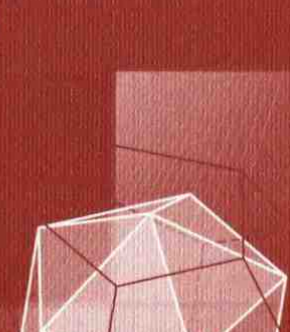
А. Ю. Калинин, Д. А. Терешин

Сборник задач по геометрии

10–11 классы

Из вступительных задач МФТИ 1947–2010



МЦНМО

А. Ю. Калинин, Д. А. Терёшин

Сборник задач по геометрии 10—11 классы

Учебное пособие
для общеобразовательных учреждений
Профильный уровень

Москва
Издательство МЦНМО
2011

УДК 514.1
ББК 22.151
К17

Калинин А. Ю., Терёшин Д. А.

К17 Сборник задач по геометрии. 10—11 классы. — М.: МЦНМО, 2011. — 160 с., ил.

ISBN 978-5-94057-582-5

Задачник рекомендуется использовать как дополнение к учебнику А. Ю. Калинина, Д. А. Терёшина «Геометрия. 10—11 классы». В нём собраны задачи из вступительных экзаменов по математике на физико-технический факультет МГУ (1947—1951) и в МФТИ (1952—2010). Книга предназначена для школьников старших классов, обучающихся по программе профильного уровня по математике, абитуриентов технических вузов и преподавателей.

ББК 22.151

Александр Юрьевич Калинин
Дмитрий Александрович Терёшин

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ
10—11 КЛАССЫ

Корректор *О. А. Васильева*
Тех. редактор *Д. Е. Щербаков*

Подписано в печать 6/XII 2010 г. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Объём 10 печ. л.
Гарнитура Школьная. Тираж 1500 экз. Заказ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

© А. Ю. Калинин,
Д. А. Терёшин,
составление сборника 2011.
ISBN 978-5-94057-582-5
© МЦНМО, 2011.

Предисловие

— Интересно, что вы намерены предпринять с золотом Снорка? — спросил Снусмумрик.

— Обложим цветочные клумбы, пусть служит украшением, — сказала Муми-мама. — Разумеется, только куски покрупнее, мелочь-то совсем не имеет вида.

Т. Янссон. Шляпа волшебника

Этот задачник предназначен для школьников старших классов, обучающихся по программе профильного уровня по математике, абитуриентов технических вузов и преподавателей. Мы рекомендуем использовать его в качестве одного из дополнений к нашему учебнику «Геометрия. 10—11 классы».

Все задачи, включенные нами в этот сборник, взяты из материалов вступительных экзаменов по математике на физико-технический факультет МГУ (1947—1951) и в МФТИ (1952—2010). Задачи разделены на группы по годам; после номера каждой задачи указан номер соответствующего экзаменационного билета, а также порядковый номер задачи в этом билете (например, запись **423** (б. 4, 5) означает, что задача 423 была пятой в четвёртом билете). Эта информация поможет вам ориентироваться в степени сложности каждой задачи, так как по традиции из года в год составители стараются располагать задачи внутри каждого билета в порядке возрастания их трудности. При этом следует иметь в виду, что количество задач в одном варианте письменной работы в разные годы было различным: в 1947 г. их было три в каждом билете, в 1948 г. — три в билетах 1—20 и шесть в билетах 21—24, в 1949 г. — три в билетах 1—16 и пять в билетах 17—20, с 1950 по 1968 г. каждый билет содержал четыре задачи, в 1969—1976 и в 1980—1997 гг. — пять задач, а в 1977—1979 и в 1999—2008 гг. — шесть задач. Заметим также, что и количество экзаменационных билетов зачастую изменялось от года к году (их было чаще всего двенадцать, иногда восемь, шестнадцать, двадцать и даже двадцать четыре), и, кроме того, не всякий билет содержал задачу по стереометрии (впрочем, иногда их было две в одном билете).

В течение нескольких лет МФТИ совместно с газетой «Поиск» проводил конкурс «Абитуриент», письменные работы второго (очного) тура которого фактически представляли собой вступительные экзамены. Поэтому мы включили в задачник также и задания по стереометрии из этих письменных работ (задачи 500, 513 и 526).

