ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

В. Б. Демьянов

Тригонометрическими неравенствами мы будем называть неравенства, содержащие неизвестное x, которое входит в состав аргументов тригонометрических функций. Решить тригонометрическое неравенство — это значит, как и всегда, найти все значения неизвестного, удовлетворяющие этому неравенству.

Для решения простейших тригонометрических неравенств не требуется никаких специальных знаний, выходящих за пределы школьной программы. Именно, в разбираемых ниже примерах, кроме свойств тригонометрических функций, используются лишь понятие абсолютной величины числа (пример 4), правила решения квадратных неравенств (примеры 5—8) и свойства логарифмической функции (примеры 9, 10). Этих сведений достаточно и для того, чтобы справиться с примерами, приведенными в конце статьи для самостоятельного решения.

С самого начала, однако, необходимо отметить одно принципиальное обстоятельство. В тригонометрических неравенствах аргументы тригонометрических функций рассматриваются не как углы или дуги, а как в е щ е с т в е н н ы е ч и с л а. Поскольку опыт показывает, что в этом вопросе у многих выпускников средней школы нет полной ясности, остановимся на нем несколько подробнее. Абитуриенту же настоятельно рекомендуется тщательно продумать то, что по этому поводу говорится ниже.

Обычно тригонометрические функции вводятся сначала как функции угла (точнее, даже только острого угла). Затем понятие аргумента тригонометрической функции расширяется — начинают рассматривать функции дуги. При этом оказывается, что удобно не ограничиваться дугами, заключенными в пределах одного оборота, то есть имеющими значения от 0° до 360°, а рассматривать дуги, величина которых выражается любым числом градусов (как положительным, так и отрицательным). При таком понимании аргумента тригонометрические функции оказываются периодическими. Следующий шаг состоит в том, что от градусного измерения дуг переходят к радианному. И наконец, приходят к понятию тригонометрической функции в е щ е с т в е н н о г о ч и с л а. Именно, под значением тригонометрической функции числа понимают значение данной функции для той дуги, величина которой в радианах выражается этим числом.

В физике тригонометрические функции числового аргумента естественным образом появляются при описании различных периодических процессов, то есть таких процессов, характер которых через определенные промежутки времени полностью повторяется. Именно поэтому в математике и целесообразно рассматривать тригонометрические функции числового аргумента. Фактически мы так и поступаем уже тогда, когда строим графики тригонометрических функций. В самом деле, по оси абсцисс мы при этом откладываем значения вещественных чисел.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные тригонометрические неравенства, причем начнем с самого простого примера.

Пример 1. Решить неравенство $\operatorname{tg} x < 1$.

Решение. Сначала покажем, как не следует «решать» это неравенство, то есть разберем часто встречающиеся неправильные ответы на вопрос.

Иногда абитуриент, замечая, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и что вблизи значения $x = \frac{\pi}{4}$ функция $\operatorname{tg} x$ с увеличением x возрастает, записывает ответ в форме: $x < \frac{\pi}{4}$. Уже по внешнему виду» ответа можно сказать, что он неверен, так как в нем никак не отражена периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$. Легко указать и конкретные значения x, удовлетворяющие условию $x < \frac{\pi}{4}$, но не удовлетворяющие заданному неравенству. Например, при $x = -\frac{2\pi}{3}$ имеем: $-\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{4}$, но $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} > 1$; при $x = -\frac{\pi}{2}$ левая часть неравенства не имеет смысла, следовательно, это значение неравенству тоже не удовлетворяет, хотя снова $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4}$.

Бывает и так, что абитуриент пытается учесть периодичность, но проявляет при этом беспомощность. Именно, часто «ответ» дается в виде:

$$x < \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Этот «ответ» еще хуже, так как он вообще лишен смысла. Легко убедиться, что чисел x, удовлетворяющих условию $x < \frac{\pi}{4} + k\pi$ для всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ просто нет.

Чтобы получить правильный ответ, полезно рассмотреть график функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 1), так как рассуждения при этом получат геометрическую наглядность.

Неравенству $\operatorname{tg} x < 1$ удовлетворяют те и только те значения x, для которых соответствующие точки графика лежат ниже пунктирной горизонтальной прямой $y = 1$. Далее, из рисунка 1 ясно, что если мы найдем все решения, принадлежащие какому-нибудь определенному интервалу длины π, то все остальные решения будут отличаться от найденных сдвигом вправо или влево на π, 2π, 3π и т. д. Причина этого в том, что число π является периодом функции $y = \operatorname{tg} x$.

