицательны. Поэтому первое уравнение этой системы равносильно тому, что все слагаемые равны нулю: $\sin t_k = 0$ для всех $k = 1, \dots, n$. С учетом условия $t_k \in [0; \pi]$ это означает, что $t_k = 0$ или π. Имея в виду их упорядоченность, допустим, что $t_1 = t_2 = \dots = t_l = 0$, $t_{l+1} = \dots = t_n = \pi$ (не исключен вариант, что $l = n$, т. е. все числа t_k равны 0).

Тогда второе уравнение примет вид:

$$1 \cdot l + (n - l) \cdot (-1) = 0,$$

откуда $n = 2l$.

Итак, если исходная система имеет решение, то n — четное число. Обратно, если $n = 2l$ — четное, то, например, набор $x_1 = x_2 = \dots = x_l = t$, $x_{l+1} = x_{l+2} = \dots = x_{2l} = \pi + t$, где $t \in \mathbb{R}$ — произвольно, будет ее решением. Нетрудно видеть, что эта формула дает все решения (с точностью до перестановки переменных).

Второй способ. Введем единичные векторы $\mathbf{v}_k = (\cos x_k; \sin x_k)$, $k = 1, \dots, n$. Система

$$\begin{cases} \cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n = 0, \\ \sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n = 0 \end{cases}$$

означает, что их сумма равна нулевому вектору.

Условие $|x_i - x_j| \leqslant \pi$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, означает, что все эти векторы расположены в одной полуплоскости. Поэтому их сумма может быть равна нулевому вектору тогда и только тогда, когда n — четно, и при этом векторы $\mathbf{v}_k$ можно разбить на две равные по численности группы так, чтобы все векторы одной группы равнялись одному и тому же вектору $\mathbf{w}$, а все векторы второй группы — противоположному вектору $-\mathbf{w}$.

Ответ: n — четное натуральное число. ■

□ **650.** Упростим первое уравнение.

Если $\operatorname{tg} x > 0$, то (в силу неравенства для суммы двух взаимно обратных положительных чисел) его левая часть больше или равна 2, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg} x = 1$.

Правая часть первого уравнения, очевидно, меньше или равна 2.

Поэтому в случае $\operatorname{tg} x > 0$ первое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases}$$

Ее решение дается формулой

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{65}$$

Если $\operatorname{tg} x < 0$, то (в силу неравенства для суммы двух взаимно обратных отрицательных чисел) его левая часть меньше или равна -2, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg} x = -1$.

Правая часть первого уравнения, очевидно, больше или равна -2.

Поэтому в случае $\operatorname{tg} x < 0$ первое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = -1. \end{cases}$$

Ее решение дается формулой

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ y = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{66}$$

Второе уравнение можно не решать и не упрощать, а использовать как условие для проверки найденных решений первого уравнения.

Для серии (65) второе уравнение примет вид:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 2 \cdot (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$1 + 1 = 0.$$

Следовательно, ни одно из решений вида (65) не удовлетворяет второму уравнению исходной системы.

Для серии (66) второе уравнение примет вид:

$$\operatorname{tg} \frac{-3\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{-3\pi}{4} = 2 \cdot (-1)^n \sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$1 + 1 = 2 \cdot (-1)^{n+1}.$$

Следовательно, из решений вида (66) второму уравнению исходной системы удовлетворяют все решения, соответствующие нечетным значениям параметра n и только они. В этом случае $n = 2k + 1$, где k — произвольное целое число, так что формула для x примет вид:

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

Ответ: $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m\right)$, $k, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **651.** Неравенство системы напоминает неравенство $(x-a)^2+y^2 \leqslant 1$, задающее круг радиуса 1 с центром в точке $(a;0)$. Чтобы привести его в точности к такому виду, введем вместо неизвестной y новую неизвестную $z = \frac{1}{\sqrt{2}y}$.

Для пары $(x;z)$ исходная система примет вид:

$$\begin{cases} \log_2 \sin x + \log_2 z - \frac{1}{2} + \left|\log_2 \cos x + \log_2 z - \frac{1}{2}\right| = -2, \\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + z^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Рассмотрим выражение под знаком модуля. Поскольку $\cos x \leqslant 1$, можно утверждать, что $\log_2 \cos x \leqslant 0$. Далее, из неравенства системы следует, что $z \leqslant 1$. Значит, $\log_2 z \leqslant 0$. Следовательно, $\log_2 \cos x + \log_2 z - \frac{1}{2} < 0$, и поэтому уравнение системы примет вид:

$$\begin{cases} \log_2 \sin x - \log_2 \cos x = -2, \\ z > 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \log_2 \operatorname{tg} x = -2, \\ \sin x > 0, \\ z > 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{4}, \\ \sin x > 0, \\ z > 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ z > 0. \end{cases}$$

Соответственно, исходная система примет вид:

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ z > 0, \\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + z^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Из бесконечного семейства вертикальных прямых $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + 2\pi n$ с кругом $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + z^2 \leqslant 1$ пересекается только прямая, отвечающая $n = 0$. Следовательно, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4}, \\ 0 < z \leqslant \sqrt{1 - \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4}\right)^2}. \end{cases}$$

Возвращаясь к основной неизвестной z, мы получим ответ.

Ответ: $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}; t\right)$, где $t \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2-2\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)^2}}$. ■

□ **656.** Рассмотрим первое уравнение как квадратное относительно x и решим его. Поскольку $\frac{D}{4} = \sin^2 y - 1 \leqslant 0$, это уравнение может иметь решение, только если $\sin y$ равен 1 или -1. Поэтому его можно заменить совокупностью из двух систем:

$$\begin{cases} \sin y = 1, \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin y = -1, \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} \sin y = 1, \\ x = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin y = -1, \\ x = 1. \end{cases}$$

Соответственно, вся система распадется на две системы:

$$\begin{cases} x = -1, \\ 8y^3 + 8y + \pi^3 + 4\pi = 0, \\ \sin y = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1, \\ 8y^3 + 8y + \pi^3 + 4\pi = 0, \\ \sin y = -1. \end{cases}$$

Уравнение $8y^3 + 8y + \pi^3 + 4\pi = 0$, которое является общим для двух систем, можно решить, разложив левую часть на множители методом группировки:

$$(8y^3 + \pi^3) + (8y + 4\pi) = (2y + \pi)(4y^2 - 2y\pi + \pi^2) + 4(2y + \pi) =$$
$$= (2y + \pi)(4y^2 - 2y\pi + \pi^2 + 4).$$

Поскольку квадратное уравнение $4y^2 - 2y\pi + \pi^2 + 4 = 0$ не имеет корней $\left(\frac{D}{4} = -3\pi^2 - 16\right)$, отсюда следует, что $y = -\frac{\pi}{2}$.

Так $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, первая из этих двух систем не имеет решений, а вторая имеет единственное решение $(x; y) = \left(1; -\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $\left(1; -\frac{\pi}{2}\right)$. ■

□ **657.** *Первый способ.* Докажем, что если A, B, C — решение системы, то $A = B = C$. Действительно, используя, что $A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и на этом множестве $\operatorname{tg} x$ возрастает, а $\cos x$ убывает, мы имеем:

$$A < B \Leftrightarrow \cos A > \cos B \Leftrightarrow \operatorname{tg} B > \operatorname{tg} C \Leftrightarrow$$
$$B > C \Leftrightarrow \cos B < \cos C \Leftrightarrow \operatorname{tg} C < \operatorname{tg} A \Leftrightarrow$$
$$C < A \Leftrightarrow \cos C > \cos A \Leftrightarrow \operatorname{tg} A > \operatorname{tg} B \Leftrightarrow$$
$$A > B.$$

Полученное противоречие доказывает, что $A = B$. В силу симметрии задачи, $B = C$.

Теперь все три уравнения системы превратятся в одно уравнение

$$\cos A = \operatorname{tg} A \Leftrightarrow \cos^2 A = \sin A \Leftrightarrow 1 - \sin^2 A = \sin A \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin A - 1 = 0.$$

Квадратное уравнение $x^2 + x - 1 = 0$ имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку $x_1 \in (0; 1)$, а $x_2 \in (-\infty; -1)$, можно утверждать, что $\sin A = x_1$.

Второй способ. Нашу задачу можно решить и методом новых неизвестных. Поскольку углы A, B, C — острые, все тригонометрические функции этих углов — положительные. Поэтому возведение уравнений в квадрат будет равносильным преобразованием:

$$\begin{cases} \cos^2 A = \operatorname{tg}^2 B, \\ \cos^2 B = \operatorname{tg}^2 C, \\ \cos^2 C = \operatorname{tg}^2 A. \end{cases}$$

Это позволит ввести новые неизвестные $a = \sin^2 A$, $b = \sin^2 B$, $c = \sin^2 C$. Получившаяся система

$$\begin{cases} 1 - a = \dfrac{b}{1-b}, \\ 1 - b = \dfrac{c}{1-c}, \\ 1 - c = \dfrac{a}{1-a} \end{cases}$$

решается методом последовательного исключения неизвестных. Из первого и третьего уравнений можно выразить b и c через a: $b = \dfrac{1-a}{2-a}$, $c = \dfrac{1-2a}{1-a}$, после чего второе уравнение превратится в квадратное уравнение относительно одной неизвестной a:

$$a^2 - 3a + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $a = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Поскольку $a \in (0; 1)$, остается одна возможность: $a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Теперь можно восстановить исключенные переменные b и c; они также равны $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Поскольку

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,$$

отсюда следует требуемое утверждение. ■

□ **658.** Превратим произведения тригонометрических функций в левых частях уравнений в суммы:

$$\begin{cases} \sin(x+2y) + \sin(x-2y) = a^2 - 2a + 1, \\ \sin(x+2y) - \sin(x-2y) = 2a + 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \sin(x+2y) = 1 + \dfrac{a^2}{2}, \\ \sin(x-2y) = -2a + \dfrac{a^2}{2}. \end{cases}$$

Если $a \neq 0$, то выражение $1 + \frac{a^2}{2}$ больше 1; поэтому первое уравнение, а вместе с ним и вся система, не имеет решений.

Если $a = 0$, то система резко упростится:

$$\begin{cases} \sin(x+2y) = 1, \\ \sin(x-2y) = 0, \end{cases}$$

после чего распадется на бесконечное число линейных систем, занумерованных парами целых чисел (n, m):

$$\begin{cases} x + 2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x - 2y = \pi m. \end{cases}$$

Каждая из этих систем имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{(2n+m)\pi}{2}, \\ y = \frac{\pi}{8} + \frac{(2n-m)\pi}{4}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: если $a \neq 0$, то решений нет; если $a = 0$, то множество решений системы имеет вид: $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(2n+m)\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{(2n-m)\pi}{4}\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **659.** Введем новые неизвестные $u = 6^{-\sin 3x}$ и $v = 7^{\cos y}$. Для них исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 5u + 6v = 72, \\ 6u + 7v = c. \end{cases}$$

Эта линейная система относительно u и v имеет единственное решение при всех значениях параметра c:

$$\begin{cases} u = 6c - 504, \\ v = 432 - 5c. \end{cases}$$

Соответственно, исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 6^{-\sin 3x} = 6c - 504, \\ 7^{\cos y} = 432 - 5c. \end{cases} \tag{67}$$

Область значений функций $f(x) = 6^{-\sin 3x}$ и $g(y) = 7^{\cos y}$ — отрезки $\left[\frac{1}{6}; 6\right]$ и $\left[\frac{1}{7}; 7\right]$. Поэтому система (67) имеет решение тогда и только тогда, когда параметр c является решением системы неравенств:

$$\begin{cases} \frac{1}{6} \leqslant 6c - 504 \leqslant 6, \\ \frac{1}{7} \leqslant 432 - 5c \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 84\frac{1}{36} \leqslant c \leqslant 85, \\ 85 \leqslant c \leqslant 86\frac{13}{35} \end{cases} \Leftrightarrow c = 85.$$

Если $c = 85$, то система (67) примет вид:

$$\begin{cases} 6^{-\sin 3x} = 6, \\ 7^{\cos y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1, \\ \cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ y = 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: если $c \neq 85$, то $\varnothing$; если $c = 85$, то $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; 2\pi m\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **660.** Упростим второе уравнение исходной системы. Как обычно, начнем с перехода к одному основанию у всех логарифмов:

$$\log_2(by-y^2)=\log_2(-x)+\log_2(3y).$$

Теперь сложим логарифмы в правой части:

$$\begin{cases}\log_2(by-y^2)=\log_2(-3xy),\\ -x>0,\end{cases}$$

после чего «закроем» логарифмы:

$$\begin{cases}by-y^2=-3xy,\\ -x>0,\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b-y=-3x,\\ x<0,\\ y>0\,.\end{cases}$$

Теперь исходная система примет вид:

$$\begin{cases}\cos(y-b)-2\cos x=0,\\ y=b+3x,\\ x<0,\\ y>0.\end{cases}$$

Исключая y, мы получим систему

$$\begin{cases}\cos 3x-2\cos x=0,\\ -\frac{b}{3}<x<0.\end{cases}$$

Между решениями этой системы и решениями исходной системы существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому вопрос задачи можно сформулировать следующим образом: найти все значения параметра b, при которых уравнение

$$\cos 3x-2\cos x=0 \tag{68}$$

имеет нечетное число решений на интервале $-\frac{b}{3}<x<0$.

Уравнение (68) легко приводится к виду

$$4\cos^3 x-5\cos x=0\Leftrightarrow\cos x(4\cos^2 x-5)=0\Leftrightarrow\cos x=0.$$

Из графика функции $f(x)=\cos x$ ясно, что уравнение $\cos x=0$ имеет нечетное число корней на интервале $-\frac{b}{3}<x<0$ тогда и только тогда, когда параметр b удовлетворяет условию

$$-\frac{3\pi}{2}-2\pi k\leqslant-\frac{b}{3}<-\frac{\pi}{2}-2\pi k\Leftrightarrow\frac{3\pi}{2}+6\pi k<b\leqslant\frac{9\pi}{2}+6\pi k$$

при некотором $k\in\mathbb{Z}_+$.

Ответ: $b\in\left(\frac{3\pi}{2}+6\pi k;\frac{9\pi}{2}+6\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}_+$. ■

□ **661.** Система не меняется при изменении знака у переменной x. Поэтому если пара чисел $(x;y)$ является решением системы, то и пара $(-x;y)$ также будет решением. Отсюда следует, что если система имеет единственное решение, то этим решением может быть только пара вида $(0;y)$.

Найдем, при каких значениях параметра a пара $(0; y)$ является решением. Для этого подставим в систему вместо неизвестной x число 0:

$$\begin{cases} b = y + 1, \\ 1 + |y| = 2. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $(b; y) = (2; 1)$ и $(b; y) = (0; -1)$.

Следовательно, исходная система может иметь единственное решение только для $b = 2$ (причем этим единственным решением может быть только пара $(x; y) = (0; 1)$) и для $b = 0$ (причем этим единственным решением может быть только пара $(x; y) = (0; -1)$). Но это не исключает наличие и других решений; важно лишь то, что для значений параметра b, отличных от 2 и 0, исходная система не может иметь единственное решение.

Для завершения решения задачи достаточно выяснить, сколько решений имеет исходная система для «подозрительных» значений параметра.

Если $b = 2$, то система примет вид:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 2 - \cos 2x, \\ |y| = 2 - 2^{|\sin x|}. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $y \geqslant 2 - \cos 2x \geqslant 1$, в то время как из второго уравнения следует, что $|y| \leqslant 2 - 1 = 1$. Поэтому $y = 1$, причем во всех использованных неравенствах стоит знак равенства: $x^2 = 0$, $\cos 2x = 1$, $|\sin x| = 0$. Ясно, что трем этим уравнениям удовлетворяет только $x = 0$.

Итак, при $b = 2$ исходная система имеет единственное решение $(x; y) = (0; 1)$. Поэтому проверяемое значение параметра b нужно включить в ответ задачи.

Если $b = 0$, то система примет вид:

$$\begin{cases} y = -\cos 2x, \\ |y| = 2 - 2^{|\sin x|}. \end{cases}$$

Эта система не меняется при замене x на $x + \pi$. Поэтому если она имеет хотя бы одно решение $(x_0; y_0)$, то и пары $(x_0 + \pi n; y_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, также будут решениями. Значит, она не может иметь одно решение. Поэтому проверяемое значение параметра b не включается в ответ задачи.

Ответ: $b = 2$. ■

□ **664.** В первом уравнении выделим полные квадраты, а во втором применим формулу для синуса тройного угла:

$$\begin{cases} (x + z)^2 + (y + z)^2 - \sin\alpha = 0, \\ x \sin^2 \frac{\alpha}{2} + y^2\sqrt{x} + \alpha^2\sqrt{z} = -\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(3 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\right). \end{cases} \qquad (69)$$

Левая часть второго уравнения больше или равна 0 (так как $x \geqslant 0$), а правая часть меньше или равна 0 (так как $\sin\frac{\alpha}{2} \geqslant 0$ при $\alpha \in [0; 2\pi]$). Поэтому второе уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x\sin^2\frac{\alpha}{2}=0, \\ y^2\sqrt{x}=0, \\ \alpha^2\sqrt{z}=0, \\ \sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(3+4\sin\frac{\alpha}{2}\right)=0. \end{cases} \tag{70}$$

Последнее уравнение на отрезке $[0;2\pi]$ имеет три корня: $\alpha=0$, $\alpha=\pi$, $\alpha=2\pi$ — только для этих трех значений параметра исходная система может иметь непустое множество решений. На этом этапе решения мы не можем утверждать, что для этих значений α исходная система действительно имеет хотя бы одно решение. Все, что мы установили, — это то, что для других значений система не имеет решений. Поэтому для завершения решения задачи нужно проверить, имеет или нет хотя бы одно решение исходная система при $\alpha=0,\pi,2\pi$.

Для каждого из этих значений α правая часть первого уравнения системы (69) равна 0, так что это уравнение превратится в систему из двух равенств: $x+z=0$ и $y+z=0$. Из них можно выразить x и y через z: $x=-z$, $y=-z$.

Поэтому при $\alpha=0,\pi,2\pi$ система (70) примет вид:

$$\begin{cases} z\sin^2\frac{\alpha}{2}=0, \\ z^2\sqrt{-z}=0, \\ \alpha^2\sqrt{z}=0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение $z=0$, которому соответствует единственное решение исходной системы: $(x;y;z)=(0;0;0)$.

Ответ: $0,\pi,2\pi$. ■

□ **666.** Первое уравнение (как уравнение относительно одной неизвестной y) имеет решение тогда и только тогда, когда параметр u принадлежит области значений функции $f(y)=\frac{9}{\pi^2}y(\pi-y)$. Эта функция — квадратичная с отрицательным старшим коэффициентом. Ее график — парабола с вершиной в точке с координатами $y_0=\frac{\pi}{2}$, $u_0=f(y_0)=\frac{9}{4}$. Поэтому ее область значений — это промежуток $\left(-\infty;\frac{9}{4}\right]$. Итак, первое уравнение имеет корень тогда и только тогда, когда $u\leqslant\frac{9}{4}$. Тот же результат мы получим, если проанализируем дискриминант квадратного уравнения $9y^2-9\pi y+\pi^2u=0$:

$$D=81\pi^2-36\pi^2u\geqslant 0\Leftrightarrow u\leqslant\frac{9}{4}.$$

Возможные решения первого уравнения заполняют всю числовую прямую.

Рассмотрим теперь второе уравнение как уравнение относительно одной неизвестной x, считая y параметром. Для его решения введём новую неизвестную $t=\cos 3x$. Для нее это уравнение примет вид:

$$y^2\pi^2t^2+2\pi^2(1+y^2)t+y^2(18+\pi^2)=0. \tag{71}$$

Второе уравнение исходной системы имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение (71) имеет хотя бы одно решение $t \in [-1; 1]$, т. е. график функции

$$g(t) = y^2\pi^2t^2 + 2\pi^2(1+y^2)t + y^2(18+\pi^2)$$

пересекает ось Ot на отрезке $[-1; 1]$.

Вид этого графика зависит от значения y.

Если $y = 0$, то $g(t) = 2\pi^2 t$ — линейная функция, которая имеет один нуль, который лежит на отрезке $[-1; 1]$.

Если $y \neq 0$, то $g(t)$ — квадратичная функция с положительным старшим коэффициентом. Ее график — парабола с вершиной в точке с абсциссой $t_0 = -1 - \frac{1}{y^2}$ (ордината вершины этой параболы не играет никакой роли в дальнейшем рассуждении). Значения $g(t)$ в характерных точках $t = -1$, $t = 1$ равны:

$$g(-1) = 18y^2 - 2\pi^2,$$
$$g(1) = y^2(18+4\pi^2) + 2\pi^2.$$

Поскольку $t_0 < -1$, на отрезке $-1 \leqslant t \leqslant 1$ функция $g(t)$ монотонно возрастает. Поэтому она пересекает ось Ot в пределах этого отрезка тогда и только тогда, когда справедливы два неравенства

$$\begin{cases} g(-1) \leqslant 0, \\ g(1) \geqslant 0. \end{cases}$$

Поскольку $g(1) > 0$, эта система сводится к одному неравенству:

$$18y^2 - 2\pi^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

Итак, второе уравнение (как уравнение относительно x) имеет решение тогда и только тогда, когда $-\frac{\pi}{3} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{3}$.

Теперь нужно вернуться к первому уравнению и выяснить, при каких значениях параметра u оно имеет хотя бы один корень на отрезке $-\frac{\pi}{3} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{3}$. Как и раньше, дело сводится к области значений функции $f(y) = -\frac{9}{\pi^2}y(\pi - y)$, но теперь нужно находить область значений $f(y)$ при изменении переменной y на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Поскольку вершина параболы $-\frac{9}{\pi^2}y(\pi - y)$ находится в точке с абсциссой $y_0 = \frac{\pi}{2}$, которая лежит справа от отрезка $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, на этом отрезке функция $f(y)$ монотонно возрастает. Поэтому искомая область значений — это отрезок

$$\left[f\left(-\frac{\pi}{3}\right); f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \equiv [-4; 2].$$

Таким образом, исходная система имеет решение тогда и только тогда, когда параметр u лежит в промежутке $[-4; 2]$.

Ответ: $u_{\max} = 2$. ■

Решения к главе 5

□ **668.** Поскольку $0{,}75 = \frac{3}{4}$, $\frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$, перейдем в логарифмах к одному основанию $\frac{3}{4}$:

$$\log_{\frac{3}{4}} \sin x \geqslant \log_{\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Это неравенство равносильно двойному неравенству:

$$0 < \sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (72)$$

Как и все простейшие тригонометрические неравенства, его нужно решать, переводя задачу с языка алгебры на язык геометрии («картинок»). Интерпретировать $\sin x$ геометрически можно двумя способами.

Проще всего это сделать с помощью графика функции $y = \sin x$. В этом случае задачу решения неравенства (72) можно сформулировать следующим образом: найти все точки из промежутка $(-1; 4)$ на оси Ox, для которых соответствующие точки синусоиды (т. е. точки $(x; \sin x)$) лежат в горизонтальной полосе $0 < y \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. Рисунок 9 сразу дает ответ задачи *в геометрическом виде.*

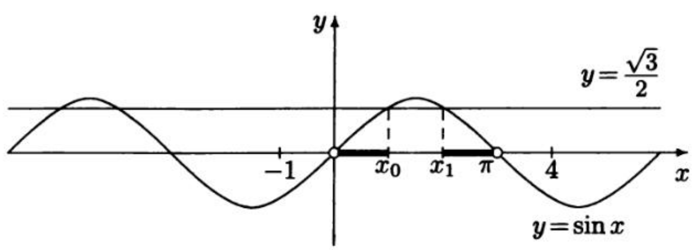


Рис. 9

Но поскольку исходная задача была сформулирована на языке алгебры, нужно (уже имеющийся) ответ перевести с языка геометрии на язык алгебры.

Как видно из рис. 9, множество решений неравенства (72) состоит из двух промежутков: левый промежуток имеет вид $(0; x_0]$, а правый — $[x_1; \pi)$, где x_0, x_1 — корни уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на интервале $(0; \pi)$.

В силу определения $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$, число x_0 — это $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, а из симметрии синусоиды следует, что $x_1 = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

Вместо графика $y = \sin x$ для решения неравенства (72) с равным успехом можно было бы использовать тригонометрическую окружность. Для этого нужно число $\sin x$ интерпретировать как проекцию на ось Oy соответствующей точки единичной окружности. Однако при этом возникают определенные проблемы с интерпретацией числа x, связанные с тем, что соответствие между точками единичной окружности и точками числовой прямой — не взаимно однозначное. Аккуратное решение этих проблем требует определенных усилий, что вряд ли оправдано в условиях экзамена. Если неизвестная величина лежит на промежутке $[0;2\pi)$ (или $[-\pi;\pi)$ и т. п.), то ситуация гораздо проще и вместо графика вполне можно использовать тригонометрическую окружность.

ОТВЕТ: $\left(0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right)$. ■

□ **669.** Область определения функции

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{-6\sin^2 2x-2\sin 2x\cdot\cos 2x+8-\sqrt{3}}}$$

это множество решений неравенства

$$-6\sin^2 2x-2\sin 2x\cdot\cos 2x+8-\sqrt{3}>0. \tag{73}$$

Решать его (как и аналогичные по внешнему виду уравнения) можно двумя способами.

Первый способ. Понизим вдвое степени тригонометрических членов за счет удвоения аргументов:

$$3\cos 4x-\sin 4x>\sqrt{3}-5.$$

Теперь преобразуем линейную комбинацию $\sin 4x$ и $\cos 4x$ в левой части с помощью метода дополнительного аргумента:

$$\cos(4x+\varphi)>\frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}}, \tag{74}$$

где $\varphi=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Для дальнейшего решения важно знать, попадает ли в промежуток $(-1;1)$ число $\frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}}$. Приближенная прикидка дает:

$$\frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}-\sqrt{250}}{10}\approx\frac{5{,}5-16}{10}=-1{,}05.$$

Поэтому весьма правдоподобной представляется гипотеза, что это число меньше -1. Докажем ее:

$$\frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}}<-1\Leftrightarrow\sqrt{3}+\sqrt{10}<5\Leftrightarrow 13+2\sqrt{30}<25\Leftrightarrow\sqrt{30}<6.$$

Равносильность этих неравенств означает, что все они либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Поскольку последнее неравенство, очевидно, истинно, то истинно и первое.

Теперь сформулируем задачу решения неравенства (74) на геометрическом языке: найти все точки на оси Ox, для которых соответствующие точки косинусоиды $f(x)=\cos(4x+\varphi)$ (т. е. точки $(x;f(x))$) лежат выше уровня $\frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}}$. Так как этот уровень ниже, чем -1, условию задачи удовлетворяют все точки x. Таким образом, исходная функция определена при всех x.

Второй способ. С помощью основного тригонометрического тождества превратим левую часть неравенства (73) в однородный многочлен второй степени относительно $a=\sin 2x$, $b=\cos 2x$:

$$(2-\sqrt{3})\sin^2 2x-2\sin 2x\cdot\cos 2x+(8-\sqrt{3})\cos^2 2x>0. \tag{75}$$

Допустим, что $\cos 2x\neq 0$. Тогда $\cos^2 2x>0$ и обе части неравенства (75) можно разделить на $\cos^2 2x$. Это даст квадратичное неравенство относительно $t = \operatorname{tg} 2x$:

$$(2-\sqrt{3})t^2 - 2t + (8-\sqrt{3}) > 0. \tag{76}$$

Поскольку

$$\frac{D}{4} = 1 - (2-\sqrt{3})(8-\sqrt{3}) = 10\sqrt{3} - 18 < 0,$$

неравенство (76) выполнено при всех t. Значит, при всех x таких, что $\cos 2x \neq 0$, неравенство (75) также выполнено.