Нам хотелось бы особо подчеркнуть, что приведённая ниже коллекция задач имеет определённую историческую ценность. Например, по ней можно проследить, как изменялась тематика и трудность задач по стереометрии на письменных экзаменах в МФТИ, а также сделать многие другие выводы сравнительного характера, в том числе касающиеся требований к подготовке абитуриентов в различные годы и даже о тенденциях развития школьного геометрического образования в нашей стране. Впрочем, всю эту работу мы оставляем пытливому читателю в качестве полезного упражнения.

Мы глубоко благодарны нашим коллегам по кафедре высшей математики МФТИ М. В. Балашову, Р. В. Константинову, С. П. Коновалову, Л. П. Купцову, А. Д. Кутасову, В. В. Мартынову и Ю. В. Сидорову, предоставившим в наше распоряжение материалы вступительных экзаменов 1947—1970 гг. и 2001—2008 гг., а также считаем своим приятным долгом вспомнить добрым словом всех составителей физтеховских конкурсных задач, в особенности задач по стереометрии. Среди них нам бы в первую очередь хотелось назвать Н. Х. Агаханова, П. Б. Гусятникова, С. С. Самарову, Ю. В. Сидорова, Б. В. Федосова, В. И. Чехлова и М. И. Шабунина.

А. Ю. Калинин, Д. А. Терёшин

Условия задач

1947 год

1 (б. 1, 2). В конус вписан шар. Поверхность шара относится к площади основания конуса как $4 : 3$. Найти угол при вершине конуса.

2 (б. 2, 2). Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Чему равен угол между осью конуса и его образующей, если полная поверхность цилиндра относится к полной поверхности конуса как $7 : 4$?

3 (б. 3, 2). В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найти угол между осью конуса и его образующей, если полная поверхность цилиндра относится к площади основания конуса как $3 : 2$.

4 (б. 4, 1). Доказать, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из некоторой точки A на плоскости, проходящие через другую точку B, есть сфера с диаметром AB.

5 (б. 5, 2). Доказать, что объём конуса во столько раз больше объёма вписанного в него шара, во сколько раз полная поверхность конуса больше поверхности шара.

6 (б. 6, 2?[1]). Определить угол между боковым ребром и плоскостью основания правильной четырёхугольной пи-

---

[1]Эта задача в качестве задачи из билета 6 приведена в «Сборнике методических материалов письменных испытаний по математике и физике абитуриентов Московского физтеха» (М.: изд-во МФТИ, 2007). При этом она отсутствует как в «Сборнике задач, предлагаемых на приёмных испытаниях в МФТИ в 1947–1953 гг.» (М.: изд-во МФТИ, 1954), так и в книге В. Б. Лидского и др. «Задачи по элементарной математике», составленной по материалам вступительных экзаменов в МФТИ.

При этом задача $6'$ присутствует в последних сборниках без указания года (но среди задач, про которые заведомо известно, что они предлагались в 1947 г.), а в первом сборнике она отнесена к билету 1 1948 г., что нам представляется маловероятным, хотя бы потому, что первые десять билетов этого года предлагались на экзамене по арифметике и алгебре. Таким образом, установить, какая именно из задач — 6 или $6'$ — предлагалась в 1947 г., нам не удалось.

рамиды, если площадь основания относится к поверхности вписанного в неё шара как $4:\pi$.

6′ (б. 6, 2?). В конус вписана полусфера, большой круг которой лежит на основании конуса. Определить угол при вершине конуса, если полная поверхность конуса относится к боковой поверхности полусферы как $18:5$.

1948 год

7 (б. 11, 3). В конус вписан шар радиуса r. Найти объём конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстояние d.

8 (б. 12, 3). Шара касаются коническая поверхность и плоскость, перпендикулярная к оси конической поверхности. Отношение полной поверхности получающегося при этом конуса к поверхности шара равно m. Найти отношение объёмов этих тел, если $m<\frac{1}{2}$.

9 (б. 13, 3). Из середины высоты правильной четырёхугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный h, и перпендикуляр на боковую грань, равный b. Найти объём пирамиды.

10 (б. 14, 3). Вычислить объём правильной пирамиды высоты h, зная, что в основании её лежит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна nd, а отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k.