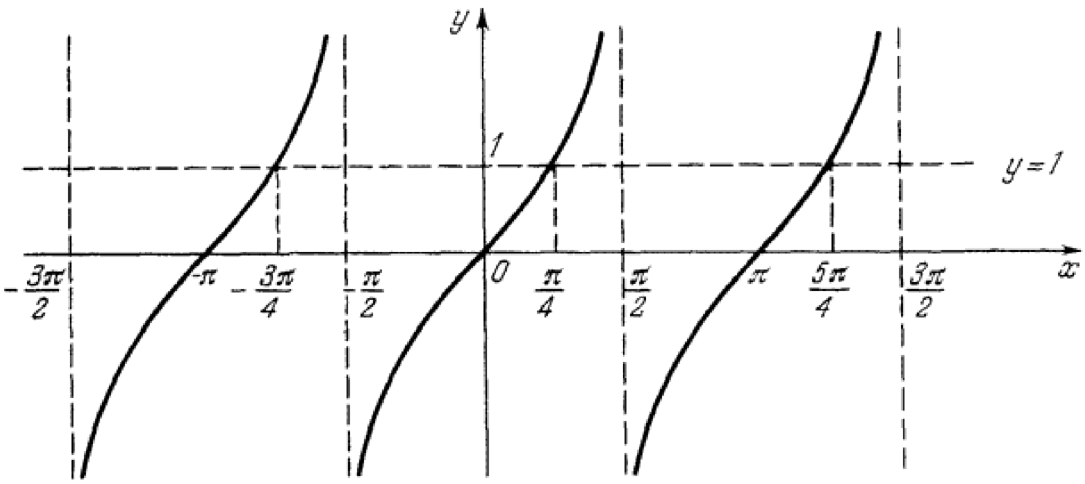

Рис. 1.

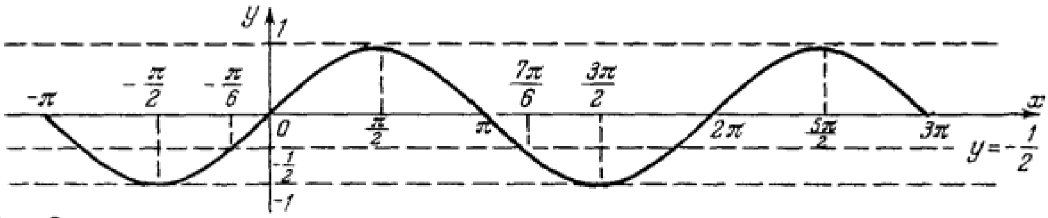

Рис. 2.

Для того чтобы ответ записывался как можно короче, желательно исходный интервал длины π выбрать так, чтобы принадлежащие ему решения заполняли в свою очередь какой-то один сплошной интервал. Из рисунка опять-таки видно, что так будет обстоять дело, если в качестве исходного интервала взять, например, интервал от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. На этом интервале ниже прямой $y = 1$ лежат те точки графика, которые соответствуют значениям x, удовлетворяющим неравенствам $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$. Поэтому окончательный ответ имеет вид

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Ответ, таким образом, представляет собой совокупность интервалов, каждый из которых получается при некотором фиксированном значении k.

Аналогично обстоит дело и в ответах на все дальнейшие примеры.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sin x \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Решение. Рассмотрим график функции $y = \sin x$ (рис. 2). Неравенству $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ удовлетворяют те значения x, для которых соответствующие точки графика лежат не ниже пунктирной прямой $y = -\frac{1}{2}$ (если точка графика лежит на самой этой прямой, то значение x удовлетворяет заданному неравенству, так как оно «не строгое», в нем допускается равенство левой и правой частей). Функция $y = \sin x$ имеет период 2π. Поэтому рассмотрим сначала какой-нибудь интервал длины 2π, например интервал от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$. Из рисунка 2 видно, что неравенству $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ в этом интервале удовлетворяют следующие значения x: $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$.

