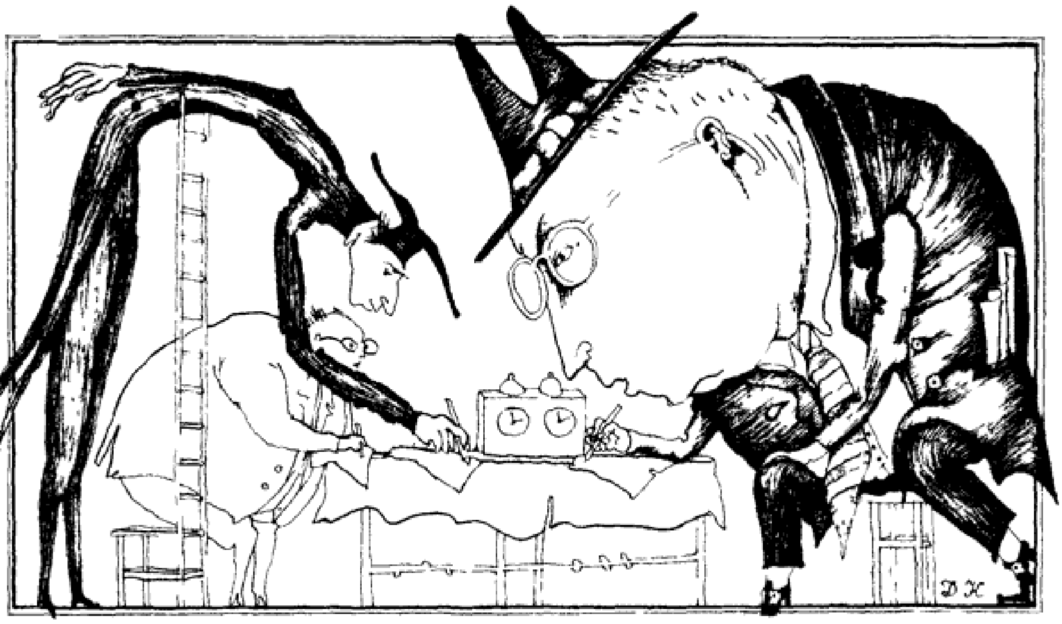

Практикум абитуриента

Решение систем тригонометрических уравнений

*Кандидат физико-математических наук А. А. БОЛИБРУХ,
кандидат физико-математических наук В. М. УРОЕВ,
профессор М. И. ШАБУНИН*

В данной заметке на примерах задач, предлагавшихся в разные годы на вступительных экзаменах в МФТИ (письменных и устных), приведены некоторые способы решения систем тригонометрических уравнений.

Напомним определения, относящиеся к любым, не обязательно тригонометрическим, системам. Если каждое решение одной системы является решением другой системы, то вторая система называется *следствием* первой. Если первая система является следствием второй, а вторая — следствием первой, то такие системы называются *равносильными*.

Укажем некоторые преобразования систем, в результате которых получаются системы, равносильные исходной.

1. Любое уравнение системы можно заменить равносильным ему уравнением.

2. Любое уравнение системы можно заменить уравнением, которое получается сложением данного с другим уравнением системы.

3. Значение неизвестного, найденное из некоторого уравнения системы, можно подставить в любое другое уравнение той же системы.

4. К системе можно добавить уравнение, являющееся следствием данной системы.

5. Если система содержит уравнение $f\cdot g=0$, где функции f и g определены на одном и том же множестве, то она равносильна совокупности двух систем, в одной из которых уравнение $f\cdot g=0$ заменено уравнением $f=0$, а в другой — уравнением $g=0$.

Приступая к решению системы тригонометрических уравнений, целесообразно вначале проверить, нельзя ли непосредственно из какого-либо уравнения системы выразить одно из неизвестных через другие.

З а д а ч а 1 (МФТИ, 1983). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y, & (1)\\ \sin 2y-\sqrt{2}\sin x=1. & (2)\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Исходная система имеет смысл лишь в случае, когда определены функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$, т. е. выполняются условия

$$\cos x \neq 0, \quad \cos y \neq 0. \qquad (3)$$

Рассмотрим первое уравнение. Естественно было бы разделить обе его части на $1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$ и воспользоваться формулой тангенса суммы. Тогда уравнение (1) можно было бы переписать в виде

$$\operatorname{tg}(x + y) = 1; \qquad (4)$$

но при этом мы можем потерять те решения системы (1), (2), для которых

$$1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 0. \qquad (5)$$

Однако легко убедиться в том, что система (1), (2), (5) не имеет решений. В самом деле, если бы существовали решения этой системы, то из уравнения (1) следовало бы, что $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0$. Но тогда уравнение (5) приняло бы вид $1 + \operatorname{tg}^2 y = 0$, и следовательно, оно бы решений не имело.