11 (б. 15, 3). Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в k раз больше площади основания. Найти объём пирамиды, если площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга.

12 (б. 16, 3). Через одно из рёбер основания правильной треугольной пирамиды со стороной основания q проведена плоскость, перпендикулярная противолежащему боковому ребру. Определить полную поверхность пирамиды, если указанная плоскость делит боковое ребро в отношении $m : n$.

13 (б. 17, 3). В правильную n-угольную пирамиду с ребром основания a и боковым ребром b вписан шар. Найти его радиус.

14 (б. 18, 3). Через вершину правильной n-угольной пирамиды и через две вершины многоугольника, лежащего в основании, под углом α к основанию проведена плоскость, рассекающая основание на два многоугольника, имеющих соответственно $r + 2$ вершин и $n - r$ вершин $\left(r < \dfrac{n-2}{2}\right)$. Найти объём пирамиды, если общая сторона этих двух многоугольников равна b.

15 (б. 19, 3). Дана правильная пятиугольная пирамида $SABCDE$, которая пересечена плоскостью, проходящей через вершины A и C основания и середины рёбер DS и ES. Найти площадь сечения, если ребро основания пирамиды равно q, а боковое ребро равно b.

16 (б. 20, 3). Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых рёбер. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна одной из боковых граней. Указать, какой именно.

17 (б. 21, 5). Найти геометрическое место проекций данной точки A пространства на плоскости, проходящие через другую данную точку B.

18 (б. 22, 5). Найти геометрическое место центров сечений шара B плоскостями, проходящими через данную прямую l. Разобрать случаи, когда прямая пересекает шар, касается его или не имеет с ним общих точек.

19 (б. 23, 5). Найти геометрическое место центров сечений шара плоскостями, проходящими через данную точку C. Разобрать случаи, когда данная точка находится вне, на поверхности или внутри шара.

20 (б. 24, 5). Найти геометрическое место точек, из которых можно провести к данному шару радиуса R три касательные, образующие трёхгранный угол с тремя прямыми плоскими углами.

1949 год

21 (б. 9, 1). В конус, образующая которого L наклонена к плоскости основания под углом α, вписана правильная n-угольная призма, все рёбра которой равны между собой. Найти полную поверхность призмы.

22 (б. 10, 1). Вычислить объём правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r.

23 (б. 11, 1). Доказать, что две плоскости, проходящие через концы обеих троек рёбер параллелепипеда, сходящихся в концах диагонали параллелепипеда, рассекают эту диагональ на три равные части.

24 (б. 12, 1). Около шара радиуса r описана правильная n-угольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен α. Найти отношение объёма шара к объёму пирамиды.

25 (б. 13, 1). Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом ψ. Найти объём пирамиды.

26 (б. 14, 1). От правильной четырёхугольной призмы плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания и одну из вершин верхнего основания, отсечена пирамида с полной поверхностью S. Найти полную поверхность призмы, если угол при вершине треугольника, получающегося в сечении, равен α.

27 (б. 15, 1). Отношение высоты конуса к радиусу описанного вокруг него шара равно q. Найти отношение объёмов этих тел. При каких q задача возможна?

28 (б. 16, 1). Правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания, равной a, и двугранным углом при основании, равным 2α, пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найти площадь сечения.

29 (б. 17, 2). В сферу радиуса R вписан правильный тетраэдр, и все его грани продолжены до пересечения со сферой. Линии пересечения граней тетраэдра со сферой вырезают из её поверхности четыре сферических треугольника и несколько сферических двуугольников. Вычислить площадь каждого из этих двуугольников и треугольников.

30 (б. 18, 3). Куб пересекается плоскостью, проходящей через одну из его диагоналей. Как должна быть проведена эта плоскость, чтобы площадь сечения получилась наименьшей?

31 (б. 19, 1). Зал, имеющий в плане форму квадрата со стороной a, покрыт крышей, построенной следующим образом: каждая пара смежных вершин квадрата, образующего потолок зала, соединена прямыми с серединой противолежащей стороны, и на получившемся треугольнике, как на основании, построена пирамида, высота которой h лежит на одной из её боковых граней и проектируется в середину стороны квадрата. Расположенные выше других части граней этих четырёх пирамид образуют крышу. Найти объём чердака (т. е. пространства между крышей и потолком).