Если $\cos 2x = 0$, то неравенство (75) примет вид:

$$\sin^2 2x > 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x > 0 \Leftrightarrow 1 > 0,$$

т. е. опять будет выполнено.

Значит, неравенство (75) справедливо при всех x.

ОТВЕТ: $\mathbb{R}$. ■

□ **670.** Выражение под знаком радикала в правой части уравнения равно $(\sqrt{3}\cos x - \sin x)^2$. Поэтому исходное уравнение можно переписать в виде: $a = |a|$, где $a = \sqrt{3}\cos x - \sin x$. Отсюда ясно, что оно равносильнонеравенству

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x \geqslant 0.$$

Для его решения преобразуем линейную комбинацию $\sin x$ и $\cos x$ в левой части с помощью метода дополнительного аргумента:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geqslant 0.$$

Как и другие простейшие тригонометрические неравенства, будем решать его графически. График функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ получается из стандартного графика $y = \cos x$ сдвигом вдоль оси Ox влево на $\frac{\pi}{6}$, так что построить его несложно. Но удобнее ввести новую неизвестную $t = x + \frac{\pi}{6}$. Для нее наше неравенство примет вид:

$$\cos t \geqslant 0. \tag{77}$$

Поэтому можно обойтись без всяких преобразований графиков. Единственное, что нужно сделать, — преобразовать заданный диапазон изменения неизвестной x, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, в соответствующий диапазон изменения неизвестной t: $\frac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{6}$.

Теперь задачу решения неравенства (77) можно сформулировать следующим образом: найти все точки из промежутка $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$ на оси Ot, для которых соответствующие точки косинусоиды (т. е. точки $(t; \cos t)$) лежат выше (нестрого) оси абсцисс. Рисунок 10 сразу дает ответ этой задачи: $\frac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

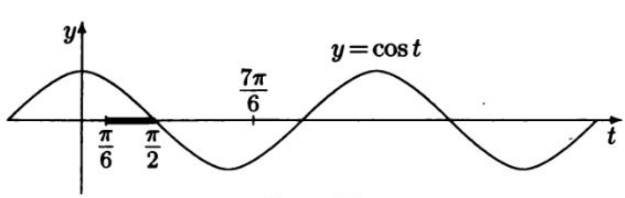


Рис. 10

Поскольку $x = t - \frac{\pi}{6}$, для исходной задачи имеем: $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$. ■

□ **671.** Прежде всего освободимся от логарифмов:

$$\begin{cases} 0 < \sin x < 1\,, \\ \cos x \geqslant \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1\,, \\ \cos x > 0\,, \\ \operatorname{tg} x \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Полученная система (как и исходное неравенство) не меняется при замене x на $x \pm 2\pi$. Поэтому если некоторое число x является решением задачи, то и числа $x \pm 2\pi$ также будут решениями. Иначе говоря, множество решений нашей задачи (обозначим его через $\mathcal{M}$) будет выдерживать сдвиги на 2π и в этом смысле будет периодическим множеством. Поэтому достаточно найти множество решений нашей задачи на промежутке $[0; 2\pi)$ (обозначим его через $\mathcal{M}_0$). Тогда основное множество решений $\mathcal{M}$ состоит из бесконечной совокупности множеств, отстоящих друг от друга на расстояние 2π:

$$\mathcal{M} = \cup_{n \in \mathbf{Z}} \{\mathcal{M}_0 + 2\pi n\}.$$

В этой формуле операция сложения множества и числа понимается как прибавление этого числа ко всем элементам множества.

На промежутке $[0; 2\pi)$ неравенства $0 < \sin x < 1$ и $\cos x > 0$ выполнены при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, а на этом интервале неравенство $\operatorname{tg} x \leqslant 1$ выполнено при $x \leqslant \frac{\pi}{4}$, т. е. $\mathcal{M}_0 = \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: $\left(2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **673.** Обозначим для сокращения записей $\log_\pi(\sin x)$ через a, $\log_\pi(\sin 2x)$ через b. Тогда исходное неравенство примет вид:

$$2ab - b^2 \leqslant a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geqslant 0.$$

Поэтому оно заведомо выполнено, если только выражения $a = \log_\pi(\sin x)$ и $b = \log_\pi(\sin 2x)$ существуют, что, в свою очередь, означает выполнение двух условий:

$$\begin{cases} \sin x > 0\,, \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0\,, \\ 2 \sin x \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0\,, \\ \cos x > 0\,. \end{cases}$$

Полученная система (как и исходное неравенство) не меняется при замене x на $x \pm 2\pi$. Поэтому множество ее решений $\mathcal{M}$ имеет вид:

$$\mathcal{M} = \cup_{n \in \mathbf{Z}} \{\mathcal{M}_0 + 2\pi n\},$$

где $\mathcal{M}_0$ — множество решений нашей задачи на промежутке $[0; 2\pi)$.

Из тригонометрического круга ясно, что на промежутке $[0; 2\pi)$ неравенства $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$ выполнены тогда и только тогда, когда $0 < x < \frac{\pi}{2}$, т. е. $\mathcal{M}_0 = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **674.** Раскрывая стандартным способом модуль, мы получим совокупность из двух систем:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sin^2 x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ -\sin^2 x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \cos 2x \geqslant 0; \end{cases} \qquad x < 0.$$

Из графика функции $y = \cos 2x$ ясно, что при $x \geqslant 0$ неравенство $\cos 2x \geqslant 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ или $\frac{3\pi}{4} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Объединяя эту совокупность отрезков с лучом $(-\infty; 0)$, мы получим ответ задачи (отрезок $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ в объединении с лучом $(-\infty; 0)$ дает множество $\left(-\infty; \frac{\pi}{4}\right]$).

Ответ: $\left(-\infty; \frac{\pi}{4}\right]$; $\left[\frac{3\pi}{4} + \pi n; \frac{5\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}_+$. ■

□ **675.** Прежде всего освободимся от логарифмов:

$$\log_{|\sin x|}(x^2 - 14x + 73) > \frac{2}{\log_5 |\sin x|}$$

$$\Updownarrow$$

$$\log_{|\sin x|}(x^2 - 14x + 73) > \log_{|\sin x|} 25$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} |\sin x| \neq 0; 1 \\ x^2 - 14x + 73 < 25. \end{cases}$$

Множество решений квадратичного неравенства $x^2 - 14x + 73 < 25 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - 14x + 48 < 0$ — интервал $(6; 8)$. Поэтому для решения нашей задачи нужно найти, в каких точках этого интервала $\sin x$ равен 0, 1 или -1, и выколоть эти точки. Таким образом, решение неравенства в конце концов свелось к решению совокупности из трех тригонометрических уравнений (с отбором решений).

Из тригонометрического круга очевидно, что $\sin x = 0; \pm 1$ в точках вида $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Из этих точек на интервал $(6; 8)$ попадают только две точки (соответствующие $n = 4$ и $n = 5$): $x = 2\pi$ и $x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: $(6; 8) \setminus \left\{2\pi; \frac{5\pi}{2}\right\}$. ■

□ **676.** Заменим член $\cos(6\pi x)$ в правой части исходного неравенства на $1 - 2\sin^2(3\pi x)$ и перейдем в логарифме к основанию 2:

$$\sin^2(3\pi x) \cdot \log_2(-x^2 + 5x - 6) \geqslant 2\sin^2(3\pi x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin^2(3\pi x) \cdot \left(\log_2(-x^2 + 5x - 6) - 2\right) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство распадается на две системы:

$$\begin{cases} \sin^2(3\pi x) \geqslant 0\,, \\ \log_2(-x^2+5x-6) \geqslant 2\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin^2(3\pi x) \leqslant 0\,, \\ \log_2(-x^2+5x-6) \leqslant 2\,. \end{cases}$$

Первая система равносильна одному неравенству

$$-x^2+5x-6 \geqslant 4 \Leftrightarrow x^2-5x+10 \leqslant 0,$$

которое не имеет решений, так как $D=-15<0$.

Вторая система сводится к системе

$$\begin{cases} 3\pi x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x^2-5x+6<0, \\ x^2-5x+10 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 2<x<3. \end{cases}$$

Из бесконечного множества чисел, задаваемых формулой $x=\frac{n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$, на интервал $(2;3)$ попадают только числа $\frac{7}{3}$ и $\frac{8}{3}$ (они соответствуют $n=7$ и $n=8$).

Отметим, что наша задача (как и задача 675) в конце концов свелась к решению тригонометрического уравнения с отбором решений.

Ответ: $\left\{\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right\}$. ■

□ **677.** Жаргонная фраза «два выражения имеют разные знаки» обычно означает, что одно из выражений положительно (строго), а второе — отрицательно (строго). Это утверждение, в свою очередь, равносильно тому, что произведение этих выражений меньше 0. Таким образом, исходная задача заключается в решении неравенства:

$$\operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{1}{\cos 2x} - 2\cos 2x\right) < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \frac{1-2\cos^2 2x}{\cos 2x} < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos 4x}{\cos x \cdot \cos 2x} > 0\,.$$

Дробь $\frac{a}{b}$ положительна тогда и только тогда, когда положительно произведение ab. Поэтому последнее неравенство равносильно неравенству

$$\sin x \cos x \cos 4x \cos 2x > 0.$$

Применяя три раза формулу для синуса двойного угла, мы получим неравенство $\sin 8x > 0$. Для его решения удобно ввести новую неизвестную $t=8x$. В итоге мы получим простейшее тригонометрическое неравенство $\sin t > 0$. Отрезку $0 \leqslant x \leqslant \pi$, на котором меняется основная переменная x, соответствует отрезок $0 \leqslant t \leqslant 8\pi$ для новой неизвестной. Из графика функции $y=\sin t$ ясно, что на этом отрезке неравенство $\sin t>0$ выполняется в четырех случаях: $0<t<\pi$, $2\pi<t<3\pi$, $4\pi<t<5\pi$, $6\pi<t<7\pi$. Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим четыре интервала: $0<x<\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{8}$.

Поскольку $\cos 2x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, для решения исходного неравенства можно использовать и метод новой неизвестной; для $y = \operatorname{tg} x$ получится стандартное дробно-рациональное неравенство, которое легко решится методом интервалов.

Ответ: $0 < x < \frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{8}$. ■

□ **678.** Заменим $|\sin x|$ на $\sqrt{1-\cos^2 x}$. Это даст возможность ввести новую неизвестную $y = \cos x$:

$$5\sqrt{1-y^2} + 12y \geqslant 13 \Leftrightarrow 5\sqrt{1-y^2} \geqslant 13 - 12y.$$

Это стандартное иррациональное неравенство, которое распадается на две системы:

$$\begin{array}{ccc} \begin{cases} 13-12y \geqslant 0, \\ 25(1-y^2) \geqslant (13-12y)^2 \end{cases} & & \begin{cases} 13-12y < 0, \\ 1-y^2 \geqslant 0 \end{cases} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \begin{cases} y \leqslant \dfrac{13}{12}, \\ 169y^2 - 312y + 144 \leqslant 0 \end{cases} & & \begin{cases} y > \dfrac{13}{12}, \\ y^2 \leqslant 1 \end{cases} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ y = \dfrac{12}{13}\,; & & \varnothing\,. \end{array}$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим простейшее тригонометрическое уравнение

$$\cos x = \frac{12}{13},$$

которое немедленно дает ответ задачи.

Ответ: $\pm \arccos \frac{12}{13} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **679.** Запишем условие задачи в виде системы

$$\begin{cases} \cos 2\alpha \leqslant -\dfrac{7}{8}, \\ \cos\alpha \leqslant -\dfrac{1}{4}\,. \end{cases}$$

Для новой неизвестной $y = \cos\alpha$ эта система примет вид:

$$\begin{cases} 2y^2 - 1 \leqslant -\dfrac{7}{8}, \\ y \leqslant -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{4} \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ y \leqslant -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}\,.$$

Искомая величина $\sin\frac{\alpha}{2}$ также может быть выражена через переменную y:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-y}{2} = \frac{10}{16}\,.$$

Поскольку никакой дополнительной информации, позволяющей определить знак $\sin\frac{\alpha}{2}$ нет, возможны два случая: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$ и $\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{10}}{4}$. ■

☐ **680.** Запишем условие задачи в виде системы

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \geqslant \dfrac{3}{5}, \\ \operatorname{tg}\alpha \leqslant \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Поскольку $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, для новой неизвестной $y = \operatorname{tg}\alpha$ эта система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{1+y^2} \geqslant \dfrac{3}{5}, \\ y \leqslant \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 10y + 3 \leqslant 0, \\ y \leqslant \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} \leqslant y \leqslant 3, \\ y \leqslant \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha,$$

искомая величина $\sin\alpha$ также может быть выражена через переменную y:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{y^2}{1+y^2} = \frac{1}{10}.$$

Поскольку никакой дополнительной информации, позволяющей определить знак $\sin\alpha$, нет, возможны два случая: $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ и $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Ответ: $\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ■

☐ **681.** Преобразуем неравенство так, чтобы в него входил только $\cos 2x$:

$$2(1-\cos^2 2x) + 3\cos 2x < 0.$$

Теперь для его решения можно ввести новую неизвестную $y = \cos 2x$:

$$2(1-y^2) + 3y < 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 3y - 2 > 0. \qquad (78)$$

Соответствующее квадратное уравнение имеет два корня: $y_1 = -\dfrac{1}{2}$, $y_2 = 2$. Поэтому множество решений неравенства (78) состоит из двух промежутков: $y < -\dfrac{1}{2}$ и $y > 2$.

Соответственно, исходное неравенство распадается на два простейших тригонометрических неравенства:

$$\cos 2x < -\frac{1}{2} \qquad\qquad \cos 2x > 2$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \qquad\qquad \varnothing.$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{3} + \pi n < x < \dfrac{2\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **682.** Преобразуем неравенство так, чтобы в него входил только $\sin 4x$:

$$2(1-2\sin^2 4x) \geqslant 3+4\sin 4x.$$

Теперь для его решения можно ввести новую неизвестную $y=\sin 4x$; после несложных преобразований мы получим:

$$(2y+1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}\ .$$

Поэтому исходное неравенство сводится к простейшему тригонометрическому уравнению $\sin 4x = -\frac{1}{2}$, откуда немедленно следует ответ задачи.

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$. ■

□ **684.** Преобразуем неравенство так, чтобы в него входил только $\sin x$:

$$5+2(1-2\sin^2 x) \leqslant 3|2\sin x-1|.$$

Теперь для его решения можно ввести новую неизвестную $y=\sin x$. В итоге мы получим стандартное неравенство с модулем:

$$|6y-3| \geqslant -4y^2+7,$$

которое распадается на два неравенства:

$$\begin{array}{cc}
6y-3 \geqslant -4y^2+7 & 6y-3 \leqslant 4y^2-7 \\
\Updownarrow & \Updownarrow \\
2y^2+3y-5 \geqslant 0 & 2y^2-3y-2 \geqslant 0 \\
\Updownarrow & \Updownarrow \\
y \leqslant -\frac{5}{2}, y \geqslant 1; & y \leqslant -\frac{1}{2}, y \geqslant 2.
\end{array}$$

Объединяя их решения, мы получим два промежутка: $y \leqslant -\frac{1}{2}$ и $y \geqslant 1$.

Соответственно, исходное неравенство распадается на два простейших тригонометрических неравенства:

$$\begin{array}{cc}
\sin x \leqslant -\frac{1}{2} & \sin x \geqslant 1 \\
\Updownarrow & \Updownarrow \\
-\frac{5\pi}{6}+2\pi n \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}; & x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.
\end{array}$$

Ответ: $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbb{Z}$, или $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. ■

□ **685.** Для новой неизвестной $y=\operatorname{tg} x$ неравенство примет вид:

$$\frac{y}{y+1} > 2.$$

Оно легко решается методом интервалов:

$$\frac{y}{y+1}-2>0 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y+1}<0 \Leftrightarrow -2<y<1\ .$$

Поэтому исходное тригонометрическое неравенство равносильно двойному неравенству

$$-2<\operatorname{tg} x<-1,$$

решение которого дается формулой $-\operatorname{arctg} 2+\pi n<x<-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $-\operatorname{arctg} 2+\pi n<x<-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. ■

□ **686.** *Первый способ.* С помощью тождеств

$$\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

можно свести неравенство к стандартному дробно-рациональному неравенству относительно переменной $t = \operatorname{tg} x$:

$$t > \frac{9-3\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{3\,\dfrac{2t}{1+t^2}-2} \Leftrightarrow t > \frac{6t^2+3}{-t^2+3t-1}.$$

Это неравенство легко решается методом интервалов:

$$t + \frac{6t^2+3}{t^2-3t+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(t+3)(t^2+1)}{t^2-3t+1} > 0 \Leftrightarrow -3 < t < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ или } t > \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Соответственно, исходное неравенство распадается на два неравенства:

$$-3 < \operatorname{tg} x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \qquad \operatorname{tg} x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{8}}{2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1,$$

а $\sqrt{2}-1 > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, первое из этих неравенств не имеет решений на промежутке $\frac{\pi}{8} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

Решение второго неравенства на промежутке $\frac{\pi}{8} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ дается формулой $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (поскольку $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > \sqrt{2}-1$).

Второй способ. С помощью приема, который мы использовали при подсчете $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, можно доказать тождество

$$\operatorname{tg} x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}, \text{ если } x \neq \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В нашей задаче $x \in \left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right)$, так что $\sin 2x \neq 0$, и мы можем записать исходное уравнение в виде:

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} > \frac{9-3\cos 2x}{3\sin 2x - 2}.$$

Для сокращения записей обозначим $\sin 2x$ через a, $\cos 2x$ через b:

$$\frac{1-b}{a} > \frac{9-3b}{3a-2} \Leftrightarrow \frac{b-3a-1}{a(3a-2)} > 0. \tag{79}$$

Поскольку $x \in \left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right)$, переменная a положительна, а переменная b меньше 1. Тогда величина $b-3a-1$ будет отрицательной. Эти соображения позволяют привести неравенство (79) к виду

$$3a - 2 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{2}{3}.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим неравенство

$$\sin 2x < \frac{2}{3}.$$

При $x \in \left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right)$ переменная $t = 2x$ лежит на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$. Так как $\sin\frac{\pi}{4} > \frac{2}{3}$, на этом промежутке множество решений неравенства $\sin t < \frac{2}{3}$ дается формулой $\pi - \arcsin\frac{2}{3} < t < \pi$. Для x это означает, что $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ (или, что то же самое, $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\pi}{2}$). ■

□ **687.** Для новой неизвестной $y = \sin x$ исходное неравенство примет вид:

$$2y - 1 \leqslant \sqrt{6y^2 - 6y - 12}.$$

Это стандартное иррациональное неравенство легко решается методом расщепления:

$$\begin{cases} 2y - 1 \geqslant 0, \\ (2y-1)^2 \leqslant 6y^2 - 6y - 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y - 1 < 0, \\ 6y^2 - 6y - 12 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} y \geqslant \frac{1}{2}, \\ 2y^2 - 2y - 13 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y < \frac{1}{2}, \\ y^2 - y - 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} y \geqslant \frac{1}{2}, \\ y \leqslant \frac{1-\sqrt{27}}{2}, y \geqslant \frac{1+\sqrt{27}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y < \frac{1}{2}, \\ y \leqslant -1, y \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$y \geqslant \frac{1+\sqrt{27}}{2}; \qquad\qquad y \leqslant -1.$$

Поэтому исходное тригонометрическое неравенство распадается на два простейших тригонометрических неравенства:

$$\sin x \geqslant \frac{1+\sqrt{27}}{2}, \qquad \sin x \leqslant -1.$$

Первое из них не имеет решений (так как $\frac{1+\sqrt{27}}{2} > 1$), а второе сводится к уравнению $\sin x = -1$, откуда немедленно следует ответ.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **688.** Второй множитель $(2\sin x + 3\cos x + 4)$ содержит линейную комбинацию $\sin x$ и $\cos x$. Ее область значений — отрезок $[-\sqrt{13}; \sqrt{13}]$. Поскольку $4 - \sqrt{13} > 0$, этот множитель положителен при всех x. Поэтому исходная задача сводится к неравенству

$$\cos x - \cos 5x > 0.$$

Превращая разность тригонометрических функций в произведение, мы получим неравенство:

$$2\sin 2x \cdot \sin 3x > 0.$$

Применим формулы для синуса двойного и тройного аргументов:

$$\sin x \cdot \cos x \cdot (3\sin x - 4\sin^3 x) > 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot (3\sin^2 x - 4\sin^4 x) > 0\,.$$

Поскольку в это неравенство в нечетной степени входит только $\cos x$, его можно решить с помощью новой неизвестной $y = \cos x$:

$$y\big(3(1-y^2) - 4(1-y^2)^2\big) > 0.$$

Получившееся неравенство легко решается методом интервалов:

$$y(y-1)(y+1)\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y < -1, -\frac{1}{2} < y < 0, \frac{1}{2} < y < 1\,.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим совокупность из трех простейших тригонометрических неравенств:

$$\cos x < -1\,, \quad -\frac{1}{2} < \cos x < 0\,, \quad \frac{1}{2} < \cos x < 1\,.$$

Первое из них, очевидно, не имеет решений.

Множество решений второго — две бесконечные совокупности интервалов: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ и $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Множество решений третьего — две бесконечные совокупности интервалов: $2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ и $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **690.** Преобразуем неравенство так, чтобы в него входил только $\cos x$:

$$\frac{1 - 4(1-\cos^2 x)}{2\cos^2 x - 1 + \cos x} \leqslant 2.$$

Теперь для его решения можно ввести новую неизвестную $y = \cos x$. В итоге мы получим стандартное дробно-рациональное неравенство:

$$\frac{1-4(1-y^2)}{2y^2 - 1 + y} \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{y + \frac{1}{2}}{(y+1)\left(y - \frac{1}{2}\right)} \geqslant 0,$$

которое легко решается методом интервалов:

$$-1 < y \leqslant -\frac{1}{2}\,, y > \frac{1}{2}\,.$$

Соответственно, исходное неравенство распадается на два простейших тригонометрических неравенства

$$-1 < \cos x \leqslant -\frac{1}{2}\,, \quad \cos x > \frac{1}{2}\,.$$

Решение первого из них дается формулой $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m \leqslant x < \pi + 2\pi m$, $\pi + 2\pi k < x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $m, k \in \mathbb{Z}$, а второго — формулой $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m \leqslant x < \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi k < x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

□ **695.** Для новой неизвестной $y = \operatorname{tg} z$ исходное неравенство превратится в логарифмическое неравенство:

$$\left(\log_y 3\right)^2 \leqslant \log_y \left(3y^2\right) \Leftrightarrow \left(\log_y 3\right)^2 \leqslant \log_y 3 + 2.$$

Его решение потребует введения еще одной переменной $z = \log_y 3$:

$$z^2 - z - 2 \leqslant 0.$$

Решением этого квадратичного неравенства является отрезок $-1 \leqslant z \leqslant 2$. Соответственно, для неизвестной y мы имеем двойное неравенство: $-1 \leqslant \log_y 3 \leqslant 2$. Оно распадается на две системы:

$$\begin{cases} 0 < y < 1\,, \\ y^2 \leqslant 3\,, \\ y \leqslant \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} y > 1\,, \\ y^2 \geqslant 3\,, \\ y \geqslant \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$0 < y \leqslant \frac{1}{3}\,; \qquad y \geqslant \sqrt{3}\,.$$

Поэтому для основной неизвестной x мы получим два простейших тригонометрических неравенства

$$0 < \operatorname{tg} x \leqslant \frac{1}{3}\,, \quad \operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}\,,$$

которые немедленно дают ответ задачи.

Ответ: $\pi n < x \leqslant \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $\frac{\pi}{3} + \pi m \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **696.** Для новой неизвестной $t = \operatorname{tg} x$ неравенство примет вид:

$$4(1-t)^{2004} + (1+t)^{2006} \geqslant 2^{2006}.$$

Имея в виду высокие степени выражений в левой части, будем решать неравенство графически. Для этого перепишем его в виде

$$4(t-1)^{2004} \geqslant 2^{2006} - (t+1)^{2006}. \tag{80}$$

График функции $f(t) = 4(t-1)^{2004}$ может быть получен из графика стандартной степенной функции $y = t^{2004}$ переносом на 1 вправо и растяжением в 4 раза вдоль оси ординат. График функции $g(t) = 2^{2006} - (t+1)^{2006}$ может быть получен из графика стандартной степенной функции $y = t^{2006}$ переносом на 1 влево, осевой симметрией относительно оси абсцисс, сдвигом на 2^{2006} вверх.

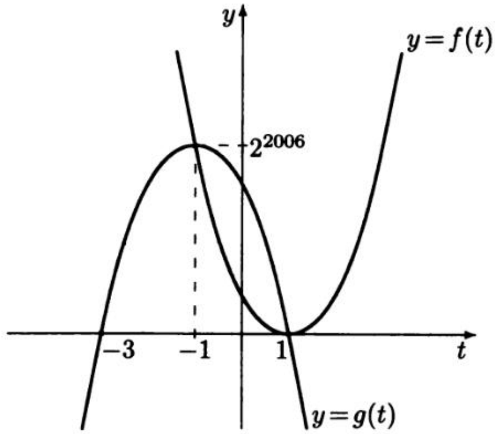


Рис. 11

Оба графика изображены на рис. 11. Из этого рисунка ясно, что решение неравенства (80) состоит из двух промежутков: $t \leqslant -1$ и $t \geqslant 1$. Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим два простейших тригонометрических неравенства: $\operatorname{tg} x \leqslant -1$ и $\operatorname{tg} x \geqslant 1$, которые немедленно дают ответ задачи.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{2} + \pi m < x \leqslant -\frac{\pi}{4} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **697.** Введем новую неизвестную $y = \sqrt{1 - \sin x}$. Для нее исходное неравенство примет вид:

$$\log_{\frac{1}{5}}(2y^2 + 2y - 2) > -1.$$

Это логарифмическое неравенство равносильно двойному неравенству $0 < 2y^2 + 2y - 2 < 5$, множество решений которого состоит из двух интервалов:

$$\frac{-1-\sqrt{15}}{2} < y < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < y < \frac{-1+\sqrt{15}}{2}.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим совокупность из двух двойных неравенств:

$$\frac{-1-\sqrt{15}}{2} < \sqrt{1-\sin x} < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < \sqrt{1-\sin x} < \frac{-1+\sqrt{15}}{2}.$$

Первое неравенство, очевидно, не имеет решений, а второе равносильно неравенству:

$$\frac{-6+\sqrt{15}}{2} < \sin x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку $\frac{-6+\sqrt{15}}{2} < -1$, а $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \in (0; 1)$, из графика функции $y = \sin x$ следует, что множество решений этого неравенства на отрезке $[0; \pi]$ состоит из двух промежутков: $\left[0; \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ и $\left(\pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \pi\right]$.

Ответ: $\left[0; \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup \left(\pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \pi\right]$. ■

□ **699.** Поскольку $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$, исходное неравенство можно записать в виде:

$$\sqrt{1 - (\cos x - \sin x)^2} < \cos x - \sin x.$$

Теперь для его решения можно ввести новую неизвестную $y = \cos x - \sin x$. Получившееся иррациональное неравенство

$$\sqrt{1 - y^2} < y$$

относится к стандартному типу и легко решается возведением в квадрат:

$$\begin{cases} 1 - y^2 < y^2, \\ y \geqslant 0, \\ 1 - y^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < y \leqslant 1\,.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим неравенства

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x - \sin x \leqslant 1,$$

которые с помощью метода дополнительного аргумента сводятся к простейшему тригонометрическому неравенству

$$\frac{1}{2} < \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Условие $|x| < \pi$ означает, что $-\pi < x < \pi$. Этому диапазону. возможных значений x соответствует следующий диапазон возможных значений переменной $t = x + \frac{\pi}{4}$: $-\frac{3\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{4}$. Из графика функции $y = \cos t$ ясно, что на этом интервале решения двойного неравенства $\frac{1}{2} < \cos t \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ даются формулами $-\frac{\pi}{3} < t \leqslant -\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4} \leqslant t < \frac{\pi}{3}$. Этим промежуткам соответствуют следующие промежутки для основной неизвестной x: $-\frac{7\pi}{12} < x \leqslant -\frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant x < \frac{\pi}{12}$.