Таким образом, исходная система при условии (3) равносильна системе (2), (4).

Из уравнения (4) находим $x + y = \pi/4 + \pi n$, т. е.

$$y = \pi/4 + \pi n - x, \quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (6)$$

Теперь найденное для y выражение подставим в уравнение (2) исходной системы:

$$\sin(\pi/2 - 2x + 2\pi n) - \sqrt{2}\sin x = 1.$$

Полученное уравнение приводится к виду $\sin x\,(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$, откуда

а) $\sin x = 0, \quad x = \pi m, \quad m \in \mathbf{Z}$,

б) $\sin x = -\sqrt{2}/2$,

$x = (-1)^{k+1}\pi/4 + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

По формуле (6) определяем соответствующие значения y. Для серии а)

$$y = \pi/4 + \pi(n - m), \quad n, m \in \mathbf{Z}; \qquad (7)$$

для серии б)

$$y = \pi/4 - (-1)^{k+1}\pi/4 + \pi(n - k), \quad n, k \in \mathbf{Z}. \qquad (8)$$

Значения (x, y) из формулы (7) удовлетворяют условию (3). Для серии (8) требуется дополнительное исследование. Если $\sin x = -\sqrt{2}/2$, то $\cos x \neq 0$, так что первое неравенство условия (3) заведомо выполнено. Второе неравенство $\cos y \neq 0$ выполняется не всегда.

Если k — четное число, т. е. $k = 2p$, где $p \in \mathbf{Z}$, то по формуле (8) находим $y = \pi/2 + \pi(n - 2p)$. Для этих значений y условие (3) не выполняется. Если же k — нечетное число, т. е. $k = 2p - 1$, где $p \in \mathbf{Z}$, то $y = \pi(n - 2p + 1)$ и условие (3) выполнено. Соответствующие значения x находим по формуле б): $x = -3\pi/4 + 2\pi p$.

Ответ: $(\pi m;\ \pi/4 + \pi(n - m))$, $(-3\pi/4 + 2\pi p;\ \pi(n - 2p + 1))$, $m, n, p \in \mathbf{Z}$.

Целочисленные параметры, входящие в запись решений системы, нельзя обозначать одной буквой. Это означало бы, что они обязаны принимать одинаковые значения, в то время как в действительности они принимают какие-угодно целые значения — одинаковые или разные.

В дальнейшем k, l, m, n, p, r, s, t, если не оговорено противное, принимают все целые значения.

Задача 2. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -1/2, \\ \cos x \cdot \sin y = 1/2. \end{cases} \qquad (9)$$

Решение. Сложив уравнения системы (9), а затем вычтя из второго уравнения первое, получим систему, равносильную системе (9):

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ \sin(y - x) = 1, \end{cases}$$

откуда последовательно находим

$$x + y = \pi n, \quad y - x = \pi/2 + 2\pi k,$$
$$x = \pi(n/2 - k - 1/4),$$
$$y = \pi(n/2 + k + 1/4).$$

Ответ: $(\pi(n/2 - k - 1/4);\ \pi(n/2 + k + 1/4))$.

Так же, как систему (9), можно решить любую систему вида

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a, \\ \cos x \cdot \cos y = b. \end{cases}$$

К таким системам приводятся, например, системы

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y = b. \end{cases}$$

Если система содержит только две комбинации тригонометрических функций либо приводится к таковой, то, обозначив эти комбинации функций за новые неизвестные, можно свести исходную систему к алгебраической.

Задача 3. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 1 + \cos y - \sin y, \\ 3\sin 2x - 2\sin 2y = 3/4. \end{cases} \qquad (10)$$

Решение. Воспользуемся тождеством

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

и обозначим

$$\cos x - \sin x = u, \quad \cos y - \sin y = v; \qquad (11)$$

тогда

$$\sin 2x = 1 - u^2, \quad \sin 2y = 1 - v^2,$$

и система (10) сводится к алгебраической системе

$$\begin{cases} u = 1 + v, \\ 3u^2 - 2v^2 = 1/4. \end{cases} \qquad (12)$$

Система (12) имеет два решения: $u_1 = -9/2$, $v_1 = -11/2$ и $u_2 = 1/2$, $v_2 = -1/2$.

Рассмотрим вначале значения u_1, v_1. Возвращаясь к исходным переменным, по формулам (11) получаем:

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = -9/2, \\ \cos y - \sin y = -11/2. \end{cases} \qquad (13)$$

Но уже первое уравнение системы (13) решений не имеет, так как

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \pi/4) \geqslant \geqslant -\sqrt{2} > -9/2.$$

Следовательно, система (13) решений не имеет.