32 (б. 20, 2). Определить радиусы двух шаров, которые, пересекаясь, образуют двояковыпуклую линзу, если известны толщина линзы $2a$, её полная поверхность S и диаметр линзы $2R$.

1950 год

33 (б. 9, 3). Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, в которой параллельные стороны равны a и b ($a > 2b$), а неравные отрезки диагоналей образуют угол φ. Найти объём пирамиды, зная, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, а двугранные углы, прилежащие к параллельным сторонам основания, относятся как $2:1$.

34 (б. 10, 3). В правильный тетраэдр вписан шар. В шар вписан новый правильный тетраэдр. Найти отношение объёмов этих двух тетраэдров.

35 (б. 11, 3). В конус вписан шар, отношение их объёмов равно k. Найти отношение объёмов шаровых сегментов, отсекаемых от шара плоскостью, проходящей через линию касания шара с конусом.

36 (б. 12, 3). В правильной шестиугольной пирамиде с углом между боковыми рёбрами, равным α, проведено сечение через наибольшую диагональ основания под углом β к нему. Найти отношение площадей сечения и основания.

37 (б. 13, 3). Стороны основания параллелепипеда a и b образуют между собой угол α, а боковое ребро его, равное c, наклонено к плоскости основания под углом β. Найти объём параллелепипеда.

38 (б. 14, 3). В шар вписан правильный тетраэдр, затем в тетраэдр снова вписан шар. Найти отношение поверхностей этих двух шаров.

39 (б. 15, 3). Показать, что если плоскость, проходящая через концы трёх рёбер параллелепипеда, исходящих из одной вершины, отсекает от параллелепипеда правильный тетраэдр, то параллелепипед можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.

40 (б. 16, 3). Один из плоских углов трёхгранного угла равен α, двугранные углы, прилежащие к этому плоскому углу, равны соответственно β и γ. Найти два других плоских угла.

1951 год

41 (б. 9, 3). Внутрь сферы S радиуса R вписаны восемь сфер меньшего радиуса, каждая из которых касается двух соседних, а все вместе касаются сферы S по окружности большого круга. Затем внутрь получившейся фигуры вписаны ещё две сферы, каждая из которых касается всех восьми сфер меньшего радиуса и сферы S. Найти радиус этих последних сфер.

42 (б. 10, 3). В шар радиуса R вписан конус, боковая поверхность которого в k раз больше площади основания. Найти объём конуса.

43 (б. 10, 4). Доказать, что если точка перемещается в плоскости основания правильной пирамиды и остаётся внутри этого основания, то сумма расстояний до этой точки от боковых граней постоянна.

44 (б. 11, 3). Через вершину конуса проведена плоскость под углом α к основанию конуса. Эта плоскость пересекает основание по хорде a, стягивающей дугу β основания конуса. Найти объём конуса.

45 (б. 11, 4). Через каждые три вершины куба с ребром a, лежащие в концах каждой тройки рёбер, сходящихся в одной вершине, проведена плоскость. Найти объём тела, ограниченного этими плоскостями.

46 (б. 12, 3). Объём правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоналями двух граней, проведёнными из одной и той же вершины, равен α. Найти ребро основания призмы.

47 (б. 12, 4). Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Найти отношение объёма образованного таким образом параллелепипеда к объёму тетраэдра.

48 (б. 13, 3). Внутрь сферы S радиуса R вписано восемь сфер равных радиусов, каждая из которых касается трёх соседних сфер и сферы S. Найти радиусы вписанных сфер, зная, что их центры лежат в вершинах куба.

49 (б. 14, 3). Вычислить радиусы оснований усечённого конуса, описанного около шара радиуса R так, что отношение полной поверхности усечённого конуса к поверхности шара равно m.

50 (б. 15, 3). Найти отношение объёма шара к объёму описанного около него конуса, если полная поверхность конуса в n раз больше поверхности шара.

51 (б. 15, 4). Доказать, что всякая плоскость, проходящая через середины двух противоположных рёбер правильного тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равновеликие части.