Ответ: $0 \leqslant x < \frac{\pi}{12}$, $-\frac{7\pi}{12} < x \leqslant -\frac{\pi}{2}$. ■

□ **704.** Для сокращения записей обозначим $\sin 2x$ через a, $\cos x$ — через b. Для новых переменных исходное уравнение примет вид:

$$|a + b| = ||a| - |b||.$$

Чтобы избавиться от модулей, возведем это равенство в квадрат (в данном случае это преобразование равносильно):

$$|a+b|^2 = ||a| - |b||^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 = (|a| - |b|)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2|ab| + b^2 \Leftrightarrow ab = -|ab|\,.$$

Последнее равенство выполнено тогда и только тогда, когда $ab \leqslant 0$. Иначе говоря, исходное уравнение свелось к неравенству

$$\sin 2x \cdot \cos x \leqslant 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos^2 x \leqslant 0 \Leftrightarrow \sin x(1 - \sin^2 x) \leqslant 0,$$

которое после введения новой неизвестной $y = \sin x$ легко решается методом интервалов:

$$y(y-1)(y+1) \geqslant 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-1 \leqslant y \leqslant 0 \ \text{ или } \ y \geqslant 1$$

$$\Updownarrow$$

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 0 \ \text{ или } \ \sin x \geqslant 1.$$

Из графика функции $y=\sin x$ ясно, что на интервале $(-2\pi; 2\pi)$ первое неравенство выполнено тогда и только тогда, когда $x \in [-\pi; 0]$ или $x \in [\pi; 2\pi)$. Второе неравенство сводится к уравнению $\sin x = 1$; множество его корней на интервале $(-2\pi; 2\pi)$ состоит из двух точек: $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right\} \cup [-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi)$. ■

□ **705.** Превратим сумму тригонометрических функций в левой части исходного неравенства в произведение

$$2\sin 3x \cos 2x > 0$$

и выразим $\sin 3x$ и $\cos 2x$ через $\sin x$:

$$(3\sin x - 4\sin^3 x)\cdot(1 - 2\sin^2 x) > 0.$$

После введения новой неизвестной $y = \sin x$ это неравенство легко решается методом интервалов:

$$(3y - 4y^3)(1 - 2y^2) > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$y\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < y < -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 < y < \frac{\sqrt{2}}{2}, y > \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из графика функции $y = \sin x$ ясно, что на интервале $0 < x < 2\pi$

1) первое неравенство выполнено тогда и только тогда, когда $x \in \left(\frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}\right)$ или $x \in \left(\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right)$;
2) второе неравенство выполнено тогда и только тогда, когда $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ или $x \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$;
3) третье неравенство выполнено тогда и только тогда, когда $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Ответ: $\left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right)$. ■

□ **706.** Прежде всего избавимся от радикала, возведя обе части неравенства в квадрат:

$$\begin{cases} 6 - 10\cos x - \sin x < (\sin x - \cos x)^2, \\ 6 - 10\cos x - \sin x \geqslant 0, \\ \sin x - \cos x > 0. \end{cases} \tag{81}$$

Первое неравенство полученной системы можно упростить:

$$6 - 10\cos x - \sin x < 1 - 2\sin x\cos x \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x - 5) < 0.$$

Поскольку второй множитель отрицателен при всех x, мы получим:

$$\cos x > \frac{1}{2}.$$

Теперь система (81) примет вид:

$$\begin{cases} \cos x > \dfrac{1}{2}\,, \\ \sin x > \cos x\,, \\ \sin x + 10\cos x \leqslant 6\,. \end{cases} \tag{82}$$

Из двух первых неравенств следует, что $\sin x$ и $\cos x$ положительны. На множестве $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ это выполнено при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Ниже мы будем считать, что это условие выполнено.

В частности, при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ верно равенство $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Поэтому для решения системы (82) можно ввести новую неизвестную $y = \cos x$:

$$\begin{cases} y > \dfrac{1}{2}\,, \\ \sqrt{1-y^2} > y\,, \\ \sqrt{1-y^2} + 10y \leqslant 6\,. \end{cases}$$

На множестве $0 < y < 1$ (это следствие условия $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$) эта система равносильна системе

$$\begin{cases} y > \dfrac{1}{2}\,, \\ 1-y^2 > y^2\,, \\ 1-y^2 \leqslant (6-10y)^2\,, \\ 6-10y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > \dfrac{1}{2}\,, \\ y^2 < \dfrac{1}{2}\,, \\ 101y^2 - 120y + 35 \geqslant 0\,, \\ y \leqslant \dfrac{6}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < y \leqslant \frac{60-\sqrt{65}}{101}\,.$$

Возвращаясь к основной неизвестной, мы получим двойное неравенство

$$\frac{1}{2} < \cos x \leqslant \frac{60-\sqrt{65}}{101}\,.$$

Поскольку $\dfrac{60-\sqrt{65}}{101} \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$, из графика функции $y = \cos x$ ясно, что на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ это двойное неравенство выполнено тогда и только тогда, когда $\arccos\dfrac{60-\sqrt{65}}{101} \leqslant x < \dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: $\left[\arccos\dfrac{60-\sqrt{65}}{101}; \dfrac{\pi}{3}\right)$. ■

□ **707.** Обозначим для сокращения записей $\sin x$ через a, $\cos x$ через b. Тогда неравенство примет вид:

$$2ab - b + \sqrt{2}a > \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Если все члены перенести в левую часть, то ее можно будет разложить на множители методом группировки:

$$2b\left(a-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(a-\frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)\left(2b+\sqrt{2}\right) > 0,$$

после чего неравенство распадется на две системы:

$$\begin{cases} a > \dfrac{1}{2}\,, \\ b > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} a < \dfrac{1}{2}\,, \\ b < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{cases} \tag{83}$$

На промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ величина $a = \sin x$ неотрицательна, и поэтому с помощью основного тригонометрического тождества ее можно однозначно выразить через $b = \cos x$: $a = \sqrt{1-b^2}$. Это позволит превратить эти две системы в системы относительно одной неизвестной b:

$$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < b < \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ b > -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} b < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, b > \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ b < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < b < \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad\qquad b < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим два простейших тригонометрических неравенства:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поскольку $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$, а на промежутке $[0;\pi]$ функция $y = \cos x$ монотонно убывает, отсюда немедленно следует ответ задачи.

Вместо того чтобы сводить дело к одной неизвестной b, можно было бы в системе (83) вернуться к основной неизвестной x:

$$\begin{cases} \sin x > \dfrac{1}{2}, \\ \cos x > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x < \dfrac{1}{2}, \\ \cos x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

На отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ эти системы из простейших тригонометрических неравенств легко решаются:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}, \\ 0 \leqslant x < \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6} < x \leqslant \pi, \\ \dfrac{3\pi}{4} < x \leqslant \pi \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{4}; \qquad\qquad \frac{5\pi}{6} < x \leqslant \pi.$$

Задачу можно было бы решить и по-другому. Между точками отрезка $I = [0;\pi]$ на оси x и точками $(b;a)$ верхней половины единичной окружности (обозначим эту фигуру Φ)

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1, \\ a \geqslant 0 \end{cases} \tag{84}$$

существует взаимно однозначное соответствие (т. е. отображение $f : I \to \Phi$), при котором $a = \sin x$, $b = \cos x$:

$$f(x) = (\cos x; \sin x).$$

Обратное соответствие $g : \Phi \to I$ означает введение обычных тригонометрических координат на этой полуокружности, при котором точка $P \in \Phi$ отождествляется с величиной угла x, образованного радиус-вектором $\overrightarrow{OP}$ с положительным направлением оси абсцисс (обычно пишут $P = P_x$).

Поэтому исходную задачу можно сформулировать следующим образом: найти все точки $P_x = (b; a)$ верхней полуокружности (84), удовлетворяющие системе (83).

На плоскости $(b; a)$ система (83) задает два вертикальных прямых угла (без границ), образованных прямыми $a = \frac{1}{2}$ и $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Эти углы высекают из верхней половины единичной окружности две дуги: $P_{\frac{\pi}{6}}P_{\frac{3\pi}{4}}$ (без концов) и $P_{\frac{5\pi}{6}}P_{\pi}$ (без левого конца).

Ответ: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant \pi$. ■

□ **710.** Перейдем в логарифмах к одному основанию (скажем, 10):

$$\frac{\lg\cos x}{\lg(84 - 2x - 2x^2)} \leqslant \frac{\lg\cos x}{\lg(x + 19)},$$

перенесем все члены в левую часть:

$$\frac{\lg\cos x}{\lg(84 - 2x - 2x^2)} - \frac{\lg\cos x}{\lg(x + 19)} \leqslant 0$$

и вычтем дроби:

$$\lg\cos x \cdot \frac{\lg(x + 19) - \lg(-2x^2 - 2x + 84)}{\lg(-2x^2 - 2x + 84)\cdot\lg(x + 19)} \leqslant 0.$$

На множестве $a > 0$, $b > 0$ знаки выражений $\lg a - \lg b$ и $a - b$ совпадают. В частности, на множестве $a > 0$ совпадают знаки выражений $\lg a$ и $a - 1$. Поэтому последнее неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 19 > 0, \\ -2x^2 - 2x + 84 > 0, \\ \lg\cos x \cdot \dfrac{(x + 19) - (-2x^2 - 2x + 84)}{(-2x^2 - 2x + 84 - 1)\cdot(x + 19 - 1)} \leqslant 0. \end{cases}$$

Множество решений неравенства $-2x^2 - 2x + 84 > 0$ — это интервал $(-7; 6)$. На этом множестве неравенство $x + 19 > 0$, очевидно, выполнено и поэтому его можно не учитывать.

Третье неравенство системы решим методом интервалов. Для этого найдем распределение знаков множителей $A = \lg\cos x$ и

$$B = \frac{(x + 19) - (-2x^2 - 2x + 84)}{(-2x^2 - 2x + 84 - 1)\cdot(x + 19 - 1)} = -\frac{2x^2 + 3x - 65)}{(2x^2 + 2x - 83)\cdot(x + 18)}.$$

При этом можно ограничиться интервалом $(-7; 6)$, что автоматически учитывает два первых неравенства системы.

На множестве $(-7; 6)$ выражение A отрицательно на интервалах $(-7; -2\pi)$, $\left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; 6\right)$, равно нулю в точках -2π и 0, не существует на отрезках $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

На множестве $(-7; 6)$ выражение B отрицательно на интервалах $\left(-7; \frac{-1 - \sqrt{167}}{2}\right)$, $\left(-\frac{13}{2}; 5\right)$, $\left(\frac{-1 + \sqrt{167}}{2}; 6\right)$, положительно на интервалах

$\left(\frac{-1-\sqrt{167}}{2};-\frac{13}{2}\right)$, $\left(5;\frac{-1+\sqrt{167}}{2}\right)$, равно нулю в точках $-\frac{13}{2}$ и 5, не существует в точках $\frac{-1-\sqrt{167}}{2}$ и $\frac{-1+\sqrt{167}}{2}$.

Описанное распределение знаков выражений A и B автоматически дает распределение знаков произведения AB и тем самым решение неравенства $AB \leqslant 0$.

Ответ: $\left(-\frac{1+\sqrt{167}}{2};-\frac{13}{2}\right] \cup \left[5;\frac{-1+\sqrt{167}}{2}\right) \cup \{-2\pi, 0\}$. ■

□ **711.** Исходное неравенство распадается на две системы:

$$\begin{cases} \sqrt{4\sin^2 x-1} \geqslant 0, \\ \log_{\sin x}\frac{x-5}{2x-1} \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{4\sin^2 x-1} \leqslant 0, \\ \log_{\sin x}\frac{x-5}{2x-1} \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} 4\sin^2 x-1 \geqslant 0, \\ 0<\frac{x-5}{2x-1} \leqslant 1, \\ 0<\sin x<1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\sin^2 x-1 = 0, \\ \frac{x-5}{2x-1} \geqslant 1, \\ 0<\sin x<1 \end{cases}.$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant \sin x < 1, \\ x \leqslant -4, x>5; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ -4 \leqslant x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Теперь займемся решением этих систем.

Решение неравенства $\frac{1}{2} \leqslant \sin x < 1$ на промежутке $[0;2\pi)$ имеет вид:

$$\mathcal{M}_0 = \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \equiv \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right].$$

Множество решений при всех x является объединением множеств $\mathcal{M}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, которые получаются из $\mathcal{M}_0$ сдвигом на $2\pi n$. Множества $\mathcal{M}_n$, отвечающие значениям параметра n, отличным от 0 и -1, лежат в области $(-\infty;-4] \cup (5;+\infty)$ и поэтому включаются в ответ исходной задачи. Множество $\mathcal{M}_0$ целиком лежит вне этой области, а из множества $\mathcal{M}_{-1}$ в эту область попадают только промежутки $\left[-\frac{11\pi}{6};-\frac{3\pi}{2}\right)$ и $\left(-\frac{3\pi}{2};-4\right]$; они также включаются в ответ исходной задачи.

Вторая система сводится к решению уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ на промежутке $-4 \leqslant x < \frac{1}{2}$, что дает еще одно решение: $x = -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: $\left\{-\frac{7\pi}{6}\right\} \cup \left(-\frac{3\pi}{2};-4\right] \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$
$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0;-1} \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$. ■

□ **712.** Логарифм в левой части исходного неравенства равен 2. Поэтому это неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \log_{\cos x - \frac{1}{2}}\left(\cos^2 x - \cos x - x^2 - 14x - \dfrac{51}{4}\right) \leqslant 2\,, \\ 0 < \cos x < 1\,. \end{cases}$$

Появившееся здесь неравенство $0 < \cos x < 1$ вытекает из исходного неравенства и обеспечивает обратимость проделанного преобразования.

Выражение $\cos x - \dfrac{1}{2}$, которое стоит в основании оставшегося логарифма, не может быть больше 1, так как в противном случае $\cos x$ был бы больше $\dfrac{3}{2}$. Поэтому $\cos x - \dfrac{1}{2} \in (0; 1)$, что позволяет произвести дальнейшие упрощения:

$$\begin{cases} \cos^2 x - \cos x - x^2 - 14x - \dfrac{51}{4} \geqslant \left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)^2\,, \\ 0 < \cos x - \dfrac{1}{2} < 1\,, \\ 0 < \cos x < 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 14x + 13 \leqslant 0\,, \\ \dfrac{1}{2} < \cos x < 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -13 \leqslant x \leqslant -1\,, \\ \dfrac{1}{2} < \cos x < 1\,. \end{cases}$$

Таким образом, задача свелась к решению неравенства $\dfrac{1}{2} < \cos x < 1$ на отрезке $-13 \leqslant x \leqslant -1$.

На этом отрезке горизонтальная прямая $y = \dfrac{1}{2}$ пересекает график функции $y = \cos x$ в точках $-\dfrac{11\pi}{3}$, $-\dfrac{7\pi}{3}$, $-\dfrac{5\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{3}$. Поэтому множество решений неравенства $\cos x > \dfrac{1}{2}$ состоит из трех промежутков $\left[-13; -\dfrac{11\pi}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{7\pi}{3}; -\dfrac{5\pi}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3}; -1\right]$. Из двух первых промежутков нужно выколоть точки -4π и -2π соответственно, в которых $\cos x$ обращается в 1.

ОТВЕТ: $[-13; -4\pi) \cup \left(-4\pi; -\dfrac{11\pi}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{7\pi}{3}; -2\pi\right) \cup \left(-2\pi; -\dfrac{5\pi}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{3}; -1\right]$. ■

□ **713.** Цепочка неравенств

$$\sin x \leqslant \sin 2x \leqslant \sin 3x \leqslant \sin 4x \leqslant \sin 5x$$

означает систему неравенств:

$$\begin{cases} \sin 2x - \sin x \geqslant 0\,, \\ \sin 3x - \sin 2x \geqslant 0\,, \\ \sin 4x - \sin 3x \geqslant 0\,, \\ \sin 5x - \sin 4x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} \geqslant 0\,, \\ 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{5x}{2} \geqslant 0\,, \\ 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{7x}{2} \geqslant 0\,, \\ 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{9x}{2} \geqslant 0\,. \end{cases} \qquad (85)$$

Если $x \in [0; 2\pi]$, то $\frac{x}{2} \in [0; \pi]$. На этом отрезке $\sin\frac{x}{2}$ неотрицателен, причем если $x \in (0; 2\pi)$, то $\sin\frac{x}{2} > 0$, а если $x = 0$ или 2π, то $\sin\frac{x}{2} = 0$.

Точки 0 и 2π, очевидно, являются решениями исходной задачи (все синусы в этих точках равны 0). Поэтому дальше будем считать, что $0 < x < 2\pi$. Поскольку на этом интервале $\sin\frac{x}{2}$ положителен, система неравенств (85) сведется к системе

$$\begin{cases} \cos 3t \geqslant 0\,, \\ \cos 5t \geqslant 0\,, \\ \cos 7t \geqslant 0\,, \\ \cos 9t \geqslant 0\,. \end{cases} \tag{86}$$

где для сокращения записей мы обозначили $\frac{x}{2}$ через t. Условие $0 < x < 2\pi$ означает, что $0 < t < \pi$.

Решим первое неравенство системы (86). Если $t \in (0; \pi)$, то $u = 3t \in (0; 3\pi)$. Из графика функции $y = \cos u$ ясно, что на интервале $0 < u < 3\pi$ неравенство $\cos u \geqslant 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $u \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ или $u \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$. Для переменной $t = \frac{u}{3}$ это означает, что $t \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right]$ или $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$ — дальше будем предполагать эти условия выполненными.

Теперь перейдем ко второму неравенству системы (86). Если $t \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right]$ или $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$, то $v = 5t$ лежит на промежутке $\left(0; \frac{5\pi}{6}\right]$ или $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{25\pi}{6}\right]$. Из графика функции $y = \cos v$ ясно, что на этих промежутках неравенство $\cos v \geqslant 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $v \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, $v = \frac{5\pi}{2}$ или $v \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{25\pi}{6}\right]$. Для переменной $t = \frac{v}{5}$ это означает, что $t \in \left(0; \frac{\pi}{10}\right]$, $t = \frac{\pi}{2}$ или $t \in \left[\frac{7\pi}{10}; \frac{5\pi}{6}\right]$ — дальше будем предполагать эти условия выполненными.

Теперь перейдем к третьему неравенству системы (86). Если $t \in \left(0; \frac{\pi}{10}\right]$, $t = \frac{\pi}{2}$ или $t \in \left[\frac{7\pi}{10}; \frac{5\pi}{6}\right]$, то $z = 7t$ лежит на промежутке $\left(0; \frac{7\pi}{10}\right]$ или $\left[\frac{49\pi}{10}; \frac{35\pi}{6}\right]$, либо $z = \frac{7\pi}{2}$. Из графика функции $y = \cos z$ ясно, что на этом множестве неравенство $\cos z \geqslant 0$ справедливо тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий $z \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, $z \in \left[\frac{11\pi}{2}; \frac{35\pi}{6}\right]$, $z = \frac{7\pi}{2}$. Для переменной $t = \frac{z}{7}$ это означает, что выполнено одно из условий $t \in \left(0; \frac{\pi}{14}\right]$, $t \in \left[\frac{11\pi}{14}; \frac{5\pi}{6}\right]$ или $t = \frac{\pi}{2}$.

И наконец, перейдем к последнему неравенству системы (86). Если $t \in \left(0; \frac{\pi}{14}\right]$, $t \in \left[\frac{11\pi}{14}; \frac{5\pi}{6}\right]$ или $t = \frac{\pi}{2}$, то $w = 9t$ удовлетворяет одному из условий $w \in \left(0; \frac{9\pi}{14}\right]$, $w \in \left[\frac{99\pi}{14}; \frac{45\pi}{6}\right]$ или $w = \frac{9\pi}{2}$. Из графика функции $y = \cos w$ ясно, что на этом множестве неравенство $\cos w \geqslant 0$ справедливо тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий $w \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, $w = \frac{15\pi}{2}$, $w = \frac{9\pi}{2}$. Для переменной $t = \frac{w}{9}$ это означает, что выполнено одно из условий $t \in \left(0; \frac{\pi}{18}\right]$, $t = \frac{5\pi}{6}$, $t = \frac{\pi}{2}$.

Возвращаясь к основной неизвестной $x = 2t$, мы получим ответ задачи.

Ответ: $\left[0; \frac{\pi}{9}\right] \cup \left\{\pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$. ■

□ **714.** Превратим сумму тригонометрических функций в левой части неравенства в произведение:

$$2\sin\frac{4x^2-3x-1}{x^2-1}\cdot\cos\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1} > 0.$$

Трехчлены $4x^2-3x-1$ и $2x^2+3x+1$ можно разложить на линейные множители:

$$4x^2-3x-1 = (4x+1)(x-1)\,, \tag{87}$$

$$2x^2+3x+1 = (2x+1)(x+1)\,, \tag{88}$$

так что можно произвести сокращение дробей:

$$\sin\frac{4x+1}{x+1}\cdot\cos\frac{2x+1}{x-1} > 0. \tag{89}$$

В принципе сейчас можно разбить это неравенство на две системы:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{4x+1}{x+1} > 0\,,\\[2mm] \cos\dfrac{2x+1}{x-1} > 0\,,\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin\dfrac{4x+1}{x+1} < 0\,,\\[2mm] \cos\dfrac{2x+1}{x-1} < 0\end{cases}$$

и решить получившиеся простейшие тригонометрические неравенства:

$$\begin{cases}2\pi n < \dfrac{4x+1}{x+1} < \pi + 2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}\,,\\[2mm] -\frac{\pi}{2} + 2\pi m < \dfrac{2x+1}{x-1} < \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}\,,\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\pi + 2\pi n < \dfrac{4x+1}{x+1} < 2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}\,,\\[2mm] \frac{\pi}{2} + 2\pi m < \dfrac{2x+1}{x-1} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, \quad m\in\mathbb{Z}\,.\end{cases}$$

Однако дальнейшее решение становится труднообозримым. Альтернативой этому прямому методу решения неравенства (89) может служить метод интервалов. В соответствии с этим методом нужно найти распределение знаков каждого из двух сомножителей (в данном случае только в целых точках, не равных ± 1), а затем (по правилу знаков) скомпоновать распределение знаков произведения.

Ключевым для дальнейшего решения является следующее соображение. Функции $u = \dfrac{4x+1}{x+1}$ и $v = \dfrac{2x+1}{x-1}$ — это стандартные дробно-линейные функции. Их графиками являются гиперболы с вертикальными асимптотами $x=-1$ и $x=1$ соответственно и горизонтальными асимптотами $y=4$ и $y=2$ соответственно. Поэтому, если x — достаточно большое число, то $u\approx 4$, $v\approx 2$. Соответственно, $\sin u \approx \sin 4 < 0$, $\cos v \approx \cos 2 < 0$. Следовательно, $\sin u\cdot\cos v > 0$, т. е. все достаточно большие числа являются решениями неравенства (89). Множество оставшихся целых чисел будет конечным, и для этих чисел вопрос об истинности неравенства (89) мы решим прямой проверкой.

Придадим теперь точный смысл фразе «достаточно большое число».

Если $x > -1$, то функция $u = \dfrac{4x+1}{x+1}$ монотонно возрастает, имея своим пределом число 4. В последовательных целых точках она принимает следующие значения: $u(0) = 1$, $u(1) = \frac{5}{2}$ (отметим, что при $x = 1$ исходная задача

Таблица 1

x	$\leqslant -6$	-5	-4	-3	-2	0	2	$\geqslant 3$
$\sin u$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\cos v$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\sin u \cos v$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

не определена), $u(2) = 3$, $u(3) = \frac{13}{4}$, и т. д. Числа $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ лежат на интервале $(0; \pi)$, так что $\sin u > 0$. Число $u(3)$ стало больше π; следовательно, и числа $u(4), u(5), \ldots$ больше π. С другой стороны, все они меньше $4 < 2\pi$. Поэтому для всех этих чисел $\sin u < 0$.

Аналогичные рассуждения показывают, что $\sin u(-2) = \sin 7 > 0$, а для чисел $u(-3), u(-4), \ldots$ величина $\sin u$ отрицательна.

Функция $v = \frac{2x+1}{x-1}$ при $x > 1$ монотонно убывает, имея своим пределом число 2. В последовательных целых точках она принимает следующие значения: $v(2) = 5$, $v(3) = \frac{7}{2}$, $v(4) = 3$ и т. д. Число $v(2) = 5$ лежит на интервале $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, так что $\cos v > 0$. Число $v(3)$ стало меньше $\frac{3\pi}{2}$; следовательно, и числа $v(4), v(5), \ldots$ меньше $\frac{3\pi}{2}$. С другой стороны, все они больше $2 > \frac{\pi}{2}$. Поэтому для всех этих чисел $\cos v < 0$.

Аналогичные рассуждения показывают, что $\cos v(0) = \cos(-1) > 0$, $\cos v(-1) = \cos\frac{1}{2} > 0$ (отметим, что при $x = -1$ исходная задача не определена), $\cos v(-2) = \cos 1 > 0$, $\cos v(-3) = \cos\frac{5}{4} > 0$, $\cos v(-4) = \cos\frac{7}{5} > 0$, $\cos v(-5) = \cos\frac{3}{2} > 0$, а для чисел $v(-6) = \frac{11}{7}, v(-7) = \frac{13}{8}, \ldots$ величина $\cos v$ отрицательна (здесь мы используем то, что $\pi = 3{,}1415\ldots$; поэтому число $2v(-6) = \frac{22}{7} = 3{,}1428\ldots$ больше, чем π).

Полученные результаты о знаках выражений $\sin u(x)$ и $\cos v(x)$ для целочисленных значений x (исключая $x = \pm 1$, для которых задача не определена) сведены в табл. 1. Из этой таблицы немедленно следует ответ задачи.

Ответ: $\mathbb{Z} \setminus \{-5; -4; -3; -1; 1\}$. ■

□ **715.** Превратим разность тригонометрических функций в знаменателе дроби в левой части исходного неравенства в произведение:

$$\frac{3 - x - \sqrt{5 - x^2}}{\sin\frac{3x-12}{8} \cdot \sin\frac{x-2}{8}} \leqslant 0.$$

Обозначим функцию в левой части этого неравенства через $f(x)$:

$$f(x) = \frac{3 - x - \sqrt{5 - x^2}}{\sin\frac{3x-12}{8} \cdot \sin\frac{x-2}{8}}$$

и будем решать неравенство $f(x) \leqslant 0$ методом интервалов.

1. Прежде всего нужно найти область определения $f(x)$, т. е. решить систему:

$$\begin{cases} 5-x^2 \geqslant 0\,, \\ \sin\dfrac{3x-12}{8} \neq 0\,, \\ \sin\dfrac{x-2}{8} \neq 0\,. \end{cases}$$

Первое неравенство выполнено при $-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant 5$. Теперь из этого отрезка нужно выколоть точки, где $\sin\dfrac{3x-12}{8}=0$ или $\sin\dfrac{x-2}{8}=0$, т. е. точки вида $x=4+\dfrac{8}{3}\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ или $x=2+8\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Из этих точек на отрезок $-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant 5$ попадает только $x=2$. Поэтому область определения функции $f(x)$ состоит из двух промежутков: $[-\sqrt{5};2)$ и $(2\sqrt{5}]$.