Учитывая периодичность, получаем ответ:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Пример 3. Решить неравенство

$$\cos(3x + 2) > -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное $t = 3x + 2$. Тогда относительно t мы получим неравенство $\cos t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как оно совершенно аналогично неравенствам из примеров 1 и 2 (для его решения можно рассмотреть график функции $y = \cos t$), мы сразу выпишем ответ для t:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < t < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

или, возвращаясь к неизвестному x,

$$-\frac{3\pi}{4}+2k\pi<3x+2<\frac{2\pi}{4}+2k\pi$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

Выражая отсюда x, получаем ответ для заданного неравенства:

$$-\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}<x<$$

$$<-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Пример 4. Решить неравенство

$$|\sin x|>\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Освобождаясь от знака абсолютной величины, получаем, что заданному неравенству будут удовлетворять те и только те значения x, которые удовлетворяют хотя бы одному из неравенств

$$\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решая каждое из них методом, рассмотренным в примерах 1 и 2, получаем для неравенства $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ ответ:

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

а для неравенства $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ответ:

$$-\frac{2\pi}{3}+2m\pi<x<-\frac{\pi}{3}+2m\pi$$

$$(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Поэтому ответ для заданного неравенства $|\sin x|>\frac{\sqrt{3}}{2}$ можно записать в виде двух «серий»

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x_1<\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2m\pi<x_2<-\frac{\pi}{3}+2m\pi$$

$$(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

Заметим, что так как $-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\pi$ и $-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-\pi$, вторую серию можно записать иначе

$$\frac{\pi}{3}+(2m-1)\pi<x_2<$$

$$<\frac{2\pi}{3}+(2m-1)\pi$$

$$(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Теперь обе серии можно объединить одной формулой:

$$\frac{\pi}{3}+n\pi<x<\frac{2\pi}{3}+n\pi$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

причем для четных n получаются интервалы первой серии, а для нечетных n — интервалы второй серии.

Пример 5. Решить неравенство

$$\cos^2 x<\frac{3}{4}.$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное $y=\cos x$. Неравенство примет вид $y^2<\frac{3}{4}$. Отсюда $-\frac{\sqrt{3}}{2}<y<\frac{\sqrt{3}}{2}$ или

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, заданное неравенство свелось к системе неравенств

$$\begin{cases}\cos x<\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\[2mm] \cos x>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

Подчеркнем отличие теперешней ситуации от той, которая имела место в примере 4. Там для выполнения заданного неравенства нужно было, чтобы выполнялось хотя бы одно из двух неравенств $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Здесь же заданному неравенству будут удовлетворять те значения x, которые

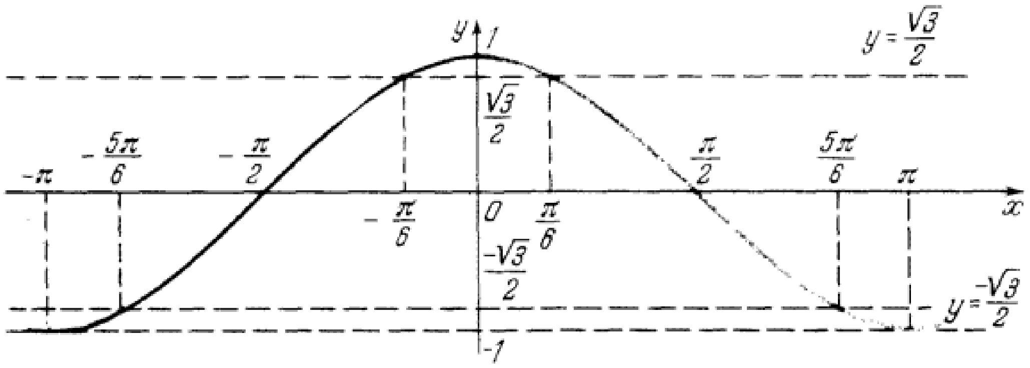

Рис 3

удовлетворяют одновременно каждому из неравенств $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как функция $y = \cos x$ имеет период 2π, рассмотрим сначала значения x, лежащие на интервале от $-\pi$ до π. Построим для этого интервала график функции $y = \cos x$ (рис 3). Системе

$$\begin{cases} \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

удовлетворяют те значения x, для которых соответствующие точки графика попадают внутрь горизонтальной полосы, ограниченной сверху пунктирной прямой $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а снизу пунктирной прямой $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Из рисунка видно, что этому условию удовлетворяют следующие значения x: во-первых, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, во-вторых, $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$ Учитывая периодичнссть, мы можем теперь записать ответ в виде двух серий:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x_1 < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \quad),$$

$$-\frac{5\pi}{6} + 2m\pi < x_2 < -\frac{\pi}{6} + 2m\pi$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Как и в примере 4, эти две серии можно объединить одной формулой:

$$\frac{\pi}{6} + n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Заметим, что неравенство $\cos^2 x < \frac{3}{4}$ можно решить проще, если сначала преобразовать его к виду

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} < \frac{3}{4},$$

откуда $\cos 2x < \frac{1}{2}$. Полагая $2x = t$, получаем, что

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi < t < \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{6} + n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Однако, первый способ решения, основанный на сведении к квадратному неравенству, обладает большей общностью, в чем мы убедимся ниже (примеры 6, 7, 8).