Рассмотрим теперь значения u_2 и v_2. Вновь по формулам (11) получим

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 1/2, \\ \cos y - \sin y = -1/2. \end{cases}$$

Для первого уравнения находим

$$\cos x \cdot 1/\sqrt{2} - \sin x \cdot 1/\sqrt{2} = 1/2\sqrt{2}, \ \cos(x + \pi/4) = 1/2\sqrt{2},$$

$$x + \pi/4 = \pm\arccos(1/2\sqrt{2}) + 2\pi n,$$

$$x = -\pi/4 \pm \arccos(1/2\sqrt{2}) + 2\pi n.$$

Точно так же получаем

$$y = -\pi/4 \pm \arccos(-1/2\sqrt{2}) + 2\pi m.$$

Таким образом, найдем следующие решения исходной системы:

$$(-\pi/4 \pm \arccos(1/2\sqrt{2}) + 2\pi n; \ -\pi/4 \pm \arccos(-1/2\sqrt{2}) + 2\pi m)$$

(знаки выбираются независимо друг от друга).

В некоторых случаях систему удается привести к виду

$$\begin{cases} \sin x = f(y), \\ \cos x = g(y), \end{cases} \qquad (14)$$

откуда в силу основного тригонометрического тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ получаем уравнение $f^2(y) + g^2(y) = 1$, содержащее лишь одно неизвестное.

Если система приведена к виду

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = f(y), \\ \operatorname{ctg} x = g(y), \end{cases}$$

то неизвестное x исключается перемножением уравнений: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$, откуда $f(y) \cdot g(y) = 1$.

При таких способах решения необходимо внимательно следить за тем, чтобы не потерять решений и не приобрести посторонних решений.

Задача 4 (МФТИ, 1978). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} 4\sin x - 2\sin y = 3, \\ 2\cos x - \cos y = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Решение. Систему (15) можно привести к виду (14). Сделав это, получим равносильную систему

$$\begin{cases} \sin x = 3/4 + 1/2 \cdot \sin y, \\ \cos x = 1/2 \cdot \cos y. \end{cases} \qquad (16)$$

Возводя почленно уравнения системы (16) в квадрат и складывая, получаем уравнение, являющееся следствием системы (16):

$$1 = \frac{9}{16} + \frac{3}{4}\sin y + \frac{1}{4}\sin^2 y + \frac{1}{4}\cos^2 y,$$

или

$$\sin y = 1/4, \qquad (17)$$

откуда

$$y = (-1)^n \arcsin 1/4 + \pi n. \qquad (18)$$

Из первого уравнения системы (16) с учетом (17) находим $\sin x = 7/8$,

$$x = (-1)^m \arcsin 7/8 + \pi m. \qquad (19)$$

Поскольку при решении системы (15) могли появиться посторонние решения (использовалась операция возведения в квадрат), необходимо произвести отбор, подставив найденные значения (18), (19) во второе уравнение этой системы.

Легко видеть, что при четных m и n в формулах (18), (19) соответствующие значения $\cos x$ и $\cos y$ положительны, а при нечетных m и n эти значения отрицательны. Таким образом, $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{15}/8$, $|\cos y| = \sqrt{15}/4$, так что для выполнения второго уравнения системы (16) требуется только, чтобы знаки $\cos x$ и $\cos y$ совпадали. Отсюда получаем

$$\begin{cases} x = \arcsin\frac{7}{8} + 2\pi k, \\ y = \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi l, \end{cases} \qquad (20)$$

$$\begin{cases} x = -\arcsin\frac{7}{8} + (2k+1)\pi, \\ y = -\arcsin\frac{1}{4} + (2l+1)\pi. \end{cases}$$

Обе полученные серии (20) можно объединить и ответ записать в следующем виде.

Ответ:

$$((-1)^p \arcsin \frac{7}{8} + \pi p,$$
$$(-1)^p \arcsin \frac{1}{4} + \pi (p + 2r)).$$

При решении тригонометрических систем часто бывает непросто сделать первый шаг, найти «ключ» к решению задачи. Какие-то общие рекомендации здесь дать нельзя. Можно лишь посоветовать стараться применять такие преобразования уравнений системы, которые приводят к появлению тригонометрических функций одного аргумента или хотя бы не увеличивают число функций с разными аргументами.

Задача 5 (МФТИ, 1982). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} 3\cos 3x = \sin (x + 2y), \\ 3\sin (2x + y) = -\cos 3y. \end{cases} \quad (21)$$

Решение. Если выразить члены уравнений через синусы и косинусы аргументов x и y, то получится довольно сложная система. Поэтому следует избрать другой способ решения.