2. Теперь нужно найти нули функции $f(x)$, т. е. решить уравнение:

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\sin\dfrac{3x-12}{8}\cdot\sin\dfrac{x-2}{8}}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{5-x^2}=3-x\,, \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x=1\,.$$

3. Найденными точками область определения $f(x)$ разбилась на три интервала: $(-\sqrt{5};1)$, $(1;2)$, $(2;\sqrt{5})$. Поскольку $f(x)$ непрерывна внутри каждого из этих интервалов, на каждом из них $f(x)$ сохраняет постоянный знак. Чтобы его определить, нужно взять по одной точке из каждого интервала и вычислить значение $f(x)$ в этой точке:

$$f(-1)=\frac{2}{\sin\dfrac{15}{8}\cdot\sin\dfrac{3}{8}}>0,$$

$$f(1{,}5)=\frac{1{,}5-\sqrt{2{,}75}}{\sin\dfrac{15}{16}\cdot\sin\dfrac{1}{16}}<0,$$

$$f(2{,}1)=-\frac{0{,}9-\sqrt{0{,}59}}{\sin\dfrac{5{,}7}{8}\cdot\sin\dfrac{0{,}1}{8}}<0.$$

Граничные точки нужно проверить отдельно:

$$f(-\sqrt{5})=\frac{3+\sqrt{5}}{\sin\dfrac{3\sqrt{5}+12}{8}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{5}+2}{8}}>0,$$

$$f(1)=0,$$

$$f(\sqrt{5})=\frac{3-\sqrt{5}}{\sin\dfrac{3\sqrt{5}-12}{8}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{5}-2}{8}}<0.$$

Проведенные рассуждения позволяют немедленно выписать ответ задачи.

Относительная громоздкость этого решения является обратной стороной его достоинства — универсальности (этим методом, в принципе, можно решить любое неравенство).

Используя специфику исходного неравенства, можно дать и немного более короткое решение.

Ключевая идея этого решения заключается в использовании для упрощения исходного неравенства следующего простого утверждения: *если на множестве $\mathcal{D}$ функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает, то для любых $a, b \in \mathcal{D}$ числа $f(a) - f(b)$ и $a - b$ имеют одинаковые знаки.* Действительно,

$$f(a) - f(b) > 0 \Leftrightarrow f(a) > f(b) \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow a - b > 0,$$
$$f(a) - f(b) < 0 \Leftrightarrow f(a) < f(b) \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow a - b < 0,$$
$$f(a) - f(b) = 0 \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow a - b = 0.$$

Числитель дроби в левой части исходного неравенства определен на множестве $\mathcal{D} = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$. На этом множестве выражение $3 - x > 0$, и поэтому его можно представить как $\sqrt{(3-x)^2}$. Поскольку функция $f(x) = \sqrt{x}$ монотонно возрастает, применяя сформулированное выше утверждение для $f(x) = \sqrt{x}$, $a = (3 - x)$, $b = 5 - x^2$, мы получим, что знаки выражений $f(a) - f(b) = \sqrt{(3-x)^2} - \sqrt{5 - x^2}$ и $a - b = (3-x)^2 - (5 - x^2) = 2x^2 - 6x + 4$ совпадают. Для решения неравенства вида $\frac{A}{B} \geqslant 0$ важны лишь знаки выражений A и B. Поэтому числитель исходного неравенства можно заменить на квадратный трехчлен $2x^2 - 6x + 4$ (сохранив неравенство $-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}$, описывающее область определения числителя).

Знаменатель дроби в левой части исходного неравенства, вообще говоря, упростить подобным образом нельзя, так как $f(x) = \cos x$ является колеблющейся функцией. Однако на множестве $-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}$ (а только при этих значениях неизвестной и имеет смысл рассматривать знаменатель) выражения $u = \frac{2x-7}{4}$ и $v = \frac{x-5}{4}$ принимают значения из промежутка $[-\pi; 0]$, где $f(x) = \cos x$ монотонно возрастает. Действительно, оба этих выражения являются линейными функциями от x. Поэтому справедливы двойные неравенства

$$-\frac{2\sqrt{5}+7}{4} \leqslant u \leqslant \frac{2\sqrt{5}-7}{4},$$
$$-\frac{\sqrt{5}+5}{4} \leqslant v \leqslant \frac{\sqrt{5}-5}{4}.$$

Используя приближение для $\sqrt{5}$ с избытком, $\sqrt{5} < 2{,}3$, мы получим, что

$$-\pi < -2{,}9 \leqslant u \leqslant -0{,}6 < 0,$$
$$-\pi < -1{,}825 \leqslant v \leqslant -0{,}675 < 0.$$

Поэтому знаменатель исходного неравенства можно заменить на $\frac{2x-7}{4} - \frac{x-5}{4} = \frac{x-2}{4}$.

Таким образом, на множестве $-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}$ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} \geqslant 0.$$

Множество решений последнего неравенства — это луч $x \geqslant 1$ с выколотой точкой $x = 2$. Пересекая это множество с множеством $-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}$, мы получим ответ.

Ответ: $[1; \sqrt{5}] \setminus \{2\}$. ■

□ **716.** Применяя тождество (8), доказанное при решении задачи 83, мы сведем неравенство

$$\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n < 0$$

к неравенству:

$$\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) > \cos\frac{1}{2}.$$

Множество решений неравенства $\cos\left(t + \frac{1}{2}\right) > \cos\frac{1}{2}$ состоит из бесконечной (в обе стороны) совокупности интервалов вида $-1 + 2\pi k < t < 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку длина каждого интервала равна 1, а для $k \neq 0$ его концы — иррациональные числа, на каждом таком интервале находится ровно одно целое число (интервал, отвечающий $k = 0$, не содержит целых чисел). Пусть n_k — то целое число, которое попадает на интервал $-1 + 2\pi k < t < 2\pi k$. Последовательность n_k, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, является возрастающей, поскольку правый конец интервала $-1 + 2\pi k < t < 2\pi k$ меньше левого конца интервала $-1 + 2\pi(k+1) < t < 2\pi(k+1)$. Поскольку $n_{-1} \in (-1 - 2\pi; -2\pi)$, $n_1 \in (-1 + 2\pi; 2\pi)$, натуральными числами будут $n_1, n_2, \ldots$. Пятое из них, n_5, лежит на интервале $(-1 + 10\pi; 10\pi)$ и, значит, тем более, на интервале $(30{,}4; 31{,}5)$. Следовательно, $n_5 = 31$.

Ответ: $n = 31$. ■

□ **717.** Поскольку выражение $y - x^2 - 1$ стоит под знаком радикала, оно неотрицательно:

$$y - x^2 - 1 \geqslant 0.$$

Из этого неравенства, в свою очередь, следует, что $y \geqslant x^2 + 1 \geqslant 1$.

С другой стороны,

$$y^2 \leqslant \cos x - \sqrt{y - x^2 - 1} \leqslant 1 - 0 = 1,$$

т. е. $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Учитывая неравенство $y \geqslant 1$, мы получим, что $y = 1$.

Если $y = 1$, то неравенство $y - x^2 - 1 \geqslant 0$ примет вид $-x^2 \geqslant 0$, откуда $x = 0$.

Итак, если исходное неравенство имеет хотя бы одно решение $(x; y)$, то $x = 0$, $y = 1$.

Подставляя эту пару в исходное неравенство, мы получим истинное числовое неравенство, т. е. пара $(0; 1)$ является решением исходного неравенства.

Ответ: $x = 0; y = 1$. ■

□ **718.** Если $x \geqslant 3$ или $x \leqslant 1$, то квадратный трехчлен $-x^2 + 4x - 3 = -(x-1)(x-3)$ меньше или равен 0. С другой стороны, $\log_2(\cos^2 \pi x + 1)$ всегда больше или равен 0. Поэтому левая часть исходного неравенства меньше или равна 0, так что оно не имеет решений.

Если $1 < x < 3$, то квадратный трехчлен $-x^2 + 4x - 3$ положителен. При этом его наибольшее значение равно 1 (оно достигается при $x = 2$). С другой стороны, $\log_2(\cos^2 \pi x + 1)$ всегда меньше или равен 1 (так как $\cos^2 \pi x \leqslant 1$). Поэтому левая часть исходного неравенства неотрицательна и меньше или равна 1, причем если $-x^2+4x-3$ или $\log_2(\cos^2 \pi x+1)$ строго меньше 1, то левая часть исходного неравенства строго меньше 1. Таким образом, на множестве $1 < x < 3$ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} -x^2+4x-3=1\,, \\ \log_2(\cos^2 \pi x+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\,, \\ \cos^2 \pi x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Поскольку число 2 лежит на интервале $(1;3)$, оно является решением.

Ответ: $\{2\}$. ■

□ **721.** Обозначим левую часть исходного неравенства через $f(x)$, а правую — через $g(x)$ и оценим их области значений.

При изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ переменная $u=\cos x$ меняется от -1 до 1. Следовательно, выражение $v=3^{1-u}$ меняется от 1 до 9, выражение $z=3^v$ — от 3 до 3^9, $t=13+z$ — от 16 до $13+3^9$, $f(x)=\sqrt[4]{t}$ — от 2 до $\sqrt[4]{13+3^9}$.

Область значений выражения $p=-2x^2$ — промежуток $(-\infty;0]$. Следовательно, область значений выражения $q=5e^p-1$ — промежуток $(-1;4]$, а область значений выражения $g(x)=\sqrt{q}$ — промежуток $[0;2]$.

Поскольку $f(x)\geqslant 2$, а $g(x)\leqslant 2$, неравенство $f(x)\leqslant g(x)$ может выполняться тогда и только тогда, когда одновременно $f(x)=2$ и $g(x)=2$.

Из проведенных рассуждений ясно, что нижняя граница значений $f(x)$ (т. е. 2) достигается при

$$t=16 \Leftrightarrow z=3 \Leftrightarrow v=1 \Leftrightarrow u=1 \Leftrightarrow \cos x=1,$$

верхняя граница значений $g(x)$ достигается при

$$q=4 \Leftrightarrow p=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Таким образом, исходное неравенство может выполняться тогда и только тогда, когда $\cos x=1$ и $x=0$, что равносильно $x=0$.

Ответ: $x=0$. ■

□ **722.** Внешний вид задачи (суперпозиция показательной и тригонометрической функций в левой части и тригонометрическая функция в правой) подсказывает, что неравенство, видимо, следует решать методом оценок, причем для успеха необходимо получить оценки вида левая часть $\leqslant C$, правая часть $\geqslant C$, где C — некоторая константа.

Имея в виду это соображение, оценим левую часть сверху, а правую часть снизу.

Для левой части это означает оценку выражения $\cos\frac{x}{2}$ сверху. Альтернативы здесь нет: $\cos\frac{x}{2}\leqslant 1$, так что левая часть неравенства меньше или равна 1.

Поэтому для правой части должна получиться оценка вида: правая часть $\geqslant 1$.

Записывая правую часть неравенства как $1+(\sin x-\sin 7x)^2$, мы действительно получаем это неравенство.

Из этих оценок следует, что исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} e^{\cos\frac{x}{2}-1} = 1\,, \\ 1 + (\sin x - \sin 7x)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{x}{2} = 1\,, \\ \sin x - \sin 7x = 0\,. \end{cases}$$

Решение первого уравнения дается формулой $x = 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Простая подстановка показывает, что вся эта серия удовлетворяет и второму уравнению.

ОТВЕТ: $x = 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **723.** Поскольку $\sin x$ и $\cos x$ лежат на отрезке $[0; 1]$, справедливы неравенства

$$\sqrt{\sin x} \geqslant \sin^2 x,$$
$$\sqrt{\cos x} \geqslant \cos^2 x.$$

Поэтому

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} = \sin^2 x, \\ \sqrt{\cos x} = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0; 1, \\ \cos x = 0; 1. \end{cases}$$

Поэтому исходное неравенство выполнено всюду, где определено, исключая точки, в которых $\sin x$ и $\cos x$ одновременно равны 0 или 1 (в любой из двух возможных комбинаций: 0, 1 и 1, 0). Иначе говоря, исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ 0 < \cos x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ОТВЕТ: $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **727.** Для сокращения записей обозначим $\log_2 x$ через a, $\cos\frac{\pi(47-8x)}{45}$ через b. Тогда исходное неравенство примет вид:

$$9a^2 + 4(8b^2 - 8b - 7)a + 36 \leqslant 0. \tag{90}$$

Рассмотрим его как квадратичное неравенство относительно одной неизвестной a. Поскольку старший коэффициент положителен, оно имеет решение только, если дискриминант неотрицателен:

$$4(8b^2 - 8b - 7)^2 - 9 \cdot 36 \geqslant 0 \Leftrightarrow (8b^2 - 8b - 7)^2 \geqslant 81\,.$$

Это неравенство (относительно неизвестной b) распадается на два неравенства:

$$\begin{array}{cc} 8b^2 - 8b - 7 \geqslant 9 & 8b^2 - 8b - 7 \leqslant -9 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ b^2 - b - 2 \geqslant 0 & (2b-1)^2 \leqslant 0 \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ b \leqslant -1, b \geqslant 2\,; & b = \frac{1}{2}\,. \end{array}$$

Поскольку $b = \cos\frac{\pi(47-8x)}{45}$, отсюда следует только две возможности: $b = -1$ и $b = \frac{1}{2}$.

В первом случае неравенство (90) примет вид:

$$9a^2+36a+36\leqslant 0 \Leftrightarrow (a+2)^2\leqslant 0 \Leftrightarrow a=-2.$$

Во втором случае неравенство (90) примет вид:

$$9a^2-36a+36\leqslant 0 \Leftrightarrow (a-2)^2\leqslant 0 \Leftrightarrow a=2.$$

Вспоминая, что скрывалось за буквами a и b, мы получим совокупность из двух систем (которая, очевидно, равносильна исходному неравенству):

$$\begin{cases}\log_2 x=-2\,,\\ \cos\dfrac{\pi(47-8x)}{45}=-1\,,\end{cases}\qquad \begin{cases}\log_2 x=2\,,\\ \cos\dfrac{\pi(47-8x)}{45}=\dfrac{1}{2}\,.\end{cases}$$

Первые уравнения этих систем имеют по одному корню: $x=\frac{1}{4}$ и $x=4$ соответственно. Прямая подстановка показывает, что каждый из них удовлетворяет и второму уравнению соответствующей системы.

ОТВЕТ: $\left\{4;\frac{1}{4}\right\}$. ■

□ **729.** В левой части первого неравенства системы стоят тригонометрические функции, а в правой — показательные, причем от других аргументов. Такие разнородные задачи обычно решаются методом оценок.

Имея в виду это соображение, найдем области значений левой и правой частей первого неравенства системы.

Функцию

$$y=\cos 10x-2\sin 5x=-2\sin^2 5x-2\sin 5x+1$$

можно рассматривать как суперпозицию функций $y=-2z^2-2z+1$ и $z=\sin 5x$. Поэтому ее область значений совпадает с множеством значений функции $y=-2z^2-2z+1$, когда переменная z меняется на отрезке $[-1;1]$. Функция $y=-2z^2-2z+1$ достигает наибольшего значения при $z=-\frac{1}{2}\in[-1;1]$; при этом $y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$. Кроме того, $y(-1)=1$, $y(1)=-3$. Следовательно, искомая область значений — это отрезок $\left[-3;\frac{3}{2}\right]$.

Функцию

$$y=3\cdot 4^t-3\cdot 2^{t+2}+\frac{27}{2}=3\cdot\left(2^t\right)^2-12\cdot 2^t+\frac{27}{2}$$

можно рассматривать как суперпозицию функций $y=3z^2-12z+\frac{27}{2}$ и $z=2^t$. Поэтому ее область значений совпадает с множеством значений функции $y=3z^2-12z+\frac{27}{2}$, когда переменная z меняется на промежутке $(0;+\infty)$. Функция $y=3z^2-12z+\frac{27}{2}$ достигает наименьшего значения при $z=2\in(0;+\infty)$; при этом $y(2)=\frac{3}{2}$. При изменении z от 0 до $+\infty$ переменная y сначала убывает от значения $\frac{27}{2}$ до $\frac{3}{2}$, а затем монотонно возрастает до $+\infty$. Следовательно, искомая область значений — это промежуток $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Из проведенного исследования следует, что левая часть первого неравенства никогда не может быть больше правой, а равенство между ними возможно тогда и только тогда, когда каждая из них равна $\frac{3}{2}$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\begin{cases} \sin 5x = -\frac{1}{2}, \\ 2^t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ t = 1. \end{cases}$$

Второе неравенство исходной системы можно не решать, а использовать для отбора найденных решений первого неравенства.

Если $t = 1$, то выражение

$$\sqrt{(2-\sqrt{3})^{4t} + (2+\sqrt{3})^{4t} + 2} - (2t+1)^{1,5}$$

равно $14 - 3\sqrt{3}$.

Далее, если $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\sin 5x = -\frac{1}{2}$, и поэтому

$$\cos 10x = 1 - 2\sin^2 5x = \frac{1}{2},$$

а

$$\cos 5x = \cos\left((-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n\right) = (-1)^n \cos\left((-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = (-1)^n \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, второе неравенство превратится в следующее числовое неравенство:

$$(-1)^n \geqslant 1.$$

Оно истинно, тогда и только тогда, когда параметр n является четным числом: $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(t; x) = \left(1; -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi m}{5}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$. ■

□ **733.** Начнем решение с того, что подставим в исходное неравенство

$$f(y) \cdot \cos(x - y) \leqslant f(x) \tag{91}$$

вместо y выражение $x - \frac{\pi}{2}$:

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{2} \leqslant f(x) \Leftrightarrow f(x) \geqslant 0.$$

Теперь подставим в (91) вместо y выражение $x + t$:

$$f(x+t) \cdot \cos t \leqslant f(x).$$

Поскольку $\cos t \geqslant 1 - \frac{t^2}{2}$, а функция f неотрицательна, тем более верно неравенство

$$f(x+t) \cdot \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) \leqslant f(x). \tag{92}$$

Ограничим возможные значения переменной t интервалом $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$. Тогда $1 - \frac{t^2}{2} > 0$ и неравенство (92) можно почленно разделить на $1 - \frac{t^2}{2}$:

$$f(x+t) \leqslant \frac{f(x)}{1 - \frac{t^2}{2}}. \tag{93}$$

По аналогии с предыдущим шагом, подставим в (92) вместо x выражение $x-t$, а затем вместо t выражение $-t$:

$$f(x)\cdot\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\leqslant f(x+t). \tag{94}$$

Вычитая из обеих частей неравенств (93) и (94) выражение $f(x)$, мы получим, что

$$-\frac{t^2}{2}\,f(x)\leqslant f(x+t)-f(x)\leqslant f(x)\,\frac{t^2}{2-t^2}\,,\quad t\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right).$$

Тем более верно неравенство

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant f(x)\,\frac{t^2}{2-t^2}\,,\quad t\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right).$$

Если дополнительно предположить, что $t\neq 0$, то из этого неравенства следует, что

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|\leqslant f(x)\,\frac{|t|}{2-t^2}\,,\quad t\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\setminus\{0\}. \tag{95}$$

Теперь устремим переменную t к нулю. Поскольку предел при $t\to 0$ функции в правой части неравенства (95) равен нулю, в силу теоремы о зажатой переменной можно утверждать, что существует

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

и он равен 0. Но, по определению производной, этот предел — это $f'(x)$. Итак, мы доказали, что производная искомой функции $f(x)$ равна 0 при всех x. Известно, что тогда $f(x)$ является константой, причем, как следует из неравенства $f(x)\geqslant 0$, доказанного в самом начале нашего решения, эта константа должна быть неотрицательной:

$$f(x)\equiv c,\ \text{ где } c\geqslant 0. \tag{96}$$

Для завершения решения необходимо проверить, что функция вида (96) действительно удовлетворяет соотношению (91). Для этого нужно просто умножить неравенство $\cos(x-y)\leqslant 1$ на (неотрицательное) число c.

Ответ: $f(x)\equiv c$, где $c\geqslant 0$. ■

□ **736.** Перепишем первое неравенство системы в виде $\sin bx\leqslant 1-a$. Отсюда следует, что оно имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $1-a\geqslant -1$, т. е. $a\leqslant 2$.

Второе неравенство является квадратичным относительно x. Поскольку старший коэффициент положителен, его левая часть может быть меньше или равна 0 хотя бы при одном значении x тогда и только тогда, когда

$$D\geqslant 0\Leftrightarrow a^2-4\geqslant 0\Leftrightarrow a\leqslant -2 \text{ или } a\geqslant 2.$$

Таким образом, если исходная система имеет хотя бы одно решение, то $a\leqslant -2$ или $a=2$.

Выясним теперь, сколько решений имеет исходная система для «подозрительных» значений параметра.

Если $a = 2$, то исходная система примет вид:

$$\begin{cases} \sin bx \leqslant -1, \\ x^2 + 2x + 1 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin bx = -1, \\ x^2 + 2x + 1 = 0\,. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы имеет единственный корень $x = -1$, он будет корнем и первого уравнения (так что система имеет единственное решение) тогда и только тогда, когда параметр b удовлетворяет соотношению $\sin b = 1$, откуда $b = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $a \leqslant -2$, то $1 - a \geqslant 3$, так что множеством решений первого неравенства исходной системы при любом b будет вся числовая прямая. Поэтому исходная система будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда второе неравенство имеет единственное решение. Это, в свою очередь, равносильно тому, что

$$D = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \text{ или } a = 2.$$

С учетом ограничения $a \leqslant -2$ остается единственная возможность: $a = -2$. Параметр b, как мы отмечали, не играет никакой роли и может принимать любое значение.

Ответ: $a = 2, b = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $a = -2, b \in \mathbb{R}$. ■

□ **737.** Функция

$$y(x) = \log_{25-a^2}(\cos x + \sqrt{8}\sin x - a)$$

определена тогда и только тогда, когда выражение под знаком логарифма строго больше 0, а основание положительно и не равно 1. Поэтому исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

найти все значения параметра a, при каждом из которых для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$\begin{cases} \cos x + \sqrt{8}\sin x > a, \\ 25 - a^2 > 0, \\ 25 - a^2 \neq 1. \end{cases}$$

Поскольку область значений функции $f(x) = \cos x + \sqrt{8}\sin x$ — это отрезок $[-3; 3]$, первое неравенство системы справедливо при всех x тогда и только тогда, когда $a < -3$. Второе и третье неравенства системы не зависят от x и справедливы тогда и только тогда, когда $-5 < a < 5$ и $a \neq \pm 2\sqrt{6}$ соответственно.

Пересекая найденные множества значений параметра, мы получаем ответ задачи.

Ответ: $-5 < a < -2\sqrt{6}; -2\sqrt{6} < a < -3$. ■

□ **739.** Исходное неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \leqslant -\frac{x^2 + 9}{a + \cos x} - a \tag{97}$$

не меняется при замене x на $(-x)$. Поэтому если x_0 — решение неравенства, то $-x_0$ также будет решением. Следовательно, если неравенство имеет единственное решение x_0, то $x_0 = 0$.

Число x_0 является решением неравенства (97) тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет неравенству

$$1-2\cdot 3 \leqslant -\frac{9}{a+1}-a$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{(a-2)^2}{a+1} \leqslant 0$$
$$\Updownarrow$$
$$a<-1 \text{ или } a=2\,.$$

Проверим «подозрительные» значения параметра.

1. Если $a=2$, то неравенство (97) примет вид:

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leqslant -\frac{x^2+9}{2+\cos x}-2.$$

Поскольку выражение $2+\cos x$ положительно при всех x, это неравенство равносильно неравенству

$$(\cos x+2)^2-2\sqrt{x^2+9}(\cos x+2)+(x^2+9)\leqslant 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(\cos x+2-\sqrt{x^2+9}\right)^2 \leqslant 0\,,$$

которое, в свою очередь, сводится к уравнению

$$\cos x+2=\sqrt{x^2+9}.$$

Левая часть этого уравнения принимает значения из отрезка $[1;3]$, а правая — из промежутка $[3;+\infty)$. Поэтому равенство левой и правой частей возможно только тогда, когда они порознь равны 3:

$$\begin{cases}\cos x+2=3\,,\\ \sqrt{x^2+9}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=1\,,\\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow x=0,$$

так что проверяемое значение параметра нужно включить в ответ задачи.

2. Если $a<-1$, то выражение $\cos x+a<\cos x-1$ и поэтому отрицательно при всех x. Значит, для $a<-1$ исходное неравенство (97) равносильно неравенству

$$(\cos x+a)^2-2\sqrt{x^2+9}(\cos x+a)+(x^2+9)\geqslant 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(\cos x+a-\sqrt{x^2+9}\right)^2 \geqslant 0\,.$$

Последнее неравенство справедливо всюду, где определено, т. е. при всех $x\in\mathbb{R}$. Таким образом, при $a<-1$ множеством решений исходного неравенства (97) будет вся числовая прямая. Значит, ни одно из этих значений параметра не включается в ответ задачи.

Ответ: $a=2$. ■

☐ **740.** Понизим вдвое степени тригонометрических членов за счет удвоения углов:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 + \frac{a}{2}\sin 2x \geqslant 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2+6\cos^2 2x}{8} + \frac{a}{2}\sin 2x \geqslant 0.$$

Теперь введем новую неизвестную $y = \sin 2x$. Для нее неравенство примет вид:

$$3y^2 - 2ay - 4 \leqslant 0. \tag{98}$$

При изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ новая переменная y меняется от -1 до $+1$. Поэтому исходное неравенство выполняется при всех x тогда и только тогда, когда неравенство (98) выполняется при всех $y \in [-1; 1]$.

Последнее утверждение равносильно тому, что график функции $f(y) = 3y^2 - 2ay - 4$ находится ниже оси абсцисс (нестрого) для всех точек отрезка $-1 \leqslant y \leqslant 1$, что, в свою очередь, выполнено тогда и только тогда, когда одновременно выполнены два неравенства: $f(-1) \leqslant 0$ и $f(1) \leqslant 0$. Поскольку $f(-1) = 2a - 1$, $f(1) = -2a - 1$, дело сводится к решению системы из двух простых линейных неравенств относительно параметра a:

$$\begin{cases} 2a - 1 \leqslant 0, \\ -2a - 1 \leqslant 0, \end{cases}$$

что немедленно дает ответ задачи.

Ответ: $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$. ■

Решения к главе 6

☐ **743.** Подсчитаем все числа, фигурирующие в задаче:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3},$$

$$\log_{81}\left(\frac{1}{27}\right) = -\frac{3}{4},$$

$$\sin\frac{43\pi}{6} = \sin\left(7\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 3\pi\right) = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Таким образом, задача сводится к сравнению чисел $-\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{3}{2}$. Поскольку $\pi > 3$, второе число больше первого.

Ответ: второе число больше. ■

☐ **744.** Поскольку $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, задача сводится к подсчету $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$. Это число равно $\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$.