Пример 6. Решить неравенство $\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \leqslant 0$.

Решение. Полагая $y = \operatorname{tg} x$, мы, как и в предыдущем примере, приходим к квадратному неравенству: $y^2 - (1 + \sqrt{3})\, y + \sqrt{3} \leqslant 0$. Решая его, получаем, что $1 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}$. Таким образом, вопрос снова свелся к решению системы неравенств

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x \geqslant 1. \end{cases}$$

Период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен π. Рассуждая так же, как в примере 5, находим сначала для интервала от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ следующие значения x: $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$. Учитывая периодичность, получаем окончательный ответ:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

Все разобранные до сих пор примеры были подобраны так, чтобы в ответах фигурировали «круглые» значения аргументов типа $\frac{\pi}{6}, \ \frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{3}$. Однако в принципе это совсем не обязательно, так как ответ может быть записан всегда с помощью символов обратных тригонометрических функций. Для иллюстрации этого рассмотрим пример, отличающийся от примера 6 лишь значениями числовых коэффициентов.

Пример 7. Решить неравенство

$$\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 6 \leqslant 0.$$

Решение. Рассуждая дословно так же, как в примере 6, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant 3, \\ \operatorname{tg} x \geqslant 2. \end{cases}$$

Ответ теперь запишется в виде

$$k\pi + \operatorname{arctg} 2 \leqslant x \leqslant k\pi + \operatorname{arctg} 3$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пример 8. Решить неравенство

$$12 \sin^2 x - 19 \sin x + 5 < 0.$$

Решение. Полагая $y = \sin x$, получаем квадратное неравенство $12y^2 - 19y + 5 < 0$, откуда $\frac{1}{3} < y < \frac{5}{4}$. Таким образом, неизвестное x должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} \sin x < \frac{5}{4}, \\ \sin x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Отличие от примеров 5, 6, 7 состоит в том, что первому неравенству системы, то есть неравенству $\sin x < \frac{5}{4}$ удовлетворяют все вещественные значения x. Поэтому фактически нужно решить лишь второе неравенство $\sin x > \frac{1}{3}$. Нетрудно убедиться, что ему удовлетворяют следующие значения x:

$$2k\pi + \arcsin \frac{1}{3} < x < (2k + 1)\pi -$$

$$- \arcsin \frac{1}{3} \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

Это и есть окончательный ответ для заданного неравенства. Очень грубой ошибкой будет, если в связи с неравенством $\sin x < \frac{5}{4}$ в «ответе» появится «выражение» $\arcsin \frac{5}{4}$. Так как $\frac{5}{4} > 1$, то символ $\arcsin \frac{5}{4}$ не имеет никакого смысла.

Пример 9. Решить неравенство

$$\log_2 \sin x < -1.$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное $y = \sin x$. Неравенство тогда примет вид $\log_2 y < -1$. Так как $-1 = \log_2 \frac{1}{2}$ и при основании, большем 1, большему числу соответствует больший логарифм, мы получаем, что $y < \frac{1}{2}$. Однако нужно еще учесть (при решении подобных неравенств об этом часто забывают!), что для отрицательных значений аргумента логарифмическая

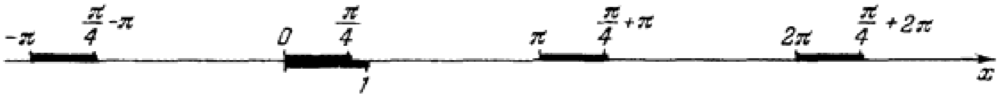

Рис. 4.

функция вообще не определена. Поэтому в окончательной форме решение неравенства $\log_2 y < -1$ запишется так:

$0 < y < \frac{1}{2}$. Мы приходим, таким образом, к системе неравенств

$$\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Рассуждая аналогично тому, как мы это делали в примере 5, получаем следующий ответ, содержащий две серии:

$$\begin{cases} 2k\pi < x_1 < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ \frac{5\pi}{6} + 2m\pi < x_2 < \pi + 2m\pi \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

В отличие от примеров 4 и 5, здесь уже нельзя дать простой формулы, объединяющей эти две серии в одну.