Заметим, что сумма аргументов косинусов в уравнениях системы, равная $3x + 3y$, совпадает с суммой аргументов синусов. Учитывая это, перемножим уравнения системы (21) «крест-накрест», т. е. умножим левую часть одного уравнения на правую часть другого. Получим уравнение

$$-\cos 3x \cos 3y = \sin (x + 2y) \sin (2x + y), \quad (22)$$

являющееся следствием системы (21).

Заменим в уравнении (22) произведения тригонометрических функций соответствующими суммами (разностями); получим после приведения подобных $\cos (x - y) + \cos (3x - 3y) = 0$, откуда $2 \cos (x - y) \cdot \cos (2x - 2y) = 0$. Это уравнение распадается на два уравнения:

$$\cos (x - y) = 0, \quad (23)$$
$$\cos (2x - 2y) = 0. \quad (24)$$

Следовательно, система (21) равносильна совокупности систем (21), (23) и (21), (24).

а) Из уравнения (23) следует, что

$$x = y + \pi/2 + \pi n. \quad (25)$$

Подставляя x из (25) в систему (21), получаем:

$$\begin{cases} 3\cos (3y + 3\pi/2 + 3\pi n) = \\ = \sin (3y + \pi/2 + \pi n), \\ 3\sin (3y + \pi + 2\pi n) = -\cos 3y. \end{cases}$$

Оба уравнения этой системы приводятся к виду $3 \sin 3y = \cos 3y$, откуда $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{\pi m}{3}$. Из (25) находим соответствующие значения x.

б) Рассмотрим теперь систему (21), (24). Из уравнения (24) находим $x = y + \pi/4 + \pi k/2$. Подставляя это значение в систему (21), получаем:

$$\begin{cases} 3\cos (3y + 3\pi/4 + 3\pi k/2) = \\ = \sin (3y + \pi/4 + \pi k/2), \\ 3\sin (3y + \pi/2 + \pi k) = -\cos 3y. \end{cases} \quad (26)$$

Далее воспользуемся формулами приведения. Из второго уравнения системы (26) следует, что $\cos 3y = 0$, т. е. $y = \pi/6 + \pi p/3$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем

$$3\cos (\pi p + \pi/2 + 3\pi/4 + 3\pi k/2) = \sin (\pi p + 3\pi/4 + \pi k/2),$$

откуда $(3(-1)^k + 1) \sin (3\pi/4 + \pi k/2) = 0$. Последнее равенство не выполняется ни при каких целых k, поэтому система (26) несовместна, и в случае б) решений нет.

Ответ: $\left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi m}{3} + \pi n;\ \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{\pi m}{3}\right)$.

Упражнения

Решите системы уравнений:

1 (МФТИ, 1982).

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y, \\ \cos 2y + \sqrt{3} \cos 2x = -1. \end{cases}$$

2 (МФТИ, 1978).

$$\begin{cases} 6\cos x + 4\cos y = 5, \\ 3\sin x + 2\sin y = 0. \end{cases}$$

3 (МФТИ, 1982).

$$\begin{cases} 2\cos (3x + y) = \sin (x - y), \\ 2\sin (x + y) = \cos (3x - y). \end{cases}$$

4 (МФТИ, 1982).

$$\begin{cases} \sin (2x + y) + \sin (2x - y) = \sqrt{2} \cos y, \\ \operatorname{tg} (x + \pi/8) + \cos y = \operatorname{tg}^2 y. \end{cases}$$

5 (МФТИ, 1981).

$$\begin{cases} \cos 2y + 1/2 = (\cos y - 1/2)(1 + 2\sin 2x), \\ \sin y (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x) = 3 \operatorname{ctg} y. \end{cases}$$

6 (МФТИ, 1976).

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos y \cdot \sin x = \cos 2y, \\ \cos 2x + \sin 2y = \sin^2 y + 3\cos y \cdot \sin x. \end{cases}$$

7 (МФТИ, 1978).

$$\begin{cases} \sqrt{1 + \sin x \cdot \sin y} = \cos x, \\ 2\sin x \cdot \operatorname{ctg} y + 1 = 0. \end{cases}$$

8 (МФТИ, 1986).

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \sin y + 2 \operatorname{ctg} x \cos y = \sqrt{5/2}, \\ 2 \operatorname{ctg} x \cdot \sin y - \operatorname{tg} x \cdot \cos y = \sqrt{5/2}. \end{cases}$$

9 (МФТИ, 1982), Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \sin y + 2 \operatorname{ctg} x \cdot \cos y = \sqrt{5/2}, \\ 2 \operatorname{ctg} x \cdot \sin y - \operatorname{tg} x \cdot \cos y = \sqrt{5/2}. \end{cases}$$