Ответ: -1. ■

□ **745.** Если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, то $\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi n$ для некоторого целого числа n. Тогда $\cos\alpha = (-1)^n \cos\frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2}$. Соответственно, первое число равно $\arccos\left(-\sqrt{-(-1)^n \cdot \frac{3}{2} - 1}\right)$. Если n — четное, то под знаком радикала стоит отрицательное число $-\frac{5}{2}$. Поэтому этот случай невозможен. Если же n — нечетное, то под знаком радикала стоит положительное число $\frac{1}{2}$. В этом случае

$$\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha - 1}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} = \frac{18\pi}{24} < \frac{19\pi}{24}.$$

Ответ: $\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha - 1}\right) < \frac{19\pi}{24}$. ■

□ **746.** Поскольку числа 3 и $2 + \frac{5}{\sqrt{3}}$, очевидно, больше, чем $\sqrt{3}$, а $y = \operatorname{arctg} x$ — монотонно возрастающая функция, можно гарантировать справедливость неравенств

$$\frac{\pi}{3} < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{3} < \operatorname{arctg}\left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда и среднее арифметическое этих чисел, т. е. число

$$A = \frac{\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg}\left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right)}{2},$$

лежит на интервале $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$. Поскольку $A > 0$, исходное неравенство можно переписать в виде:

$$n \leqslant \frac{\pi}{A}.$$

Из приведенной оценки для A следует, что $2 < \frac{\pi}{A} < 3$. Поэтому $n = 1$ или 2.

Ответ: $n = 1; 2$. ■

□ **747.** Дробь $\frac{5}{7}$ приближенно равна 0.71. Нам известны значения $\arcsin x$ для следующих «красивых» значений x: $x = \frac{1}{2} = 0.5$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$. Дробь $\frac{5}{7}$ приближенно равна 0.714. Поэтому

$$\arcsin\frac{5}{7} \approx \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785.$$

С другой стороны,

$$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \approx 0.756.$$

Как показывают эти приближения, видимо, $\arcsin\frac{5}{7} > \frac{2}{\sqrt{7}}$, причем верно более сильное утверждение $\arcsin\frac{5}{7} > \frac{\pi}{4} > \frac{2}{\sqrt{7}}$. Докажем это двойное неравенство.

Неравенство $\arcsin\frac{5}{7} > \frac{\pi}{4}$ равносильно неравенству

$$\sin\frac{\pi}{4} < \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{5}{7} \Leftrightarrow 49 < 50$$

и поэтому истинно.

Неравенство $\frac{\pi}{4} > \frac{2}{\sqrt{7}}$ равносильно неравенству $\pi > \frac{8\sqrt{7}}{7}$, которое истинно, так как $\pi > 3.1$, а $\frac{8\sqrt{7}}{7} < 3.1$.

Последний этап доказательства опирается на «известный» факт $\pi = 3.14\ldots$. Строгое доказательство этого результата — довольно тяжелая задача. Поэтому было бы интересно использовать такую оценку числа π, которую мы могли бы строго обосновать. Для этого рассмотрим окружность с радиусом $R = 1$ и вписанный в нее правильный 12-угольник. Его сторона равна

$$a = 2\sin 15^\circ = \sqrt{\sin^2 15^\circ} = 2\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

Ясно, что длина окружности, т. е. 2π, больше периметра P_{12} этого 12-угольника: $2\pi > 12\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, так что $\pi > 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. Число $3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ приближенно равно 3.106, так что этой оценки заведомо должно хватить для доказательства неравенства $\pi > \frac{8\sqrt{7}}{7}$. Действительно, это неравенство вытекает из неравенства

$$3(\sqrt{6}-\sqrt{2}) > \frac{8\sqrt{7}}{7} \Leftrightarrow 36(2-\sqrt{3}) > \frac{64}{7} \Leftrightarrow \sqrt{3} < \frac{110}{63} \Leftrightarrow 11907 < 12100.$$

ОТВЕТ: первое число больше. ■

□ **748.** Поскольку $\frac{3\pi}{10} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, можно сравнивать числа $\sin\frac{3\pi}{10} \equiv \sin 54^\circ = \cos 36^\circ$ и $\frac{4}{5}$.

Известно, что $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (см. решение задачи 85).

Поскольку $\sqrt{5} > 2{,}2$ (так как $2{,}2^2 = 4{,}84$), можно гарантировать, что $\frac{\sqrt{5}+1}{4} > \frac{2{,}2+1}{4} = 0{,}8 = \frac{4}{5}$.

ОТВЕТ: $\arcsin\frac{4}{5} < \frac{3\pi}{10}$. ■

□ **750.** В качестве базы для решения задачи естественно использовать тождество (оно непосредственно следует из определения $\arcsin a$)

$$\arcsin\sin x = x, \text{ если } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Имея его в виду, прежде всего преобразуем $\cos\frac{35\pi}{11}$ к виду $\sin x$ для некоторого $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\cos\frac{35\pi}{11} = \cos\left(3\pi + \frac{2\pi}{11}\right) = -\cos\frac{2\pi}{11} = \\ = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{11}\right) = -\sin\frac{7\pi}{22} = \\ = \sin\left(-\frac{7\pi}{22}\right).$$

Поэтому

$$\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{35\pi}{11}\right)=\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\sin\left(-\frac{7\pi}{22}\right)\right)=$$
$$=\frac{22}{\pi}\cdot\left(-\frac{7\pi}{22}\right)=-7.$$

Для дальнейшего отметим также следующие тождества, аналогичные ранее использованному тождеству $\arcsin\sin x=x$ (где $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$):

$$\arccos\cos x=x,\ \text{если}\ x\in[0;\pi]\ ,$$
$$\operatorname{arctg}\operatorname{tg}x=x,\ \text{если}\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\ ,$$
$$\operatorname{arcctg}\operatorname{ctg}x=x,\ \text{если}\ x\in(0;\pi)\ .$$

Ответ: -7. ■

□ **752.** Выражение $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ можно рассматривать как $\operatorname{tg}\alpha$, где про угол α мы знаем, что $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$ и $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь нашу задачу можно сформулировать следующим образом: *вычислить* $\operatorname{tg}\alpha$, *если известен* $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$ *и промежуток, в котором располагается угол* α*:* $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Ясно, что для ее решения нужно $\operatorname{tg}\alpha$ выразить через $\sin\alpha$.

Начнем с определения $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{3\cos\alpha}\ .$$

Теперь задача свелась к подсчету $\cos\alpha$. Для этого воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{9}+\cos^2\alpha=1$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos^2\alpha=\frac{8}{9}$$
$$\Updownarrow$$
$$|\cos\alpha|=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ .$$

Подчеркнем, что, имея только значение $\sin\alpha$, мы можем (однозначно) найти лишь абсолютную величину $\cos\alpha$. Чтобы убрать знак модуля, необходимо знать, положителен или отрицателен $\cos\alpha$. Для этого используем информацию о промежутке, в котором располагается угол α: при $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ число $\cos\alpha$ неотрицательно, так что $\cos\alpha=|\cos\alpha|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Теперь для $\operatorname{tg}\alpha$ мы имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{3\cos\alpha}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\ .$$

Отметим, что практически дословное повторение проведенных рассуждений позволяет доказать следующие важные тождества:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ если } x \in [-1;1],$$
$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ если } x \in [-1;1],$$
$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ если } x \in (-1;1),$$
$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ если } x \in [-1;1] \setminus \{0\},$$
$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ если } x \in [-1;1] \setminus \{0\},$$
$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ если } x \in (-1;1),$$
$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. ■

□ **753.** Выражение $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$ можно рассматривать как $\sin 2\alpha$, где про угол α мы знаем, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Теперь нашу задачу можно сформулировать следующим образом:

вычислить $\sin 2\alpha$, *если известен* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ *и промежуток, в котором располагается угол* α: $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ясно, что для ее решения нужно $\sin 2\alpha$ выразить через $\operatorname{tg}\alpha$. Начнем со следующего преобразования:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}.$$

В числителе и знаменателе последней дроби стоят однородные выражения второй степени относительно $a = \sin\alpha$ и $b = \cos\alpha$. В соответствии с общей теорией однородных многочленов нужно числитель и знаменатель этой дроби разделить на $\cos^2\alpha$ (или $\sin^2\alpha$). Конечно, делать это можно, только если мы уверены, что $\cos\alpha \neq 0$ (соответственно, $\sin\alpha \neq 0$); в нашем случае, очевидно, это условие выполнено, так как $\operatorname{tg}\alpha$ существует. После этой операции мы получим:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \text{если } \cos\alpha \neq 0.$$

Для нашей задачи это тождество даст:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

Отметим, что в данном случае информация о положении числа α не играла никакой роли.

Отметим, что практически дословное повторение проведенных рассуждений позволяет доказать следующие важные тождества (они справедливы при всех x):

$$\sin(2\operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1+x^2},$$
$$\cos(2\operatorname{arctg} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$
$$\sin(2\operatorname{arcctg} x) = \frac{2x}{1+x^2},$$
$$\cos(2\operatorname{arcctg} x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}.$$

Ответ: $\frac{3}{5}$. ■

□ **758.** Нашу задачу можно сформулировать следующим образом: *вычислить* $\varphi = 2\alpha + \beta$, *где про углы* α *и* β *мы знаем, что* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{7}{23}$ *и* $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поскольку нам известны $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, подсчитаем $\operatorname{tg}\varphi$, а затем с помощью этой информации будем находить сам угол φ.

Конечно, прежде всего необходимо убедиться, что $\operatorname{tg}\varphi$ существует. Для этого локализуем угол φ (т. е. найдем промежуток, в котором он располагается); эта информация, кроме того, окажется полезной на последнем этапе решения.

Если использовать отмеченные выше общие неравенства $-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, то относительно φ можно утверждать лишь то, что $-\frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, — в этой ситуации нельзя исключить возможности $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, когда $\operatorname{tg}\varphi$ не существует.

Однако α и β — совершенно конкретные углы, и можно указать гораздо более узкие промежутки, в которых они гарантированно расположены, чем промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, в который попадают все арктангенсы. Именно поскольку числа $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{23}$ — положительны и меньше, чем $\frac{\sqrt{3}}{3}$, можно утверждать, что $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{6}$. Соответственно, $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{3}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и поэтому существуют $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg}\varphi$.

Теперь с помощью известных формул тригонометрии мы имеем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8}{15},$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{8}{15}+\frac{7}{23}}{1-\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{23}} = 1.$$

Равенство $\operatorname{tg}\varphi = 1$ не определяет φ однозначно. На его основе можно утверждать лишь то, что $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi n$ для некоторого целого числа n. Однако ранее мы установили, что $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. На этот промежуток попадает лишь одно число φ такое, что $\operatorname{tg}\varphi = 1$ — это $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$. ■

□ **760.** Нашу задачу можно сформулировать следующим образом: *вычислить* $\varphi = \alpha + \beta + \gamma$, *где про углы* α, β, γ *мы знаем, что* $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{tg}\beta = 4$, $\operatorname{tg}\gamma = 13$ *и* $\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поскольку нам известны численные значения тангенсов этих углов, их можно локализовать гораздо точнее: $\alpha, \beta, \gamma \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому $\alpha + \beta \in \left(\frac{2\pi}{3}; \pi\right)$, $\varphi \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Отсюда, в частности, следует, что существуют $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}\varphi$.

Теперь с помощью известных формул тригонометрии мы имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{2+4}{1-2\cdot 4} = -\frac{6}{7},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma} = \frac{-\frac{6}{7} + 13}{1 + \frac{6}{7}\cdot 13} = 1.$$

Равенство $\operatorname{tg}\varphi = 1$ не определяет φ однозначно. На его основе можно утверждать лишь то, что $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi n$ для некоторого целого числа n. Однако ранее мы установили, что $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$. На этот промежуток попадает лишь одно число φ такое, что $\operatorname{tg}\varphi = 1$ — это $\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{4}$. ■

□ **762.** Нашу задачу можно сформулировать следующим образом: *вычислить* $\varphi = \alpha + \beta + \gamma$, *где про углы* α, β, γ *мы знаем, что* $\operatorname{tg}\alpha = 8$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{19}{22}$, $\operatorname{ctg}\gamma = -\frac{3}{2}$ *и* $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\gamma \in (0; \pi)$.

Поскольку нам известны численные значения тангенсов этих углов, их можно локализовать гораздо точнее: $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$, $\gamma \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$.

Поэтому $\alpha + \beta \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $\varphi \in \left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$. Отсюда, в частности, следует, что существует $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, в то время как гарантировать существование $\operatorname{tg}\varphi$ мы не можем.

Теперь с помощью известных формул тригонометрии мы имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{8 + \frac{19}{22}}{1 - 8\cdot\frac{19}{22}} = -\frac{3}{2}.$$

Поскольку, как мы отмечали, гарантировать существование $\operatorname{tg}\varphi$ нельзя, мы не можем подсчитывать (как это делали в задачах 758, 760) $\operatorname{tg}\varphi$. Вместо этого обратим внимание на то, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{ctg}\gamma$. Это равенство можно переписать в виде $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$, откуда следует, что

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma+\pi n, \text{ для некоторого целого числа } n$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+\pi n, \text{ для некоторого целого числа } n\,.$$

Ранее мы установили, что $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$. На этот промежуток попадает лишь одно число φ, такое, что $\varphi=\frac{\pi}{2}+\pi n$ — это $\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$. ■

□ **763.** Прежде всего воспользуемся тождествами $\cos\arcsin x=\sqrt{1-x^2}$, $\sin\arccos x=\sqrt{1-x^2}$ (см. задачу 752). Поэтому фактически наша задача сводится к вычислению $\arcsin a+\arccos a$, где $a=\sqrt{1-x^2}\in[0;1]$. Это выражение, как известно, при всех значениях $a\in[-1;1]$ равно $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$. ■

□ **764.** *Первый способ.* С помощью тождества

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$$

формулу, которая задает нашу функцию, можно привести к виду:

$$y=\sqrt{1-x^2}.$$

Равенство $y=\sqrt{1-x^2}$ равносильно системе

$$\begin{cases} y^2=1-x^2\,, \\ y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1\,, \\ y\geqslant 0\,. \end{cases}$$

Поэтому графиком нашей функции будет верхняя половина стандартной единичной окружности (с радиусом $R=1$ и центром в начале координат).

Расстоянием от точки A до множества M называется наименьшее из расстояний между A и точками множества M:

$$\rho(A;M)=\min_{B\in M}\rho(A;B).$$

Отметим, что этот минимум не обязан достигаться. Поэтому под расстоянием от точки до множества, вообще говоря, подразумевают так называемую точную нижнюю грань (ее обозначают символом inf) расстояний $\rho(A;B)$, где точка B пробегает множество M:

$$\rho(A;M)=\inf_{B\in M}\rho(A;B).$$

Известно, что наименьшее расстояние от точки A, которая лежит вне окружности с центром в точке O, до точек окружности достигается на ближайшей к A точке пересечения прямой OA и этой окружности. В нашем случае эта точка (обозначим ее B) лежит на верхней полуокружности. Поэтому искомое расстояние равно

$$AB = AO - R = \sqrt{2^2 + 3^2} - 1 = \sqrt{13} - 1.$$

Второй способ. Каждой точке верхней полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$ соответствует и притом только одно значение $t \in [0; \pi]$ такое, что $x = \cos t$, $y = \sin t$. Поэтому искомое расстояние можно найти как наименьшее значение функции

$$f(t) = \sqrt{(\cos t - 2)^2 + (\sin t - 3)^2} = \sqrt{14 - 2(2\cos t + 3\sin t)}$$

на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

С помощью дополнительного аргумента $\varphi = \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$ выражение $2\cos t + 3\sin t$ можно записать в виде $\sqrt{13}\sin(x + \varphi)$. Поскольку $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, наибольшее значение этого выражения на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \pi$ равно $\sqrt{13}$. Соответственно, наименьшее значение функции $f(t)$ равно $\sqrt{14 - 2\sqrt{13}} = \sqrt{13} - 1$.

Ответ: $\sqrt{13} - 1$. ■

□ **766.** С помощью тождества

$$\cos(\arcsin t) = \sqrt{1 - t^2}$$

формулу, которая задает нашу функцию, можно привести к виду:

$$y = \sqrt{1 - 16x^4}.$$

Эта функция определена на отрезке $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. На этом множестве ее можно рассматривать как суперпозицию функций $y = \sqrt{z}$ и $z = 1 - 16x^4$. Поскольку функция $y = \sqrt{z}$ монотонно возрастает, поведение функции $y = \sqrt{1 - 16^4}$ (т. е. промежутки ее возрастания и убывания) совпадает с поведением функции $z = 1 - 16x^4$. Поэтому на отрезке $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0$ наша функция возрастает от 0 до 1, а на промежутке $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ убывает от 1 до 0.

Примерный вид графика функции $y = \sqrt{1 - 16x^4}$ изображен на рис. 12. ■

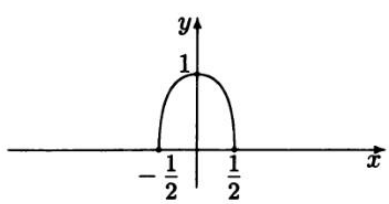


Рис. 12

□ **767.** Рассмотрим функции

$$f(x) = \arcsin(|\sin x|),$$
$$g(x) = \arccos(|\cos x|).$$

Обе эти функции четные, так как

$$f(-x) = \arcsin(|\sin(-x)|) = \arcsin(|-\sin x|) = \\ = \arcsin(|\sin x|) = f(x),$$

$$g(-x) = \arccos(|\cos(-x)|) = \arccos(|\cos x|) = g(x).$$

и периодические с периодом $T = \pi$, так как

$$f(x+\pi) = \arcsin(|-\sin x|) = \arcsin(|\sin x|) = f(x),$$

$$g(x+\pi) = \arccos(|-\cos x|) = \arccos(|\cos x|) = g(x).$$

Поэтому достаточно доказать требуемое равенство только для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Действительно, в силу четности тогда можно гарантировать его справедливость для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, а значит, и для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Длина этого отрезка равна π, т. е. общему периоду $f(x)$ и $g(x)$. Следовательно, равенство $f(x) = g(x)$ будет выполнено и для всех $x \in \mathbb{R}$.

Но для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ формулы, которые задают функции $f(x)$ и $g(x)$, можно упростить. Прежде всего, на этом отрезке как $\sin x$, так и $\cos x$ неотрицательны и поэтому $|\sin x| = \sin x$, $|\cos x| = \cos x$. Кроме того, этот отрезок является подмножеством отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, на котором верно равенство $\arcsin\sin x = x$, и подмножеством отрезка $[0; \pi]$, на котором верно равенство $\arccos\cos x = x$. Поэтому

$$f(x) = \arcsin(|\sin x|) = \arcsin(\sin x) = x,$$

$$g(x) = \arccos(|\cos x|) = \arccos(\cos x) = x,$$

так что действительно $f(x) = g(x)$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. ■

□ **768.** В ходе решения задачи 767 мы установили, что наша функция является четной и периодической с периодом $T = \pi$. Поэтому достаточно построить ее график для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Действительно, в силу четности часть графика, соответствующую $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, можно получить осевой симметрией относительно оси Oy. Это даст вид графика для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Длина этого отрезка равна π, т. е. периоду $f(x)$. Периодически повторяя эту часть графика, мы получим весь график.

Кроме того, мы установили, что для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ формулу, которая задает функцию $f(x)$, можно упростить до x, т. е. первая часть графика — это соответствующая часть биссектрисы первого координатного угла.

Представляя эти рассуждения графически, мы получим рис. 13.

Из рис.13 ясно, что функцию $y = \arcsin|\sin x|$ можно задать равенством:

$$\arcsin|\sin x| = |x - \pi n|, \text{ если } \pi n - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi n + \frac{\pi}{2} \text{ для } n \in \mathbb{Z}. \quad (99)$$

В этом соотношении неравенство

$$\pi n - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi n + \frac{\pi}{2}$$

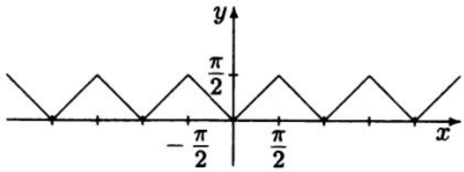


Рис. 13

можно заменить на

$$\pi n - \frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi n + \frac{\pi}{2},$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству $n \leqslant \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} < n+1$. Последнее неравенство означает, что число n является целой частью числа $\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}$:

$$n = \left[\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right],$$

так что уравнение (99) можно записать и в виде:

$$\arcsin|\sin x| = \left|x - \pi\left[\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right]\right|. \tag{100}$$

■

□ **769.** Как и при решении задачи 767, легко доказать, что наша функция является четной и периодической с периодом $T = \pi$, а при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ формулу, которая задает функцию $y(x)$, можно упростить до $x^2 - x^2 = 0$. Отметим, что для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, функция не определена. Поэтому ее графиком будет горизонтальная прямая, совпадающая с осью Ox, из которой выколоты точки вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Примерный вид графика представлен на рис. 14. ■

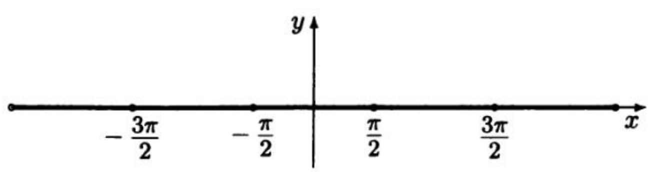


Рис. 14

□ **770.** Поскольку $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, функцию $f(x)$ можно привести к виду

$$f(x) = \arcsin x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) + 1.$$

Поэтому ее можно рассматривать как суперпозицию функций $y = -z^2 + \frac{\pi}{2} z + 1$ и $z = \arcsin x$. При изменении переменной x от -1 до $+1$ (т. е. в области определения $f(x)$) значения переменной z заполняют отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ совпадают с наименьшим и наибольшим значениями функции $y = -z^2 + \frac{\pi}{2} z + 1$ на отрезке $z \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вершина параболы $y=-z^2+\frac{\pi}{2}z+1$ имеет координаты $z_0=\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $y_0=1+\frac{\pi^2}{16}$, а ее значения в точках $z=-\frac{\pi}{2}$ и $z=\frac{\pi}{2}$ равны $1-\frac{\pi^2}{2}$ и 1 соответственно. Поэтому на отрезке $-\frac{\pi}{2}\leqslant z\leqslant\frac{\pi}{2}$ наименьшее и наибольшее значения функции $y=-z^2+\frac{\pi}{2}z+1$ равны $1-\frac{\pi^2}{2}$ и $1+\frac{\pi^2}{16}$ соответственно.

ОТВЕТ: $f_{\min}=1-\frac{\pi^2}{2}$, $f_{\max}=1+\frac{\pi^2}{16}$. ■

□ **771.** Поскольку $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$, функцию $y=(\operatorname{arctg}x)^2+(\operatorname{arcctg}x)^2$ можно привести к виду

$$y=2\left(\operatorname{arctg}x\right)^2-\pi\operatorname{arctg}x+\frac{\pi^2}{4}.$$

Поэтому ее можно рассматривать как суперпозицию функций $y=2z^2-\pi z+\frac{\pi^2}{4}$ и $z=\operatorname{arctg}x$. При изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ значения переменной z заполняют интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому наименьшее значение функции $y(x)$ совпадает с наименьшим значением функции $y=2z^2-\pi z+\frac{\pi^2}{4}$ на интервале $z\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Вершина параболы $y=2z^2-\pi z+\frac{\pi^2}{4}$ имеет координаты $z_0=\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $y_0=\frac{\pi^2}{8}$. Поэтому на интервале $-\frac{\pi}{2}<z<\frac{\pi}{2}$ наименьшее значение функции $y=2z^2-\pi z+\frac{\pi^2}{4}$ равно $\frac{\pi^2}{8}$.

Отметим, что при $x\to-\infty$ функция $y(x)$ монотонно стремится к пределу, равному $\frac{5\pi^2}{4}$, а при $x\to+\infty$ функция $y(x)$, монотонно возрастая, стремится к пределу, равному $\frac{\pi^2}{4}$. Таким образом, наибольшее значение $y(x)$ не существует (не следует путать с ним точную верхнюю грань значений $y(x)$, равную $\frac{5\pi^2}{4}$).

ОТВЕТ: $y_{\min}=\frac{\pi^2}{8}$. ■

□ **772.** Раскроем модуль в первом неравенстве системы. Имея в виду сокращение на общий множитель $x+2$, рассмотрим три случая: $x+2>0$, $x+2<0$, $x+2=0$. В первом случае это неравенство сведется к неравенству

$$\arcsin((y-1)^2)\leqslant\frac{\pi}{2},$$

которое выполнено всюду, где определено, т. е. при

$$(y-1)^2\leqslant1\Leftrightarrow0\leqslant y\leqslant2.$$

Во втором случае это неравенство сведется к неравенству

$$\arcsin\left((y-1)^2\right)\leqslant-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow(y-1)^2=-1\Leftrightarrow\varnothing.$$

И наконец, в третьем случае это неравенство сведется к неравенству

$$0 \cdot \arcsin\left((y-1)^2\right) \leqslant 0,$$

которое также выполнено всюду, где определено, т. е. при $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Таким образом, первое неравенство равносильно системе из двух неравенств $0 \leqslant y \leqslant 2$, $x \geqslant -2$. На координатной плоскости оно задает правую половину горизонтальной полосы, ограниченной прямыми $y=0$, $y=2$, $x=-2$.

Второе неравенство системы распадается на два неравенства: $y \geqslant 1 + \frac{x}{2}$, $y \leqslant 1 - \frac{x}{2}$.

Поэтому исходная система задает на координатной плоскости многоугольник $ABCDE$ (с внутренностью), изображенный на рис.15

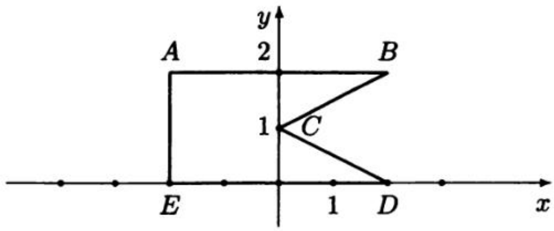


Рис. 15

Длины сторон этого многоугольника легко определить:

$$AB = 4, BC = \sqrt{5}, CD = \sqrt{5}, DE = 4, AE = 2.$$

Поэтому его периметр равен $10 + 2\sqrt{5}$.

Ответ: $10 + 2\sqrt{5}$. ■

□ **773.** Рассмотрим функцию $f(x) = \arccos(\cos x)$. Легко проверить, что она является четной и периодической с периодом $T = 2\pi$. Поэтому достаточно построить ее график для $x \in [0; \pi]$. Далее, для $x \in [0; \pi]$ формулу, которая задает функцию $f(x)$, можно упростить до x.

Полученный с помощью этих рассуждений график функции $f(x)$ изображен на рис. 16.

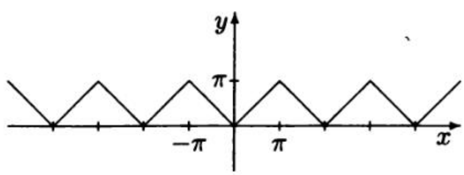


Рис. 16

Из этого рисунка ясно, что для $x \in [2\pi n - \pi; 2\pi n + \pi]$, $n \in \mathbb{Z}$, график функции $f(x)$ совпадает с графиком функции $|x - 2\pi n|$. Соответственно, в вертикальной полуполосе $2\pi n - \pi \leqslant x \leqslant 2\pi n + \pi$ первое неравенство системы совпадает с неравенством $(x - 2\pi n)^2 + y^2 \geqslant 1$. Это неравенство задает внешность круга с центром в точке $(2\pi n; 0)$ и радиусом $R = 1$. Объединяя эти фигуры для всех $n \in \mathbb{Z}$, мы получим плоскость, из которой вырезаны всевозможные круги радиуса $R = 1$ с центрами в точках вида $(2\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Второе неравенство системы равносильно неравенству

$$(|x| + |y|)^2 \leqslant 4\pi^2 \Leftrightarrow |x| + |y| \leqslant 2\pi.$$

На координатной плоскости оно задает квадрат (с внутренностью) с вершинами в точках $(0; 2\pi)$, $(2\pi; 0)$, $(0; -2\pi)$, $(-2\pi; 0)$.