Пример 10. Решить неравенство

$$\log_x \operatorname{tg} x > 0.$$

Решение. Этот пример сложнее предыдущих, так как неизвестное x выступает здесь одновременно в двух различных ролях и в качестве основания логарифмов, и в качестве аргумента тригонометрической функции. Благодаря этому здесь особенно рельефно проявляется тот факт, что x мы должны понимать как число.

Заметим прежде всего, что поскольку x является основанием логарифмов, обязательно $x > 0$ и $x \neq 1$. Так как свойства логарифмов существенно зависят от того, больше или меньше 1 их основание, рассмотрим эти случаи отдельно.

Пусть сначала $0 < x < 1$. Так как при основании, меньшем 1, положительный логарифм имеют числа, заключенные между 0 и 1, мы приходим к системе неравенств $0 < \operatorname{tg} x < 1$. Решая ее, получаем

$$k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Но мы еще связаны условием $0 < x < 1$. Из рисунка 4 видно, что неравенствам $0 < x < 1, 0 < \operatorname{tg} x < 1$ одновременно удовлетворяют лишь следующие значения x: $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Пусть теперь $x > 1$. Учитывая, что при основании, большем 1, положительный логарифм имеют числа, большие 1, мы получаем, что $\operatorname{tg} x > 1$, откуда

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Учтем теперь условие $x > 1$. Из рисунка 5 мы видим, что обоим неравенствам $x > 1$ и $\operatorname{tg} x > 1$ одновременно

Рис. 5.

удовлетворяют следующие значения x: во-первых, $1 < x < \frac{\pi}{2}$, во-вторых

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

где k — целое положительное число, то есть $k = 1, 2, 3, \ldots$

Собирая все значения x, найденные при рассмотрении обоих случаев, получаем следующий окончательный ответ:

$$0 < x_1 < \frac{\pi}{4},$$

$$1 < x_2 < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x_3 < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

В заключение приводим ряд примеров для самостоятельного решения.

Решите неравенства:

1. $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$.
2. $\sin 2x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. $\sin \frac{x}{5} \geqslant -\frac{1}{2}$.
4. $\operatorname{tg}(3x - 1) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.
5. $|\operatorname{tg} x| \geqslant \sqrt{3}$.
6. $|\cos x| < \frac{1}{2}$.
7. $\sin^2 x < \frac{1}{4}$.
8. $\operatorname{tg}^2 x \geqslant \frac{1}{3}$.
9. $2\sin^2 x \leqslant \sin x$.
10. $2\cos^2 x + \cos x < 1$.
11. $\log_3(\operatorname{tg} x) \geqslant \frac{1}{2}$.
12. $\log_{\frac{1}{2}}(\cos x) \leqslant 1$.

БУРЯ ПРОТИВ БУРЬ

Немногим более ста лет тому назад произошла буря, благодаря которой была создана вся метеорологическая служба мира.

14 ноября 1854 года сильнейшая буря нанесла непоправимый ущерб судам французов и их союзников, участвовавших в осаде Севастополя. Известие об этом вызвало во Франции большое уныние.

Узнав о буре в Балаклавской бухте, директор Парижской астрономической обсерватории Леверье попросил ученых, занятых в то время метеорологическими наблюдениями, дать ему материалы за два предыдущих дня. Как и предполагал Леверье, балаклавскую бурю можно было бы предсказать, располагая данными наблюдений на большой территории. Точные расчеты и безупречная логика ученого убедили правительство Франции ассигновать средства на создание государственной службы погоды.

С 1857 года к этой системе стали примыкать другие государства. В России синоптические карты появились в 1872 году.

Любопытно, что отдельные метеорологические наблюдения и их записи (конечно, примитивные) относятся к значительно более раннему периоду. До нас дошли «Дневальные записи» Приказа Тайных Дел с 1657 по 1673 год, но с большими перерывами. Вот образцы этих записей:

«1657 г., 30 генваря, пяток. День до обеда холоден и ведрен, а после обеда оттепелен, а в ночи было ветрено.

4 февраля, среда. День был тепел и ведрен, и за полчаса до ночи пошел снег и шел до пятого часа ночи, а в ночи было тепло же.

Майя 31, неделя. Гром гремел, и молния блистала, и шел дождь велик, и после того и до вечера было ведрено и ветрено, а в ночи было тепло».