Пересекая фигуры, задаваемые первым и вторым неравенствами системы, мы получим квадрат, из которого вырезан единичный круг в центре и по четверти круга единичного радиуса слева и справа. Эта фигура изображена на рис. 17.

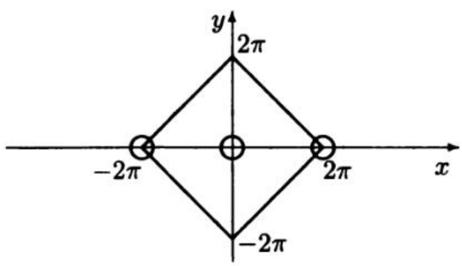


Рис. 17

Площадь квадрата равна $8\pi^2$, а площадь вырезанной фигуры равна равна $\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $S = 8\pi^2 - \frac{3\pi}{2}$. ■

□ **775.** Определение числа $\arccos a$ означает, что равенство $x = \arccos a$ равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = a, \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Разрешая исходное уравнение относительно arccos и применяя это преобразование, мы получим, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} + \cos\left(\pi \cdot \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 5x + 7}\right), \\ 0 \leqslant \frac{\pi}{3} \leqslant \pi. \end{cases}$$

Неравенство системы является истинным числовым неравенством, и поэтому дальше его можно не учитывать.

Уравнение системы приводится к виду (так как $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$):

$$\cos\left(\pi \cdot \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 5x + 7}\right) = -1$$
$$\Updownarrow$$
$$\pi \cdot \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 5x + 7} = (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$\Updownarrow$$
$$2nx^2 - (10n - 3)x + (14n - 9) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Строго говоря, на последнем шаге преобразований следовало бы добавить условие $x^2 - 5x + 7 \neq 0$. Однако дискриминант трехчлена $x^2 - 5x + 7$ отрицателен, так что это условие выполнено при всех значениях x, и поэтому его можно явно не указывать.

Уравнение
$$2nx^2 - (10n-3)x + (14n-9) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{101}$$
на самом деле является бесконечной совокупностью уравнений относительно одной неизвестной x. Появившаяся в задаче новая переменная n играет роль своеобразного «номера» уравнения из этой совокупности.

На первый взгляд все уравнения вида (101) являются квадратными, но это не так. Дело в том, что уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ — квадратное, если член второй степени действительно присутствует, т. е. $a \neq 0$. В нашем случае это означает, что уравнение с «номером» $n = 0$ — линейное: $3x - 9 = 0$. Если же «номер» уравнения (101) не равен 0, то это уравнение действительно является квадратным. Поэтому разобьем бесконечную совокупность (101) на совокупность из одного линейного уравнения $3x - 9 = 0$ и бесконечную совокупность квадратных уравнений вида
$$2nx^2 - (10n-3)x + (14n-9) = 0, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0. \tag{102}$$

Линейное уравнение $3x - 9 = 0$ имеет единственный корень $x = 3$.

Рассмотрим теперь произвольное квадратное уравнение из совокупности (102). Его дискриминант равен $D = -12n^2 + 12n + 9 = -12\left(n - \frac{3}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Трехчлен $-12n^2 + 12n + 9$ неотрицателен только для двух целых чисел: $n = 0$, $n = 1$. Первое из них должно быть исключено, так как мы с самого начала ограничились случаем $n \neq 0$. Таким образом, из бесконечной совокупности (102) только уравнение, отвечающее $n = 1$, имеет непустое множество решений. Поскольку для остальных значений n соответствующие уравнения имеют пустое множество решений, они не вносят никакого вклада в множество решений совокупности. Иначе говоря, бесконечная совокупность (102) равносильна одному уравнению:
$$2x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ или } \frac{5}{2}.$$

ОТВЕТ: $x_1 = 1; x_2 = \frac{5}{2}; x_3 = 3$. ■

□ **777.** Определение числа $\operatorname{arctg} a$ означает, что равенство $x = \operatorname{arctg} a$ равносильно системе
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Разрешая исходное уравнение относительно arctg и применяя это преобразование, мы получим, что исходное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} \operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg} 6x + \cos 7x, \\ -\frac{\pi}{2} < 6x < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x = 0, \\ -\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}. \end{cases}$$

Отметим, что приведение подобных членов $\operatorname{tg} 6x$ в левой и правой частях уравнения системы, вообще говоря, является равносильным преобразованием, только если мы сохраним условие существования $\operatorname{tg} 6x$. Но в нашем случае из неравенства системы следует, что $\operatorname{tg} 6x$ существует.

Проделанные преобразования означают, что решение исходного уравнения с обратной тригонометрической функцией сводится к решению обычного тригонометрического уравнения

$$\cos 7x = 0 \tag{103}$$

с последующим отбором только тех его корней, которые попадают на отрезок

$$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}. \tag{104}$$

Множество решений уравнения (103) дается формулой $x = \dfrac{\pi(2n+1)}{14}$, $n \in \mathbb{Z}$. Условие (104) означает, что целочисленный параметр n удовлетворяет неравенству $-\dfrac{7}{6} < 2n+1 < \dfrac{7}{6}$, откуда $2n+1 = \pm 1$. Этим значениям n соответствуют два корня уравнения (103): $x = \pm\dfrac{\pi}{14}$.

ОТВЕТ: $x_1 = -\dfrac{\pi}{14}$; $x_2 = \dfrac{\pi}{14}$. ■

□ **779.** Исходное уравнение равносильно бесконечной совокупности уравнений

$$\arcsin x = \frac{\pi(4n+1)}{2\sqrt{3}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{105}$$

Уравнение вида $\arcsin x = y$ либо не имеет корней (если $y \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$), либо имеет единственный корень $x = \sin y$ (если $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$). Число вида $\dfrac{\pi(4n+1)}{2\sqrt{3}}$, $n \in \mathbb{Z}$, лежит на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ тогда и только тогда, когда $n = 0$. Поэтому бесконечная совокупность уравнений (105) равносильна одному уравнению (с «номером» $n = 0$):

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

которое имеет единственный корень $x = \sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

ОТВЕТ: $x = \sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$. ■

□ **781.** Для новой неизвестной $t = \dfrac{\pi^2}{4}\arcsin x$ исходное уравнение примет вид:

$$\sin t - \cos t = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно бесконечной совокупности уравнений

$$\arcsin x = \frac{4n+1}{\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{106}$$

Уравнение вида $\arcsin x = y$ либо не имеет корней (если $y \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$), либо имеет единственный корень $x = \sin y$ (если $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$). Число вида $\dfrac{4n+1}{\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$, лежит на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ тогда и только тогда, когда целочисленный параметр n удовлетворяет неравенству $-\dfrac{\pi^2}{2} \leqslant 4n + 1 \leqslant \dfrac{\pi^2}{2}$. Поскольку

$3 < \pi < 3{,}15$, можно гарантировать, что $4{,}5 < \frac{\pi^2}{2} < 5$. Следовательно, $n = 0$ или $n = -1$. Поэтому бесконечная совокупность уравнений (105) равносильна совокупности из двух уравнений (с «номерами» $n = 0$ и $n = -1$):

$$\begin{array}{ccc} \arcsin x = \frac{1}{\pi} & \qquad & \arcsin x = -\frac{3}{\pi} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x = \sin\frac{1}{\pi}\,; & & x = -\sin\frac{3}{\pi}\,. \end{array}$$

ОТВЕТ: $x_1 = \sin\frac{1}{\pi}\,; x_2 = -\sin\frac{3}{\pi}$. ■

□ **782.** Введем новую неизвестную $t = \operatorname{arcctg} x$. Для нее исходное уравнение примет вид:

$$\cos^4 t + \sin^4 t = \frac{1}{\sin^2 t}\,.$$

Понижая вдвое степени за счет удвоения аргументов, мы получим следующее уравнение для $y = \cos 2t$:

$$y^3 - y^2 + y + 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y^2 - 2y + 3) = 0 \Leftrightarrow y = -1\,.$$

Отсюда

$$\cos 2t = -1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi(2n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно бесконечной совокупности уравнений

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi(2n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{107}$$

Уравнение вида $\operatorname{arcctg} x = y$ либо не имеет корней (если $y \notin (0;\pi)$), либо имеет единственный корень $x = \operatorname{ctg} y$ (если $y \in (0;\pi)$). Число вида $\frac{\pi(2n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, лежит на интервале $(0;\pi)$ тогда и только тогда, когда $n = 0$. Поэтому бесконечная совокупность уравнений (107) равносильна одному уравнению (с «номером» $n = 0$):

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}\,,$$

которое имеет единственный корень $x = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$.

ОТВЕТ: $x = 0$. ■

□ **783.** Равенство $\arccos x = y$ равносильно системе (это просто определение числа $\arccos x$):

$$\begin{cases} \cos y = x, \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi. \end{cases}$$

Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos \operatorname{arctg} x = x, \\ 0 \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant \pi. \end{cases}$$

С помощью тождества $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ уравнение системы сводится к алгебраическому уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = x,$$

которое имеет единственный корень $x_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Условие $\operatorname{arctg} x_0 \geqslant 0$ выполнено, поскольку этот корень является положительным числом. Условие $\operatorname{arctg} x_0 \leqslant \pi$ выполнено автоматически, так как $\operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. ■

□ **784.** С помощью тождества $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ наше уравнение можно преобразовать к виду:

$$\arcsin(0{,}5 + 0{,}5\pi\cos x) = \arcsin(0{,}5 + 0{,}5\pi\sin x).$$

В силу монотонности функции $y = \arcsin x$ это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 0{,}5 + 0{,}5\pi\cos x = 0{,}5 + 0{,}5\pi\sin x\,, \\ -1 \leqslant 0{,}5 + 0{,}5\pi\sin x \leqslant 1\,. \end{cases} \tag{108}$$

Неравенство системы обеспечивает существование $\arcsin(0{,}5 + 0{,}5\pi\sin x)$ и (вместе с уравнением системы) $\arcsin(0{,}5 + 0{,}5\pi\cos x)$. Его легко преобразовать к виду:

$$-\frac{3}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant \frac{1}{\pi}\,. \tag{109}$$

Мы не будем решать это неравенство, а используем его для отбора корней уравнения системы.

Уравнение системы (108) равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = 1$, множество решений которого дается формулой $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Для проверки условия (109) разобьем эту серию на две подсерии: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ и $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Для всех x из первой подсерии $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Это число, очевидно, больше, чем $\frac{1}{\pi}$, так что ни одно значение x из первой подсерии не является решением системы (108). Для всех x из второй подсерии $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Это число, очевидно, удовлетворяет условию (109).

Ответ: $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

□ **785.** Для новых переменных $a = 2\arcsin(2x+1)$ и $b = \arccos(6x+3)$ исходное уравнение примет вид:

$$3^a + \log_3 a = 3^b + \log_3 b. \tag{110}$$

Функция $f(t) = 3^t + \log_3 t$ определена при $t > 0$. На этом множестве она монотонно возрастает (как сумма двух монотонно возрастающих функций). Поэтому уравнение (110) равносильно системе

$$\begin{cases} a = b\,, \\ a > 0\,. \end{cases}$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим систему

$$\begin{cases} 2\arcsin(2x+1) = \arccos(6x+3)\,, \\ \arcsin(2x+1) > 0\,. \end{cases} \tag{111}$$

Неравенство $\arcsin(2x+1) > 0$ равносильно неравенству $0 < 2x + 1 \leqslant 1$, т. е. неравенству $-\frac{1}{2} < x \leqslant 0$. Для этих значений неизвестной выражение $6x + 3$

(как и выражение $2x+1$) — положительно. Поэтому $2\arcsin(2x+1)\in(0;\pi]$, $\arccos(6x+1)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. На промежутке $[0;\pi]$ функция $y=\cos t$ монотонно убывает. Следовательно, система (111) равносильна системе

$$\begin{cases}\cos\big(2\arcsin(2x+1)\big)=\cos\big(\arccos(6x+3)\big),\\ -\frac{1}{2}<x\leqslant 0\,.\end{cases}\tag{112}$$

Выражение $\cos\big(\arccos(6x+3)\big)$ определено при $-1\leqslant 6x+3\leqslant 1$, т. е. при $x\in\left[-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right]$, и на этом множестве совпадает с выражением $6x+3$.

Выражение $\cos\big(2\arcsin(2x+1)\big)$ определено при $-1\leqslant 2x+1\leqslant 1$, т. е. при $x\in[-1;0]$, и на этом множестве совпадает с выражением

$$1-2\sin^2\big(\arcsin(2x+1)\big)=1-2\cdot(2x+1)^2.$$

Поэтому система (112) равносильна системе

$$\begin{cases}1-2\cdot(2x+1)^2=6x+3,\\ -\frac{1}{2}<x\leqslant-\frac{1}{3}\,.\end{cases}$$

Уравнение этой системы приводится к виду

$$4x^2+7x+2=0.$$

Оно имеет два корня: $x_1=\dfrac{-7-\sqrt{17}}{8}$, $x_2=\dfrac{-7+\sqrt{17}}{8}$. Условию $-\frac{1}{2}<x\leqslant-\frac{1}{3}$ удовлетворяет только второй корень.

ОТВЕТ: $x=\dfrac{-7+\sqrt{17}}{8}$. ■

□ **786.** Запишем уравнение в виде

$$2\arccos x=\pi-\arcsin\frac{x}{2}\,.$$

Из него следует, что

$$\cos\left(2\arccos x\right)=\cos\left(\pi-\arcsin\frac{x}{2}\right).\tag{113}$$

Это преобразование, вообще говоря, не равносильно и поэтому нужна проверка.

С помощью тождеств

$$\cos 2t=2\cos^2 t-1,$$
$$\cos(\pi-t)=-\cos t,$$
$$\cos\left(\arccos x\right)=x$$

уравнение (113) приводится к виду

$$2x^2-1=-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x=0$. Прямая проверка показывает, что это число является и корнем исходного уравнения.

ОТВЕТ: $x=0$. ■

□ **787.** Поскольку задача содержит разнородные члены — тригонометрический $\sin\pi x$ и «обратный тригонометрический» $\arcsin(-x^2+3x-1)$, естественно применить графический метод или метод оценок. Графический метод, конечно, предпочтительнее в силу своей наглядности и "избыточности", что позволяет вылавливать ошибки в решении.

Начнем с изучения функций $y=\arcsin(-x^2+3x-1)$ и $y=\sin\pi x$.

Первую функцию можно рассматривать как суперпозицию функций $y=\arcsin t$ и $t=-x^2+3x-1$. Она определена тогда и только тогда, когда $-1\leqslant -x^2+3x-1\leqslant 1$. Это двойное неравенство равносильно системе из двух квадратичных неравенств

$$\begin{cases} x^2-3x\leqslant 0,\\ x^2-3x+2\geqslant 0,\end{cases}$$

множество решений которой является объединением двух отрезков $[0;1]$ и $[2;3]$.

При изменении переменной x от 0 до 1 квадратичная функция $t=-x^2+3x-1$ монотонно возрастает от -1 до 1, а при изменении переменной x от 2 до 3 функция $t=-x^2+3x-1$ монотонно убывает от 1 до -1. Поскольку функция $y=\arcsin t$ монотонно возрастает, поведение функции $y=\arcsin(-x^2+3x-1)$ повторяет поведение функции $t=-x^2+3x-1$: при изменении переменной x от 0 до 1 функция $y=\arcsin(-x^2+3x-1)$ монотонно возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а при изменении переменной x от 2 до 3 монотонно убывает от $\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$. В частности, всюду на области определения верно двойное неравенство

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin(-x^2+3x-1)\leqslant\frac{\pi}{2}. \qquad (114)$$

Отметим, что график функции $y=\arcsin(-x^2+3x-1)$ может быть абсолютно точно нарисован.

Функция $y=\sin\pi x$ определена при всех $x\in\mathbb{R}$ и принимает значения на отрезке $[-1;1]$. Однако тот факт, что левая часть исходного уравнения определена только для $x\in[0;1]\cup[2;3]$, означает, что и функцию $y=\sin\pi x$ следует рассматривать на этом множестве. Для $x\in[0;1]\cup[2;3]$ аргумент этой функции (число πx) лежит на множестве $[0;\pi]\cup[2\pi;3\pi]$. Поэтому $\sin\pi x$ меняется от 0 до 1:

$$0\leqslant\sin\pi x\leqslant 1. \qquad (115)$$

Более того, нетрудно понять, что на отрезке $[0;1]$ функция $f(x)=\sin\pi x$ вначале возрастает от $f(0)=0$ до $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, затем убывает от $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ до $f(1)=0$, а на отрезке $[2;3]$ вначале возрастает от $f(2)=0$ до $f\left(\frac{3}{2}\right)=1$, затем убывает от $f\left(\frac{3}{2}\right)=1$ до $f(3)=0$. Значит, график функции $f(x)=\sin\pi x$ также может быть абсолютно точно нарисован.

Если бы $f(x)=\sin\pi x$ все время возрастала на каждом из двух отрезков, $[0;1]$ и $[2;3]$, можно было бы утверждать, что и функция $y=\arcsin(-x^2+3x-1)+\sin\pi x$ возрастает. Однако это не так, и поэтому относительно поведения левой части исходного уравнения нельзя сказать ничего определенного. В этой ситуации остается надеяться только на оценки (114), (115).

Из оценок (114), (115) следует, что на области определения исходного уравнения левая часть больше или равна $-\frac{\pi}{2}$, причем если хотя бы в одном из неравенств $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(-x^2+3x-1)$, $0 \leqslant \sin \pi x$ стоит знак $<$, то левая часть исходного уравнения будет строго больше $-\frac{\pi}{2}$. Поэтому равенство между левой и правой частями исходного уравнения возможно тогда и только тогда, когда левые неравенства в оценках (114), (115) на самом деле являются равенствами. Из проведенного выше анализа следует, что это, в свою очередь, равносильно системе:

$$\begin{cases} x = 0; 3\,, \\ \sin \pi x = 0 \end{cases} \leftrightarrow x = 0; 3\,.$$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = 3$. ■

□ **788.** Поскольку задача содержит разнородные члены — «обратный тригонометрический» $\arcsin(x^3+x-2)$ и иррациональный $\sqrt{6x-x^2-5}$, естественно применить графический метод или метод оценок.

Начнем с изучения более простой функции $y = \sqrt{6x-x^2-5}$. Ее можно рассматривать как суперпозицию функций $y = \sqrt{t}$ и $t = -x^2+6x-5$. Она определена тогда и только тогда, когда $-x^2+6x-5 \geqslant 0$, что равносильно двойному неравенству $1 \leqslant x \leqslant 5$. При изменении переменной x от 1 до 3 квадратичная функция $t = -x^2+6x-5$ монотонно возрастает от 0 до 4, а при изменении переменной x от 3 до 5 монотонно убывает от 4 до 0. Поскольку функция $y = \sqrt{t}$ монотонно возрастает, поведение функции $y = \sqrt{-x^2+6x-5}$ повторяет поведение функции $t = -x^2+6x-5$: при изменении переменной x от 1 до 3 функция $y = \sqrt{-x^2+6x-5}$ монотонно возрастает от 0 до 2, а при изменении переменной x от 3 до 5 монотонно убывает от 2 до 0. В частности, всюду на области определения верно двойное неравенство

$$0 \leqslant \sqrt{-x^2+6x-5} \leqslant 2. \tag{116}$$

Отметим, что график функции $y = \sqrt{-x^2+6x-5}$ может быть абсолютно точно нарисован.

Функция $y = \arcsin(x^3+x-2)$ гораздо сложнее предыдущей. Даже найти ее область определения не представляется возможным. Но, на наше счастье, функция x^3+x-2 монотонно возрастает (как сумма возрастающих функций). На отрезке $1 \leqslant x \leqslant 5$ (где определена функция $y = \sqrt{-x^2+6x-5}$) функция x^3+x-2 меняется от 0 до 128. Для существования $\arcsin(x^3+x-2)$ нужно, чтобы выражение x^3+x-2 не превосходило 1. Из монотонности функции x^3+x-2 следует, что уравнение $x^3+x-2=1$ имеет единственный корень $x_0 \in [1{,}21; 1{,}22]$ (так как $f(1{,}21) = 0{,}981561$, $(1{,}22) = 1{,}035848$). Тогда область определения исходного уравнения — это отрезок $[1; x_0]$, причем на этом множестве функция $y = \arcsin(x^3+x-2)$ монотонно возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Как следует из проведенного исследования, на этом множестве возрастает и функция $y = \sqrt{-x^2+6x-5}$ (от 0 до $y_0 = \sqrt{-x_0^2+6x_0-5} > 0$). Значит, монотонно возрастает и сумма $\arcsin(x^3+x^2-2)+\sqrt{6x-x^2-5}$ (от 0 до $\frac{\pi}{2}+y_0$). Поэтому исходное уравнение имеет единственный корень $x=1$.

Особо отметим, что приведенное решение является «избыточным», — в этом его определенный недостаток, но одновременно и большое достоинство (не надо тратить силы на поиск «рационального» решения, ошибки в вычислениях или рассуждениях обычно приводят к нестыковке разных выводов, что позволяет находить ошибки). Его можно сократить, оставив только оценки. Именно, достаточно

1) найти область определения функции $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$ — это отрезок $[1;5]$;
2) указать, что на этом множестве $\sqrt{-x^2+6x-5}\geqslant 0$;
3) указать, что на этом множестве $x^3+x-2\geqslant 0$;
4) указать при тех значениях $x\in[1;5]$, для которых определена функция $\arcsin(x^3+x-2)$, что эта функция неотрицательна (при этом важно подчеркнуть, что такие значения переменной x существуют, например, $x=1$);

После этого можно сделать вывод, что левая часть исходного уравнения больше или равна нулю, причем равенство нулю возможно тогда и только тогда, когда одновременно $\sqrt{-x^2+6x-5}=0$ и $\arcsin(x^3+x-2)=0$, что, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\begin{cases}-x^2+6x-5=0,\\ x^3+x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1;5,\\ x^3+x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: $x=1$. ■

□ **789.** Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=-|x-\pi|$$

и будем решать его графически.

Функция $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$ периодична с периодом $T=\pi$, нечетная и при $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ совпадает с функцией $y=x$. Поэтому ее график выглядит так, как представлено на рис. 18. На этом же рисунке мы изобразили график функции $y=-|x-\pi|$. Чтобы можно было различить эти графики, мы немного сдвинули график функции $y=-|x-\pi|$ вниз.

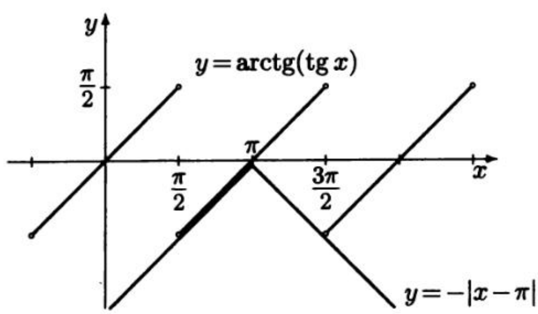


Рис. 18

Из рисунка ясно, что оба графика совпадают на промежутке $\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi$. ■

☐ **790.** В числителе и знаменателе дроби

$$\frac{x^2}{x \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}^2 x} \tag{117}$$

стоят только члены второй степени относительно переменных x и $t = \operatorname{arctg} x$. После умножения на x равенство

$$\frac{4 \operatorname{arctg}^2 x}{x} + 7\pi \operatorname{arctg} x = 2\pi^2 x \tag{118}$$

превратится в однородное уравнение. Поэтому в соответствии с общей теорией однородных многочленов преобразуем обе эти формулы так, чтобы появился блок $a = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$. Для этого числитель и знаменатель дроби (117) разделим на x^2, а уравнение (118) — на x.

Теперь задача примет вид:

найдите $\frac{1}{a + a^2}$, *если* $4a^2 + 7\pi a - 2\pi^2 = 0$.

Последнее уравнение имеет два корня: -2π и $\frac{\pi}{4}$.

Случай $a = -2\pi$ означает, что $\operatorname{arctg} x = -2\pi x$. Из графика функции $y = \operatorname{arctg} x$ ясно, что это равенство возможно только при $x = 0$. Но эта возможность исключена, так как тогда не определена первая дробь в равенстве (118).

Случай $a = \frac{\pi}{4}$ означает, что $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} x$. Из графика функции $y = \operatorname{arctg} x$ ясно, что это уравнение имеет два ненулевых корня, т. е. этот случай возможен. Теперь легко подсчитать значение дроби (117):

$$\frac{1}{a + a^2} = \frac{16}{4\pi + \pi^2}.$$

Ответ: $\frac{16}{4\pi + \pi^2}$. ■

☐ **791.** Функция $y = \arccos(\sqrt{3}x) + \arccos x$ определена на отрезке $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ и на этом множестве убывает (как сумма двух убывающих функций). Поэтому наше уравнение не может иметь больше одного корня. С другой стороны, очевидно, что $x = \frac{1}{2}$ является корнем ($\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$).

Ответ: $x = \frac{1}{2}$. ■

☐ **793.** Преобразуем уравнение к виду

$$\arcsin(\sin x) = x^2 - 10x$$

и будем решать его графически.

График правой части — парабола с вершиной в точке $(5; -25)$, пересекающая ось Ox в точках $x = 0$ и $x = 10$.

Чтобы построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$, прежде всего отметим, что эта функция нечетная и периодическая с периодом $T = 2\pi$. Поэтому достаточно построить ее график для $x \in [0; \pi]$.

На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ верно тождество $\arcsin(\sin x) = x$, так что на этом отрезке графиком нашей функции будет биссектриса первого координатного угла.

На отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ верно тождество $\arcsin(\sin x) = \pi - x$, так что на этом отрезке графиком нашей функции будет прямая линия, которая образует угол 45° с отрицательным направлением оси Ox и пересекает эту ось в точке $x = \pi$.

На рис. 19 изображены оба этих графика.

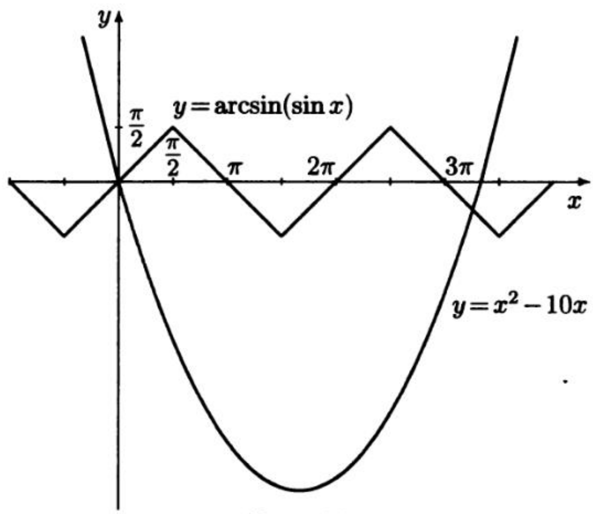


Рис. 19

Из этого рисунка следует, что исходное уравнение имеет два корня. Первый корень равен 0. Значение второго корня из рисунка определить нельзя, но ясно, что он лежит на интервале $\left(3\pi; \frac{7\pi}{2}\right)$, на котором график функции $y = \arcsin(\sin x)$ совпадает с прямой $y = -x + 3\pi$. Поэтому второй корень нашего уравнения можно определить как больший корень уравнения $x^2 - 10x = -x + 3\pi$ (меньший корень соответствует второй точке пересечения параболы $y = x^2 - 10x$ и прямой $y = -x + 3\pi$).

Из рис. 19 ясно, что функцию $y = \arcsin(\sin x)$ можно задать равенством:

$$\arcsin(\sin x) = \left|x - 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right| - \frac{\pi}{2}, \text{ если } 2\pi n - \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi n + \frac{\pi}{2} \text{ для } n \in \mathbb{Z}. \quad (119)$$

В этом соотношении неравенство

$$2\pi n - \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

можно заменить на

$$2\pi n - \frac{3\pi}{2} \leqslant x < 2\pi n + \frac{\pi}{2},$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству $n \leqslant \frac{x}{2\pi} + \frac{3}{4} < n + 1$. Последнее неравенство означает, что число n является целой частью числа $\frac{x}{2\pi} + \frac{3}{4}$:

$$n = \left[\frac{x}{2\pi} + \frac{3}{4}\right],$$

так что уравнение (119) можно записать и в виде:

$$\arcsin(\sin x) = \left|x - 2\pi\left[\frac{x}{2\pi} + \frac{3}{4}\right] + \frac{\pi}{2}\right| - \frac{\pi}{2}. \tag{120}$$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = \dfrac{9+\sqrt{81+12\pi}}{2}$. ■

□ **794.** Будем решать уравнение графически.

Чтобы упростить задачу построения графика левой части, введем новую неизвестную $t = \dfrac{6x-7}{2x-1}$. Тогда $x = \dfrac{t-7}{2t-6}$ и наше уравнение примет вид:

$$\arcsin t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi\cdot\frac{1}{t-3}. \tag{121}$$

На рис. 20 изображены графики функций $y = \arcsin t$ и $y = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi\cdot\dfrac{1}{t-3}$.

График второй функции — гипербола с вертикальной асимптотой $t = 3$ и горизонтальной асимптотой $y = \dfrac{3\pi}{2}$. Поскольку уравнение (121) определено только для $t \in [-1; 1]$, мы не изображали вторую ветвь этой гиперболы (она соответствует $t \geqslant 3$). Особой точкой гиперболы является точка, соответствующая $t = 1$, т. е. границе области определения уравнения (121). Поэтому необходимо подсчитать значение второй функции в этой точке — оно равно $\dfrac{\pi}{2}$ (также естественно определить значение в точке $t = -1$ и точки пересечения гиперболы с осями координат, хотя никакой роли эти значения не сыграют). Поскольку функция $y = \arcsin t$ возрастающая, а функция $y = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi\cdot\dfrac{1}{t-3}$ *на множестве* $[-1; 1]$ убывающая, точка $\left(1; \dfrac{\pi}{2}\right)$ будет единственной точкой пересечения графиков, так что уравнение (121) имеет единственный корень $t = 1$. Ему соответствует $x = \dfrac{3}{2}$.

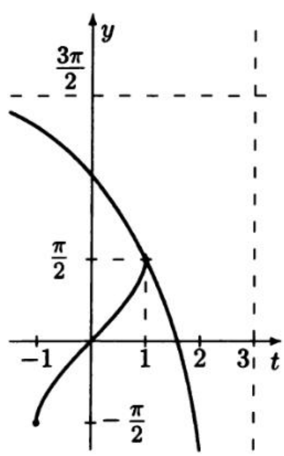


Рис. 20

Ответ: $\dfrac{3}{2}$. ■

□ **795.** Будем решать уравнение графически. С этой целью прежде всего найдем область определения уравнения.

Левая часть определена тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\begin{cases} -1 \leqslant 2^x - 7 \leqslant 1\,, \\ -1 \leqslant 5^x - 124 \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Множество решений этой системы неравенств — отрезок $[\log_5 123; 3]$.

Для $\log_5 123 \leqslant x \leqslant 3$ определена и правая часть, так что искомая область определения исходного уравнения — это отрезок $[\log_5 123; 3]$.

На этом множестве функция $y = 4\arcsin(2^x - 7)$ монотонно возрастает как суперпозиция монотонных функций $y = 4\arcsin t$, $t = 2^x - 7$.

По той же причине возрастает и функция $y = -\arccos(5^x - 124)$. Следовательно, левая часть исходного уравнения — возрастающая функция от x.

Правая часть на множестве $[\log_5 123; 3]$ — убывающая функция от x.

Поэтому исходное уравнение может иметь не больше одного корня. С другой стороны, нетрудно догадаться, что $x = 3$ — корень (к этому выводу можно прийти автоматически, если найти области значений левой и правой частей уравнения — это отрезки $\left[4\arcsin\left(2^{\log_5 123} - 7\right) - \pi; 2\pi\right]$ и $\left[2\pi; \dfrac{6\pi}{\log_5 123}\right]$ соответственно).

Ответ: 3. ■

□ **796.** Обращая внимание на большое количество выражений, которые определены не всегда, найдем область определения уравнения:

$$\begin{cases} 5 - x^2 - 4x > 0\,, \\ \dfrac{\pi}{1-x} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \\ 4x + 12 \geqslant 0\,, \\ x^2 + 2x - 3 \geqslant 0\,, \\ -1 \leqslant \dfrac{1-x}{x+7} \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 1\,, \\ x \neq \dfrac{2n-1}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{Z};\ x \neq 1\,, \\ x \geqslant -3\,, \\ x \leqslant -3;\ x \geqslant 1\,, \\ x \geqslant -3\,. \end{cases}$$

Пересечением всех найденных множеств будет одноэлементное множество $\{-3\}$.

Для завершения решения достаточно простой подстановкой проверить, превращает ли $x = -3$ исходное уравнение в истинное числовое равенство.

Ответ: $x = -3$. ■

□ **797.** Имея в виду разнородность уравнения (в нем присутствуют радикал, тригонометрические функции и обратные тригонометрические функции) и наличие двух неизвестных, естественно применить для его решения метод оценок.

С этой целью найдем области значений функций

$$f(y) = \sqrt{2 - |y|},$$

$$g(x) = 5\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33},$$

$$h(x) = \arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5}{4}\pi^2.$$

Функция $f(y)$ определена для $y \in [-2; 2]$, при этом ее область значений — это отрезок $[0; \sqrt{2}]$.

Функция $g(x) = 5\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}$ за счет понижения степени может быть приведена к виду $g(x) = -(3\sin 2x + 7\cos 2x + 2) + 3\sqrt[3]{33}$. Поэтому ее область значений — отрезок

$$\left[-2 - \sqrt{58} + 3\sqrt[3]{33}; -2 + \sqrt{58} + 3\sqrt[3]{33}\right].$$

Число $-2 - \sqrt{58} + 3\sqrt[3]{33}$ положительно (оно примерно равно 0,0058). Поэтому область значений левой части уравнений — отрезок

$$[0; \sqrt{2}(-2 + \sqrt{58} + 3\sqrt[3]{33})].$$

Функция $h(x)$ может быть преобразована к виду:

$$h(x) = \arcsin^2 x + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)^2 - \frac{5}{4}\pi^2.$$

Ее можно рассматривать как суперпозицию функций $y = 2t^2 - \pi t - \pi^2$ и $t = \arcsin x$. Поэтому область значений правой части совпадает с областью значений функции $y = 2t^2 - \pi t - \pi^2$ на множестве $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Вершина параболы $y = 2t^2 - \pi t - \pi^2$ имеет координаты $t_0 = \frac{\pi}{4}$, $y_0 = -\frac{9\pi^2}{8.}$, а значения в точках $t = -\frac{\pi}{2}$ и $t = \frac{\pi}{2}$ равны 0 и $-\pi^2$ соответственно. Поэтому искомая область значений равна $\left[-\frac{9\pi^2}{8}; 0\right]$.

Поскольку левая часть больше или равна 0, а правая часть меньше или равна 0, равенство между ними возможно тогда и только тогда, когда они порознь равны 0. Для левой части это равносильно тому, что $|y| = 2$ (так как $g(x) > 0$ при всех x), а для правой — тому, что

$$t = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin x = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: $(-1; 2), (-1; -2)$. ■

□ **798.** С помощью тождества $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ систему можно привести к виду:

$$\begin{cases} \arcsin 3x - \arcsin 2y = -\frac{\pi}{4}, \\ \arcsin 2y \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin 3x\right) = \frac{5\pi^2}{64}. \end{cases}$$

Для новых неизвестных

$$a = \arcsin 3x,$$
$$b = \arcsin 2y$$

эта система примет вид

$$\begin{cases} a - b = -\frac{\pi}{4}, \\ b \cdot \left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{5\pi^2}{64}. \end{cases}$$

Она имеет два решения

$$\begin{cases} a = \frac{3\pi}{8}, \\ b = \frac{5\pi}{8}, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{\pi}{8}, \\ b = \frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

Соответственно, исходная система распадается на две системы:

$$\begin{cases} \arcsin 3x = \dfrac{3\pi}{8}, \\ \arcsin 2y = \dfrac{5\pi}{8}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \arcsin 3x = -\dfrac{\pi}{8}, \\ \arcsin 2y = \dfrac{\pi}{8}. \end{cases}$$

Поскольку $\arcsin 2y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а $\frac{5\pi}{8} > \frac{\pi}{2}$, первая система не имеет решений.

Вторая система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{\pi}{8}, \\ y = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{8}. \end{cases}$$

Значение $\sin\frac{\pi}{8}$ фактически подсчитано в задаче 8:

$$\sin\frac{\pi}{8} = -\cos\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Поэтому для найденного решения число $2y - 3x$ равно $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Стандартными преобразованиями легко показать, что оно больше, чем $\sqrt[4]{2} - 0.5$:

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} > \sqrt[4]{2} - 0.5$$
$$\Updownarrow$$
$$2 - \sqrt{2} > \sqrt{2} - \sqrt[4]{2} + \frac{1}{4}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt[4]{2} > 2\sqrt{2} - \frac{7}{4}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{2} > 8 - 7\sqrt{2} + \frac{49}{4}$$
$$\Updownarrow$$
$$128\sqrt{2} > 177$$
$$\Updownarrow$$
$$32\,768 > 31\,329.$$

Ответ: $\left(-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{6}; \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right)$; первое число больше. ■

□ **799.** Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{4} = \dfrac{5xy}{24}, \\ x^2 + y^2 = 13, \\ -1 \leqslant \dfrac{x+y}{4} \leqslant 1. \end{cases}$$

Эта система симметрична относительно неизвестных x и y. Поэтому для ее решения введем новые неизвестные $a = x + y$, $b = xy$:

$$\begin{cases} a = \dfrac{5b}{6}, \\ a^2 - 2b = 13, \\ -4 \leqslant a \leqslant 4. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$\begin{cases} a = -\dfrac{13}{5}, \\ b = -\dfrac{78}{25}. \end{cases}$$

Возвращаясь к основным неизвестным, мы получим систему

$$\begin{cases} x + y = -\dfrac{13}{5}, \\ xy = -\dfrac{78}{25}, \end{cases}$$

которая легко решается методом исключения.

Ответ: $\left\{ \left(\dfrac{-13-\sqrt{481}}{10}, \dfrac{-13+\sqrt{481}}{10} \right), \left(\dfrac{-13+\sqrt{481}}{10}, \dfrac{-13-\sqrt{481}}{10} \right) \right\}$. ■

□ **801.** Перепишем первое уравнение системы в виде

$$\arccos y = -(1 - \cos x).$$

Левая часть этого больше или равна 0, а правая меньше или равна 0. Поэтому оно равносильно системе

$$\begin{cases} \arccos y = 0, \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Второе уравнение можно не решать и не упрощать, а использовать для проверки найденных решений первого уравнения.

Поскольку из серии $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, только $x = 0$ входит в область определения выражения $\arcsin x$, достаточно проверять только пару $(x; y) = (0; 1)$ — она, очевидно, удовлетворяет второму уравнению.

Ответ: $(0; 1)$. ■

□ **802.** Поскольку функция $y = \arccos x$ монотонно убывает, из исходного неравенства следует, что $4x - 4 < -x$. Для обратимости этого преобразования необходимо сохранить условия $-1 \leqslant 4x - 4 \leqslant 1$, $-1 \leqslant -x \leqslant 1$, гарантирующие существование $\arccos(4x - 4)$ и $\arccos(-x)$. Таким образом, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4x - 4 < -x, \\ -1 \leqslant 4x - 4 \leqslant 1, \\ -1 \leqslant -x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{4}{5}, \\ \dfrac{3}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{4}, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leqslant x < \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{4} \leqslant x < \dfrac{4}{5}$. ■

□ **803.** С помощью тождества $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ приведем исходное неравенство к виду

$$\frac{\log_{x^6} \pi \cdot \arcsin \dfrac{x}{2}}{\cos x \cdot \sqrt{x}} \leqslant 0.$$

Имея в виду «смесь» из различных функций в левой части неравенства, а также то, что фактически в задаче речь идет о знаке левой части, изучим распределение знаков этих функций.

Прежде всего найдем их общую область определения:

$$\begin{cases} x^6 \neq 0; 1, \\ -1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1, \\ x > 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1, 1 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x \leqslant 2.$$

На множестве $(0;1) \cup \left(1; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 2\right]$ функции $y = \sqrt{x}$ и $\arcsin \frac{x}{2}$ положительны и на знак левой части не влияют. Поэтому исходное неравенство равносильно более простому неравенству

$$\frac{\log_{x^6} \pi}{\cos x} \leqslant 0. \tag{122}$$

Далее, на множестве $(0;1)$ выражение $\cos x$ положительно, а выражение $\log_{x^6} \pi$ отрицательно (так как основание логарифма меньше 1, а число, от которого берется логарифм, больше 1). Поэтому для всех $x \in (0;1)$ неравенство (122) выполнено.

На множестве $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ выражение $\cos x$ положительно. Выражение $\log_{x^6} \pi$ также положительно, так как и основание логарифма, и число, от которого берется логарифм, больше 1. Поэтому неравенство (122) не выполнено ни для одного $x \in \left(1; \frac{\pi}{2}\right)$.

На множестве $\left(\frac{\pi}{2}; 2\right]$ выражение $\cos x$ отрицательно, а выражение $\log_{x^6} \pi$ положительно. Поэтому для всех $x \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\right]$ неравенство (122) выполнено.

Ответ: $(0;1) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 2\right]$. ■

□ **804.** С помощью тождеств

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

исходное неравенство можно переписать в виде:

$$2\sqrt{1 - x^2} \leqslant \sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

Чтобы избавиться от радикалов, возведем это неравенство в квадрат (второе неравенство системы гарантирует равносильность этого преобразования):

$$\begin{cases} 4(1 - x^2) \leqslant \frac{1-x}{2}, \\ 1 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Эта система из двух квадратичных неравенств легко решается:

$$\begin{cases} 8x^2 - x - 7 \geqslant 0, \\ x^2 \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \text{ или } x \leqslant -\frac{7}{8}, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant -\frac{7}{8} \text{ или } x = 1.$$

Ответ: $\left[-1; -\frac{7}{8}\right] \cup \{1\}$. ■

□ **805.** Второе неравенство явно проще первого. Поэтому вначале решим его. Прежде всего произведем упрощения в правой части:

$$\begin{cases} \dfrac{19-7x}{2x-1} > 1+9x\,, \\ x > 0\,. \end{cases}$$

Первое из этих неравенств легко решается методом интервалов:

$$\frac{19-7x}{2x-1} > 1+9x$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\left(x+\frac{\sqrt{10}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)}{x-\frac{1}{2}} < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x < -\frac{\sqrt{10}}{3} \text{ или } \frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{10}}{3}\,.$$

С учетом второго неравенства мы получим, что множество решений второго неравенства исходной системы — это интервал $\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Для $x \in \left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$ аргументы обеих обратных тригонометрических функций из первого неравенства лежат на отрезке $[0;1]$. Поэтому числа $\alpha = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{5}\,x$, $\beta = \arcsin\frac{x+3}{5}$ лежат на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, где синус монотонно возрастает. Поэтому для $x \in \left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$ первое неравенство системы равносильно неравенству

$$\sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{5}\,x\right) \geqslant \sin\left(\arcsin\frac{x+3}{5}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{1-\frac{8}{25}\,x^2} \geqslant \frac{x+3}{5}$$

$$\Updownarrow$$

$$1-\frac{8}{25}\,x^2 \geqslant \frac{(x+3)^2}{25}$$

$$\Updownarrow$$

$$9x^2+6x-16 \leqslant 0\,.$$

Множество решений квадратичного неравенства $9x^2+6x-16 \leqslant 0$ — это отрезок $\left[\frac{-1-\sqrt{17}}{3}\,;\frac{-1+\sqrt{17}}{3}\right]$. Поскольку $\frac{-1+\sqrt{17}}{3} < \frac{\sqrt{10}}{3}$, $\frac{-1-\sqrt{17}}{3} < 0 < \frac{1}{2}$, множество решений исходной системы — промежуток $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{-1+\sqrt{17}}{3}\right]$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{-1+\sqrt{17}}{3}\right]$. ■

□ **806.** Перепишем исходное неравенство в виде

$$\arccos(3x) \leqslant \frac{7\pi}{6} - \arcsin(x+1).$$

Из графика функции $y = \arccos t$ ясно, что неравенство $\arccos t \leqslant A$ равносильно совокупности из двух систем:

$$\begin{cases} A > \pi\,, \\ -1 \leqslant t \leqslant 1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant A \leqslant \pi\,, \\ \cos A \leqslant t \leqslant 1\,. \end{cases}$$

В нашем случае это означает, что исходное неравенство распадается на две системы

$$\begin{cases} \frac{7\pi}{6} - \arcsin(x+1) > \pi\,, \\ -1 \leqslant 3x \leqslant 1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant \frac{7\pi}{6} - \arcsin(x+1) \leqslant \pi\,, \\ \cos\left(\frac{7\pi}{6} - \arcsin(x+1)\right) \leqslant 3x\,, \\ 3x \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Первое неравенство первой системы равносильно неравенству

$$\arcsin(x+1) < \frac{\pi}{6}$$
$$\Updownarrow$$
$$-1 \leqslant x+1 < \frac{1}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$-2 \leqslant x < -\frac{1}{2}\,.$$

Множество решений второго неравенства первой системы — отрезок $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$. Он не пересекается с промежутком $-2 \leqslant x < -\frac{1}{2}$, так что множество решений первой системы пусто.

Первое неравенство второй системы равносильно неравенству

$$\frac{\pi}{6} \leqslant \arcsin(x+1) \leqslant \frac{7\pi}{6}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sin\frac{\pi}{6} \leqslant x+1 \leqslant 1$$
$$\Updownarrow$$
$$-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0\,.$$

Для $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0$ третье неравенство второй системы $(3x \leqslant 1)$ выполнено автоматически, и поэтому его можно не учитывать.

Второе неравенство второй системы равносильно неравенству

$$\cos\frac{7\pi}{6} \cdot \cos\big(\arcsin(x+1)\big) + \sin\frac{7\pi}{6} \cdot \sin\big(\arcsin(x+1)\big) \leqslant 3x$$
$$\Updownarrow$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1-(x+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot (x+1) \leqslant 3x$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{-3x^2 - 6x} \geqslant -7x - 1\,.$$

Последнее неравенство является стандартным иррациональным неравенством. Его решение имеет вид: $\left[-\frac{5+2\sqrt{3}}{26}\,; 0\right]$.

Пересекая это множество с множеством решений первого неравенства второй системы ($-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0$), мы получим ответ задачи.

Ответ: $\left[-\frac{5+2\sqrt{3}}{26}; 0\right]$. ■

□ **807.** Будем решать неравенство графически.

Функция $f(x) = x \arcsin(\pi x)$ определена при $x \in \left[-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right]$ и является четной:

$$f(-x) = (-x) \cdot \arcsin\big(\pi(-x)\big) = (-x) \cdot \big(-\arcsin(\pi x)\big) = f(x).$$

При $x \in \left[0; \frac{1}{\pi}\right]$ эта функция монотонно возрастает от $f(0) = 0$ до $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{2}$ (как произведение двух неотрицательных возрастающих функций $y = x$ и $y = \arcsin(\pi x)$).

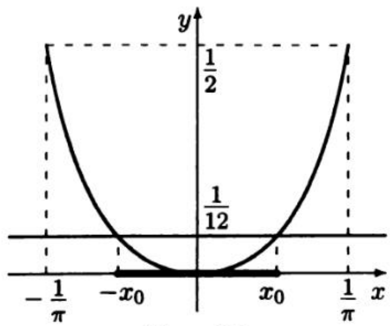


Рис. 21

Поэтому ее график выглядит так, как показано на рис. 21 Из этого рисунка ясно, что решение нашего неравенства имеет вид $[-x_0; x_0]$, где x_0 — положительный корень соответствующего уравнения. Нетрудно догадаться, что $x_0 = \frac{1}{2\pi}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2\pi}; \frac{1}{2\pi}\right]$. ■

□ **808.** Будем решать неравенство графически.

Чтобы нарисовать график функции

$$f(x) = \arcsin(\sin x) + 2\arccos(\cos x),$$

отметим, что она является периодической с периодом $T = 2\pi$.

Поэтому достаточно нарисовать ее график при $x \in [0; 2\pi]$.

Если $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin x) = x$, $\arccos(\cos x) = x$, так что на этом отрезке наша функция совпадает с линейной функцией $y = 3x$.

Если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, то $\arcsin(\sin x) = \arcsin\big(\sin(\pi - x)\big) = \pi - x$ (так как число $\pi - x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$), $\arccos(\cos x) = x$, так что на этом отрезке наша функция совпадает с линейной функцией $y = x + \pi$.

Если $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin x) = \arcsin\big(\sin(\pi - x)\big) = \pi - x$ (так как число $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$), $\arccos(\cos x) = \arccos\big(\cos(2\pi - x)\big) = 2\pi - x$ (так как число

$2\pi - x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$), так что на этом отрезке наша функция совпадает с линейной функцией $y = -3x + 5\pi$.

И наконец, если $x \in \left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$, то $\arcsin(\sin x) = \arcsin\big(\sin(x - 2\pi)\big) = x - 2\pi$ (т.к число $x - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$), $\arccos(\cos x) = \arccos\big(\cos(2\pi - x)\big) = 2\pi - x$ (так как число $2\pi - x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$), так что на этом отрезке наша функция совпадает с линейной функцией $y = -x + 2\pi$.

На рис.22 изображены графики функций $f(x) = \arcsin(\sin x) + 2\arccos(\cos x)$ и $g(x) = x - 5$.

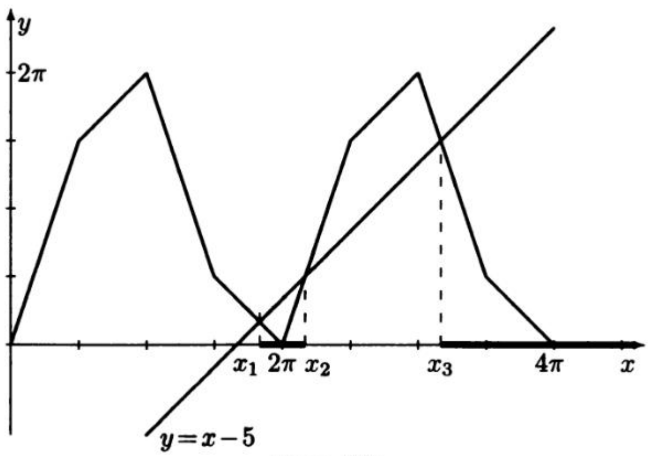


Рис. 22

Этот рисунок непосредственно дает множество решений исходного неравенства (в геометрической форме): оно состоит из отрезка $[x_1;x_2]$ и луча $[x_3;+\infty)$.

Чтобы записать этот ответ в алгебраическом виде, нужно найти точки x_1, x_2, x_3.

Точка x_1 может быть найдена как абсцисса точки пересечения прямых $y = -x + 2\pi$ и $y = x - 5$; она равна $x_1 = \pi + \frac{5}{2}$.

Точка x_2 может быть найдена как абсцисса точки пересечения прямых $y = 3(x - 2\pi)$ (сдвинутой на 2π вправо прямой $y = 3x$) и $y = x - 5$; она равна $x_2 = 3\pi - \frac{5}{2}$.

Точка x_3 может быть найдена как абсцисса точки пересечения прямых $y = -3(x - 2\pi) + 5\pi$ (сдвинутой на 2π вправо прямой $y = -3x + 5\pi$) и $y = x - 5$; она равна $x_3 = \frac{11\pi + 5}{4}$.

Ответ: $\left[\pi + \frac{5}{2}\,;3\pi - \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{11\pi + 5}{4}\,,+\infty\right)$. ■

□ **809.** Эта задача связана с еще одним определением числа $A = \arccos a$. В классической теории $\arccos a$ возникает при решении уравнения $\cos x = a$ графическим методом: корни уравнения $\cos x = a$ — это проекции на ось Ox

точек пересечения графиков $y = \cos x$ и $y = a$. «Центральный» корень, т. е. корень, который получается от пересечения с «центральной» дугой косинусоиды (соответствующей $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$), и называется $\arccos a$. Из рис. 23 ясно, что при $a \notin [-1; 1]$ уравнение $\cos x = a$ вообще не имеет корней, а при величине $a \in [-1; 1]$ величина $\arccos a$ определена однозначно. Из этого же рисунка видно,

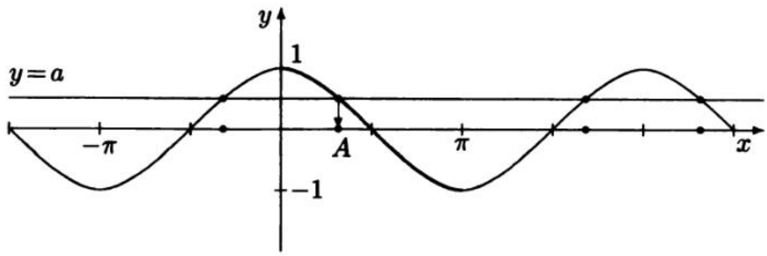


Рис. 23

что при $-1 \leqslant a < 1$ число $\arccos a$ является наименьшим положительным корнем уравнения $\cos x = a$. Наименьшим положительным корнем уравнения $\cos x = 1$ (случай $a = 1$) будет число 2π, в то время как $\arccos 1 = 0$.

Обозначим наименьший положительный корень уравнения $\cos x = a$ через $\varphi(a)$. Проведенные рассуждения означают, что для функции $\varphi(a)$ верно равенство:

$$\varphi(a) = \begin{cases} \arccos a, \text{ если } -1 \leqslant a < 1, \\ 2\pi, \text{ если } a = 1. \end{cases}$$

Отметим, что функция $\varphi(a)$ разрывна в точке $a = 1$.

Теперь введем немного более сложную функцию, чем $\varphi(a)$. Именно обозначим наименьший корень уравнения $\cos x = a$ на луче $(t, +\infty)$ через $\varphi(a; t)$ (так что, в частности, $\varphi(a) = \varphi(a; 0)$). Формально это определение можно записать следующим образом:

$$A = \varphi(a; t)$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} \cos A = a, \\ A > t, \\ \cos x = a, x > t \Rightarrow x \geqslant A. \end{cases}$$

Из этого определения легко получить следующее свойство функции $\varphi(a; t)$:

$$\varphi(a; t + 2\pi) = \varphi(a; t) + 2\pi. \qquad (123)$$

Действительно, пусть $A = \varphi(a; t)$. Докажем, что число $A + 2\pi$ удовлетворяет трем свойствам, которые определяют число $A_1 = \varphi(a; t + 2\pi)$.

1. $\cos(A + 2\pi) = \cos A = a$.

2. Поскольку $A > t$, верно неравенство $A + 2\pi > t + 2\pi$.

3. Пусть $\cos x = a$, $x > t + 2\pi$. Тогда для числа $x' = x - 2\pi$ выполнены соотношения: $\cos x' = a$, $x' > t$. Значит, $x' \geqslant A$, а тогда $x \geqslant A + 2\pi$.

Подобным же образом можно доказать справедливость еще одного интересного тождества:

$$\varphi(a; t + \pi) = \varphi(-a; t) + \pi. \tag{124}$$

Равенства (123) и (124) означают, что достаточно знать зависимость функции $\varphi(a; t)$ от t только для $t \in [0; \pi)$.

Рассматривая корни уравнения $\cos x = a$ как проекции на ось Ox точек пересечения графиков $y = \cos x$ и $y = a$, нетрудно видеть, что для $t \in [0; \pi)$ верно равенство:

$$\varphi(a; t) = \begin{cases} \arccos a, \text{ если } -1 \leqslant a < \cos t \\ 2\pi - \arccos a, \text{ если } \cos t \leqslant a \leqslant 1 \end{cases} \tag{125}$$

Введем теперь число $\psi(a)$ как наибольший отрицательный корень уравнения $\cos x = a$. Формально это определение можно записать следующим образом:

$$B = \psi(a)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \cos B = a\,, \\ B < 0\,, \\ \cos x = a, x < 0 \Rightarrow x \leqslant B\,. \end{cases}$$

Рассмотрим число $A = -B \equiv -\psi(a)$. Тогда

1. $\cos A = \cos(-B) = a$, т. е. число A является корнем уравнения $\cos x = a$.
2. Кроме того, $A > 0$ (так как $B < 0$), т. е. A — положительный корень этого уравнения.
3. Если $x > 0$ — какой-то положительный корень уравнения $\cos x = a$, то $-x$ будет отрицательным корнем этого же уравнения. Тогда $-x \leqslant B$ (ведь B — наибольший отрицательный корень), что равносильно $x \geqslant A$.

Это означает, что A — наименьший положительный корень уравнения $\cos x = a$, т. е. $A = \varphi(a)$. Таким образом, функции $\psi(a)$ и $\varphi(a)$ связаны простым соотношением:

$$\psi(a) = -\varphi(a). \tag{126}$$

Теперь введем функцию $\psi(a; t)$, аналогичную $\varphi(a; t)$. Именно обозначим через $\psi(a; t)$ наибольший корень уравнения $\cos x = a$ на луче $(-\infty; t)$. В частности, $\psi(a) = \psi(a; 0)$. Нетрудно видеть, что $\psi(a; t) = -\varphi(a; -t)$ (формальное доказательство не отличается от доказательства соотношения (126)), так что можно ограничиться изучением функции $\varphi(a; t)$.

Займемся теперь решением нашей задачи.

Левая часть первого уравнения является линейной комбинацией $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому его можно упростить с помощью дополнительного аргумента:

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{2a-1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1-2a}{2\sqrt{3}}\,.$$

Это уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда

$$-1 \leqslant \frac{1-2a}{2\sqrt{3}} \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{3}-1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{2\sqrt{3}+1}{2}\,.$$

Отрицательным корням первого уравнения соответствуют корни уравнения

$$\cos z = \frac{1-2a}{2\sqrt{3}}\,,$$

попадающие на луч $\left(-\infty; \frac{\pi}{6}\right)$. Поэтому

$$x_1(a) = \psi\left(\frac{1-2a}{2\sqrt{3}}\,;\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\,.$$

Во втором уравнении понизим степени за счет удвоения углов:

$$\cos 2x = \frac{a}{2}\,.$$

Поэтому

$$x_2(a) = \frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{a}{2}\right).$$

Используя отрицательность числа x_1 и соотношения (124), (126), неравенство $|x_1| \leqslant x_2$ можно записать в виде:

$$-x_1 \leqslant x_2$$

$$\Updownarrow$$

$$-\psi\left(\frac{1-2a}{2\sqrt{3}}\,;\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi\left(\frac{1-2a}{2\sqrt{3}}\,;-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi\left(\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}\,;\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{5\pi}{6} \leqslant \frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{a}{2}\right).$$

С помощью равенства (125) функции $f(a)$ и $g(a)$ в левой и правой частях последнего неравенства могут быть выражены через функцию arccos(.):

$$f(a) = \begin{cases} \arccos\dfrac{2a-1}{2\sqrt{3}} - \dfrac{5\pi}{6}\,, \text{ если } -\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2} \leqslant a < -1\,, \\ \dfrac{7\pi}{6} - \arccos\dfrac{2a-1}{2\sqrt{3}}\,, \text{ если } -1 \leqslant a \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}+1}{2}\,, \end{cases}$$

$$g(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a}{2}\,, \text{ если } -2 \leqslant a < 2\,, \\ \pi, \text{ если } a = 2\,. \end{cases}$$

Общая область определения этих функций — это отрезок $\left[-\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\,;2\right]$. На рис. 24 и 25 схематически изображены их графики (мы отразили только возрастание/убывание). Из этих рисунков немедленно следует ответ задачи.

Ответ: $\left[\frac{1-2\sqrt{3}}{2}\,;-1\right] \cup \{2\}$. ■

□ **810.** Для решения нашей задачи прежде всего немного упростим уравнение системы. Для этого понизим степень выражения $\cos^2 f(x)$ за счет удвоения аргумента:

$$\frac{1}{\cos\left(2f(x)\right)} - 6\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{5}{x}\,, \quad x \in \left[\frac{1}{6}\,;6\right] \tag{127}$$

Если $x \in \left[\frac{1}{6}\,;6\right]$, то $\frac{1}{x}$ также меняется на этом отрезке. Поэтому в уравнении (127) можно заменить x на $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)} - 6\cos\left(2f(x)\right) = 5x, \quad x \in \left[\frac{1}{6}\,;6\right]. \tag{128}$$

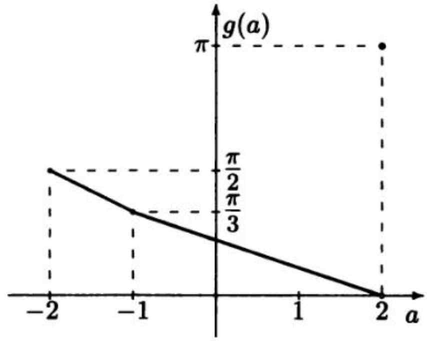


Рис. 24

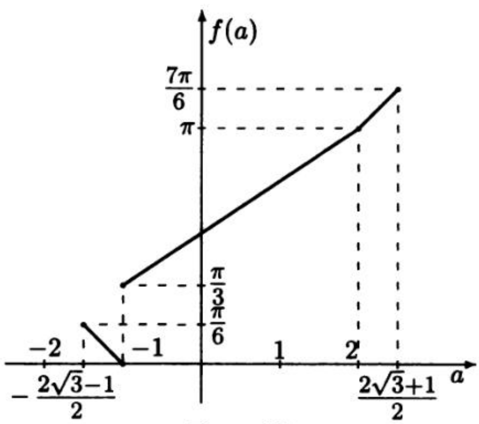


Рис. 25

Соотношения (127), (128) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя числовыми неизвестными $A = \cos\big(2f(x)\big)$ и $B = \cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$; переменная x в этом случае играет роль параметра:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{A} - 6B = \dfrac{5}{x}, \\ \dfrac{1}{B} - 6A = 5x. \end{cases}$$

Из первого уравнения можно исключить неизвестную B: $B = \frac{x-5A}{6Ax}$. Второе уравнение превратится в следующее уравнение:

$$\frac{6Ax}{x-5A} - 6A = 5x$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 6A^2 + 5Ax - x^2 = 0 \\ A \neq \dfrac{x}{5}\ . \end{cases}$$

Первое уравнение системы можно переписать в виде $(A+x)(6A-x)=0$. В силу условия $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{4}$ можно гарантировать, что $A=\cos\left(2f(x)\right) \geqslant 0$. Поэтому при $x \in \left[\frac{1}{6}\,;6\right]$ выражение $A+x$ положительно и, следовательно, $A=\frac{x}{6}$.

Поскольку $x \in \left[\frac{1}{6}\,;6\right]$, условие $A \neq \frac{x}{5}$ выполнено. Соответствующее значение B равно $B=\frac{1}{6x}$.

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \cos\left(2f(x)\right)=\frac{x}{6} \text{ при всех } x \in \left[\frac{1}{6}\,;6\right], \\ 0 \leqslant 2f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

При $x \in \left[\frac{1}{6}\,;6\right]$ величина $\frac{x}{6}$ принимает значения из отрезка $\left[\frac{1}{36}\,;1\right]$, который является подмножеством отрезка $[-1;1]$. Используя определение $\arccos a$, мы получим, что

$$f(x)=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{6}.$$

Теперь исходная задача сводится к решению обычного неравенства с обратной тригонометрической функцией:

$$\arccos\frac{x}{6} \leqslant \frac{\pi}{4}$$

на множестве $\frac{1}{6} \leqslant x \leqslant 6$. Это неравенство без труда решается графически, что дает окончательный ответ задачи: $3\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 6$.

Разобранная задача интересна потому, что в ней требовалось решить «обычную» задачу (неравенство), в которой фигурирует функция, про которую известно лишь то, что она является решением некоторого функционального уравнения. В относительно простых случаях с помощью методов, аналогичных использованному выше, можно решить это функциональное уравнение и определить функцию в явном виде. После этого основная задача сводится к обычной задаче на решение уравнения (неравенства, системы).

Ответ: $3\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 6$. ■

□ **811.** Прежде всего упростим исходное уравнение.

С помощью тождества $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$ (см. задачу 752) левую часть можно записать как $\sqrt{1-25x^2}$. Поскольку области определения функций $\sin(\arccos 5x)$ и $\sqrt{1-25x^2}$ совпадают (они задаются двойным неравенством $-1 \leqslant 5x \leqslant 1$), это преобразование равносильно.

На области определения левой части следует, что выражение $t=7x-3$ меняется на отрезке $\left[-\frac{22}{5}\,;-\frac{8}{5}\right]$. Поскольку $-\frac{22}{5}=-4{,}4>-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{8}{5}=-1{,}6<-\frac{\pi}{2}$, можно гарантировать, что $t \in \left[-\frac{3\pi}{2}\,;-\frac{\pi}{2}\right]$. На этом множестве $\arcsin(\sin t)$ равен $\left|t+\frac{\pi}{2}\right|-\frac{\pi}{2}=-t-\pi$ (см. рис.19 и равенство (119) при $n=0$). Соответственно, $\arcsin\sin(7x-3)=-7x+3-\pi$.

Таким образом, исходное уравнение можно переписать в виде:

$$\sqrt{1-25x^2} = a - 7x + 3 - \pi.$$

Левая часть напоминает равенство $\sqrt{1-t^2}$, связанное с уравнением окружности и основным тригонометрическим тождеством. Чтобы привести ее к этому (более красивому виду, который открывает возможности для дальнейших упрощений), введем новую неизвестную $t = 5x$. Поскольку между t и x существует взаимно однозначное соответствие, наша задача примет вид:

найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-t^2} = a - \frac{7t}{5} + 3 - \pi \tag{129}$$

имеет единственное решение.

Для решения уравнения (129) применим метод тригонометрических подстановок. Из уравнения следует, что $1-t^2 \geqslant 0$, т. е. $t \in [-1;1]$. Каждому значению t из этого отрезка соответствует и притом только одно значение α из отрезка $[0;\pi]$ такое, что $t = \cos\alpha$ (отметим, что $\alpha = \arccos t = \arccos 5x$).

Для новой переменной наша задача примет вид:

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha} = a - \frac{7\cos\alpha}{5} + 3 - \pi\,.$$

Выражение $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, вообще говоря, равно $|\sin\alpha|$. Но, поскольку переменная α меняется на отрезке $[0;\pi]$, можно гарантировать, что $\sin\alpha \geqslant 0$. Поэтому наша задача примет вид

$$\sin\alpha = a - \frac{7\cos\alpha}{5} + 3 - \pi$$

$$\Updownarrow$$

$$5\sin\alpha + 7\cos\alpha = 5(a + 3 - \pi)$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{74}\sin(\alpha+\varphi) = 5(a+3-\pi),$$

где $\varphi = \arccos\dfrac{5}{\sqrt{74}} = \arcsin\dfrac{7}{\sqrt{74}}$.

Поскольку между $\alpha \in [0;\pi]$ и $\beta \equiv \alpha + \varphi \in [\varphi; \pi+\varphi]$ существует взаимно однозначное соответствие, исходная задача примет вид:

найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\beta = A,$$

где $A = \dfrac{5(a+3-\pi)}{\sqrt{74}}$, имеет единственное решение на отрезке $\varphi \leqslant \beta \leqslant \pi + \varphi$.

Из графика функции $y = \sin\beta$ ясно, что это выполнено для значений A, удовлетворяющих условиям $-\sin\varphi \leqslant A < \sin\varphi$ или $A = 1$ (и только для них). Возвращаясь к переменной a, мы немедленно получаем ответ.

Второй способ решения уравнения (129) основан на построении касательной $y = -\dfrac{7t}{5} + a + 3 - \pi$ к полуокружности $y = \sqrt{1-t^2}$. Вычисления мы предлагаем читателю проделать самостоятельно.

Ответ: $\pi - 3 - \dfrac{7}{5} \leqslant a < \pi - 3 + \dfrac{7}{5}$, $a = \pi - 3 + \dfrac{\sqrt{74}}{5}$. ■

☐ **812.** Перепишем исходное уравнение в виде

$$\operatorname{arctg}\left((3a-1)\sin^2 x-\left(3a^3-a^2+3a-1\right)\sin x+\operatorname{tg}(ax-a\pi)\right)=ax-a\pi.$$

Поскольку равенство $\operatorname{arctg} A=B$ равносильно тому, что $\operatorname{tg} B=A$ и $|B|<\frac{\pi}{2}$ (это просто определение числа $\operatorname{arctg} A$), наше уравнение равносильно тригонометрическому уравнению

$$(3a-1)\sin^2 x-\left(3a^3-a^2+3a-1\right)\sin x=0 \tag{130}$$

с условием отбора корней:

$$|ax-a\pi|<\frac{\pi}{2}. \tag{131}$$

Если $a\neq\frac{1}{3}$, то последнее уравнение является квадратным относительно $z=\sin x$, и поэтому оно распадается на два уравнения: $\sin x=0$ и $\sin x=a^2+1$ (мы используем разложение многочлена $3a^3-a^2+3a-1$ на множители $(3a-1)$ и (a^2+1)).

Поэтому при $a=0$ уравнение (130) имеет бесконечно много корней вида: $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $n,m\in\mathbb{Z}$. Все эти корни удовлетворяют условию (131) (так как при $a=0$ оно превращается в истинное числовое неравенство). Таким образом, значение $a=0$ не должно включаться в ответ.

При $a\neq 0$ уравнение (130) имеет бесконечно много корней вида: $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Для них условие (131) превращается в неравенство

$$|n-1|<\frac{1}{2|a|}.$$

Параметр a включается в ответ тогда и только тогда, когда это неравенство имеет ровно три целочисленных решения. Используя геометрическую интерпретацию модуля разности двух чисел, мы видим, что это равносильно неравенству

$$1<\frac{1}{2|a|}\leqslant 2\Leftrightarrow\frac{1}{4}\leqslant|a|<\frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $a\neq\frac{1}{3}$, мы получим, что из $a\neq\frac{1}{3};0$ в ответ включаются только следующие значения a: $-\frac{1}{2}<a\leqslant-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}\leqslant a<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$.

И наконец, в особом случае $a=\frac{1}{3}$ уравнение (130) превращается в уравнение $0=0$, решениями которого являются все действительные числа. При $a=\frac{1}{3}$ условие (131) принимает вид $|x-\pi|<\frac{3\pi}{2}$, так что множество решений исходного уравнения — это интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$. Поскольку это множество бесконечно, значение $a=\frac{1}{3}$ не должно включаться в ответ.

Ответ: $-\frac{1}{2}<a\leqslant-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\leqslant a<\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$. ■

☐ **813.** Прежде всего с помощью тождества

$$\arcsin x+\arccos=\frac{\pi}{2}$$

преобразуем уравнение так, чтобы в него входили стандартные функции $y=\arcsin(\sin x)$ и $y=\arccos(\cos x)$:

$$\arcsin\left(\sin(x-a)\right)+a=\arccos\left(\cos(x+a)\right)-a.$$

Теперь введем новую неизвестную $t = x - a$. Поскольку между t и x существует взаимно однозначное соответствие, исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

найти все a, при каждом из которых уравнение

$$\arcsin(\sin t) = \arccos\left(\cos(t + 2a)\right) - 2a$$

имеет хотя бы одно решение.

Дальнейшее упрощение можно получить, если отметить, что

$$\arcsin(\sin t) = \arccos\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Это тождество очевидно следует из графиков функций $y = \arcsin(\sin t)$, $y = \arccos(\cos t)$ и, кроме того, легко может быть доказано формальными преобразованиями:

$$\arccos\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2} = \arccos(-\cos t) - \frac{\pi}{2} =$$

$$= \pi - \arccos(\cos t) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos t) = \arcsin(\sin t).$$

Теперь наше уравнение примет вид:

$$\arccos\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2} = \arccos(\cos(t + 2a)) - 2a$$

$$\Updownarrow$$

$$\arccos(\cos z) = \arccos(\cos(z + A)) - A,$$

где $z = t + \frac{\pi}{2}$, $A = 2a - \frac{\pi}{2}$.

Поскольку соответствие между t и z взаимно однозначное, вопрос задачи остается прежним: когда уравнение

$$\arccos(\cos z) = \arccos\left(\cos(z + A)\right) - A$$

имеет хотя бы одно решение?

Будем решать это уравнение графически.

Для $A = 0$ графики левой и правой частей совпадают, так что множество решений этого уравнения — вся числовая прямая.

Будем теперь увеличивать A. Тогда график функции $y = \arccos\left(\cos(z+A)\right) - A$ будет получаться из графика функции $y = \arccos(\cos z)$ параллельным переносом на A единиц влево и A единиц вниз. Этот график будет пересекаться с графиком функции $y = \arccos(\cos z)$ до тех пор, пока $A \leqslant \pi$ (для $A > \pi$ он окажется ниже графика функции $y = \arccos(\cos z)$).

Аналогично, при уменьшении A от 0 в отрицательную сторону график функции $y = \arccos(\cos(z + A)) - A$ будет пересекаться с графиком функции $y = \arccos(\cos z)$ до тех пор, пока $A \geqslant -\pi$ (для $A < -\pi$ он окажется выше графика функции $y = \arccos(\cos z)$).

Итак, условию задачи удовлетворяют значения A такие, что $-\pi \leqslant A \leqslant \pi$. Им соответствуют следующие значения основного параметра a: $-\frac{\pi}{4} \leqslant a \leqslant \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} \leqslant a \leqslant \frac{3\pi}{4}$. ■

□ **814.** В уравнении явно усматривается повторяющийся блок $x-1$:

$$b^2\sin\left(\frac{\pi}{2}-(x-1)\right)+\sin^2\left(\frac{2(x-1)}{b+1}\right)-b\sqrt{4(x-1)^2+4}=3+\arcsin|x-1|\,.$$

Поэтому введем новую неизвестную $t=x-1$. Для нее исходное уравнение примет вид:

$$b^2\cos t+\sin^2\left(\frac{2t}{b+1}\right)-2b\sqrt{t^2+1}=3+\arcsin|t|. \qquad (132)$$

Поскольку между t и x существует взаимно однозначное соответствие, вопрос задачи останется неизменным: при каких значениях параметра b уравнение (132) имеет единственный корень?

Неизвестная t входит в это уравнение только через четные функции. Поэтому оно не изменится, если t заменить на $(-t)$. Из этого свойства *инвариантности* уравнения (132) относительно преобразования $t\to(-t)$ следует, что если какое-то число t_0 является корнем уравнения (132), то и число $(-t_0)$ также будет корнем. Поэтому уравнение (132) имеет единственный корень только в случае, когда среди корней присутствует число $t_0=0$ (но при этом не исключено наличие и других корней).

Найдем, при каких значениях параметра b число 0 является корнем уравнения (132). Для этого подставим число 0 на место неизвестной. После несложных упрощений мы получим систему

$$\begin{cases} b^2-2b-3=0\,, \\ b+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3;-1\,, \\ b\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow b=3\,.$$

Обратим внимание читателя на условие $b+1\neq 0$ — оно обеспечивает существование члена $\sin^2\left(\dfrac{2t}{b+1}\right)$ и тем самым гарантирует равносильность проделанных упрощений.

Итак, уравнение (132) может иметь единственный корень только для $b=3$, при этом этим единственным корнем может быть только число 0. Еще раз подчеркнем, что это не исключает наличие и других корней; важно лишь то, что для значений параметра b, отличных от 3, уравнение (132) не может иметь единственный корень.

Для завершения решения задачи достаточно выяснить, сколько корней имеет наше уравнение для «подозрительного» значения параметра.

Если $b=3$, то уравнение (132) примет вид:

$$9\cos t+\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)-6\sqrt{t^2+1}=3+\arcsin|t|.$$

Понизим степень члена $\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$:

$$17\cos t-12\sqrt{t^2+1}=5+2\arcsin|t|.$$

На множестве $-1\leqslant t\leqslant 1$ (где определено это уравнение) функция $f(t)=17\cos t-12\sqrt{t^2+1}$ (левая часть уравнения) сначала возрастает от $f(-1)=17\cos 1-12\sqrt{2}$ до $f(0)=5$, а затем убывает до значения $f(1)=f(-1)$

(функция $f(t)$ — четная). Функция $g(t) = 5 + 2\arcsin|t|$ (правая часть уравнения) наоборот, сначала убывает от $g(-1) = 5 + \pi$ до $g(0) = 5$, а затем возрастает до значения $g(1) = g(-1)$ (функция $g(t)$ — четная). Поэтому уравнение $f(t) = g(t)$ имеет единственный корень $t = 0$.

Следовательно, проверяемое значение параметра b нужно включить в ответ задачи.

ОТВЕТ: 3. ■

□ **815.** Выражение $3^{\log_3 x}$ определено при $x > 0$ и на этом множестве совпадает с x. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \arcsin(\sin x) = \frac{c}{2} + \frac{3}{2x}, \\ x > 0. \end{cases}$$

Теперь нашу задачу можно переформулировать следующим образом:

при каких значениях параметра c графики функций $f(x) = \arcsin(\sin x)$ и $g(x) = \frac{c}{2} + \frac{3}{2x}$ имеют в полуплоскости $x > 0$ конечное число точек пересечения?

График функции $f(x)$ мы построили при решении задачи 793. Это пилообразная линия, изображенная на рис. 19.

График функции $g(x)$ при $x > 0$ — это правая ветвь гиперболы с горизонтальной асимптотой $y = \frac{c}{2}$ и вертикальной асимптотой $x = 0$.

Если оба графика изобразить на одной координатной плоскости, то из рисунка будет ясно, что они пересекаются в конечном числе точек тогда и только тогда, когда $\frac{c}{2} \geqslant \frac{\pi}{2}$ (в этом случае графики вообще не пересекаются) или $\frac{c}{2} < -\frac{\pi}{2}$.

ОТВЕТ: $c < -\pi$, $c \geqslant \pi$. ■

□ **817.** Введем новые неизвестные $u = \operatorname{arctg} x$, $v = \arccos y$. Для них исходная система примет вид:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = \pi^2 k, \\ u + v = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{133}$$

Исходная система относительно неизвестных x и y имеет решение тогда и только тогда, когда эта система относительно неизвестных u и v имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqslant v \leqslant \pi. \end{cases} \tag{134}$$

В этом случае $x = \operatorname{tg} u$, $y = \cos v$.

Левая часть первого уравнения системы (133) неотрицательна. Поэтому при $k < 0$ наша задача не имеет решений. Если $k = 0$, то первое уравнение системы (133) имеет единственное решение $(u; v) = (0; 0)$, которое не удовлетворяет второму уравнению, так что при $k = 0$ наша задача также не имеет решений.

Если $k = 1, 2, \ldots$, то множество решений первого уравнения системы (133) является окружностью радиуса $R = \pi\sqrt{k}$ с центром в начале координат (при обычной интерпретации пары чисел $(u; v)$ как точки на координатной плоскости). Второе уравнение той же системы задает прямую линию, проходящую через точки $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

При любом $k \geqslant 1$ эти две линии пересекаются в двух точках, но при $k \geqslant 2$ обе точки пересечения лежат вне квадрата со стороной π, задаваемого системой (134). В случае $k = 1$ в этот квадрат попадает лишь левая точка пересечения (у нее отрицательная абсцисса и положительная ордината). Найти координаты этой точки можно прямым решением системы (133) при $k = 1$.

После исключения неизвестной v мы получим:

$$u^2 + \left(\frac{\pi}{2} - u\right)^2 = \pi^2 \Leftrightarrow 2u^2 - \pi u - \frac{3\pi^2}{4} = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня:

$$u_1 = \pi\,\frac{1+\sqrt{7}}{4}\,, u_2 = \pi\,\frac{1-\sqrt{7}}{4}\,,$$

так что система (133) имеет два решения $\left(\pi\,\frac{1+\sqrt{7}}{4}; \pi\,\frac{1-\sqrt{7}}{4}\right)$ и $\left(\pi\,\frac{1-\sqrt{7}}{4}; \pi\,\frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$. Первая пара — это правая точка пересечения окружности $u^2 + v^2 = \pi^2$ и прямой $u + v = \frac{\pi}{2}$, а вторая — интересующая нас левая.

Возвращаясь к основным неизвестным x и y, мы имеем:

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \dfrac{(1-\sqrt{7})\pi}{4}, \\ y = \cos v = \cos \dfrac{(1+\sqrt{7})\pi}{4}\,. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $k = 1$, $x = \operatorname{tg} \frac{(1-\sqrt{7})\pi}{4}$, $y = \cos \frac{(1+\sqrt{7})\pi}{4}$. ∎

Серия: Поступаем в вуз

Учебное издание

Фалин Геннадий Иванович
Фалин Анатолий Иванович

ТРИГОНОМЕТРИЯ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ
ПО МАТЕМАТИКЕ В МГУ

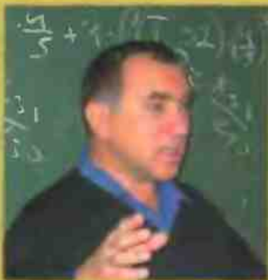
Ведущий редактор *М. Стригунова*
Художник *Ф. Мала*
Художественный редактор *О. Лапко*
Корректор *Е. Клитина*
Оригинал-макет подготовлен *О. Лапко* в пакете LaTeX 2_ε
с использованием кириллических шрифтов семейства LH

Подписано в печать 27.03.07. Формат $70 \times 100/16$.
Гарнитура Computer Modern. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 26,65. Тираж 2000 экз. Заказ 2179

БИНОМ. Лаборатория знаний
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (495) 157-5272,
e-mail: Lbz@aha.ru, http://www.Lbz.ru

При участии ООО ПФ «Сашко»

Отпечатано в ОАО "ИПК "Ульяновский Дом печати"
432980, г. Ульяновск,ул. Гончарова, 14



Фалин Геннадий Иванович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Область научных интересов: теория вероятностей и ее приложения (теория телетрафика, исследование операций, актуарная математика). Автор около 100 научных работ и 8 книг.

Имеет большой опыт преподавания элементарной математики и приема вступительных экзаменов. Им опубликован ряд учебно-методических пособий (в том числе в соавторстве с А. И. Фалиным).

Фалин Анатолий Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова.

Область научных интересов: асимптотические методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, приложения теории вероятностей, методика преподавания элементарной математики.

Имеет многолетний опыт преподавания математики на факультетах МГУ им. М. В. Ломоносова, подготовительном отделении МГУ и в физико-математической школе им. А. Н. Колмогорова. В течение многих лет работал в составе экзаменационной комиссии по математике на различных факультетах МГУ.

Автор 5 книг и более 40 научных и учебно-методических работ (в том числе в соавторстве с Г. И. Фалиным)

ISBN 978-5-94774-671-6

9785947746716