52 (б. 16, 3). Дан усечённый конус, у которого высота есть среднее пропорциональное между диаметрами оснований. Доказать, что в него можно вписать шар.

1952 год

53 (б. 9, 2). Две правильные n-угольные пирамиды с равными основаниями сложены этими основаниями. Найти радиус шара, вписанного внутрь получившейся фигуры, если сторона основания равна a, а высоты пирамид равны h и H.

54 (б. 10, 2). Определить отношение объёма правильной n-угольной пирамиды к объёму вписанного в неё шара, если известно, что окружности, описанные около основания и боковых граней пирамиды, равны между собой.

55 (б. 11, 2). Две правильные n-угольные пирамиды с равными основаниями, но разными высотами сложены этими основаниями, и вокруг получившейся фигуры описан шар радиуса R. Найти высоты пирамид, если сторона основания равна a. При каком соотношении между a и R задача возможна?

56 (б. 12, 2). В правильную n-угольную призму вписан шар. Вокруг призмы также описан шар. Найти отношение объёмов этих двух шаров.

57 (б. 13, 2). Найти полную поверхность правильной n-угольной пирамиды объёма V, если радиус круга, вписанного в основание, равен радиусу круга, описанного вокруг сечения, параллельного основанию, на высоте h.

58 (б. 14, 2). Через одну из точек диагонали куба с ребром a перпендикулярно к этой диагонали проведена плоскость.

1) Выяснить, какие фигуры будут получаться в сечении этой плоскости с кубом.

2) Найти длины отрезков, получающихся в сечении плоскости с гранями куба, в зависимости от расстояния x секущей плоскости от центра куба.

59 (б. 15, 2). На боковых гранях правильной четырёхугольной пирамиды построены, как на основаниях, правильные тетраэдры. Найти расстояние между наружными вершинами двух смежных тетраэдров, если сторона основания пирамиды равна a.

60 (б. 16, 2). Найти объём правильной n-угольной пирамиды, если её полная поверхность равна S, а радиусы кругов, описанных вокруг всех граней, равны.

1953 год

61 (б. 7, 1). Найти площадь проекции куба с ребром a на плоскость, перпендикулярную к одной из диагоналей куба. Во сколько раз эта площадь будет больше площади сечения куба плоскостью, проходящей через середину диагонали куба перпендикулярно к ней?

62 (б. 8, 1). В шар вписаны два одинаковых конуса, оси которых совпадают, а вершины находятся в противоположных концах диаметра шара. Найти отношение объёма общей части этих двух конусов к объёму шара, если известно отношение высоты конуса h к радиусу шара R, равное k.

63 (б. 9, 1). Взяты две противоположные вершины куба, и через середины рёбер, не проходящих через эти вершины, проведена секущая плоскость, которая разделяет куб на две части. В каждую из этих частей помещён шар, касающийся трёх граней куба и секущей плоскости. Во сколько раз объём каждого из этих шаров будет меньше объёма куба?

64 (б. 10, 1). В правильном тетраэдре с ребром основания a проведены три плоскости, каждая из которых проходит через одну из вершин основания тетраэдра и середины боковых рёбер. Найти объём части тетраэдра, расположенной над всеми секущими плоскостями.

65 (б. 11, 1). Доказать, что для всех многогранников, описанных около шара, отношение объёма многогранника к его поверхности имеет одну и ту же величину. Будет ли это предложение справедливо также для цилиндров, конусов и усечённых конусов, описанных около шара?

66 (б. 12, 1). Дан усечённый конус, боковая поверхность которого равна площади круга, имеющего своим радиусом образующую усечённого конуса. Доказать, что в него можно вписать шар.

67 (?[1]). В конус, у которого угол осевого сечения при вершине равен α, вписан шар радиуса R. Найти объём части конуса, расположенной над шаром.

1954 год

68 (б. 9, 3). Доказать, что любой плоский угол произвольного четырёхгранного угла меньше суммы трёх других плоских углов.

69 (б. 10, 3). Найти отношение объёма конуса к объёму вписанного в него шара, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих

---

[1]Эта задача отсутствует в первом сборнике (см. предыдущее примечание), но присутствует во втором и третьем в окружении задач 1953 г. Скорее всего, её всё же не было на экзаменах, но достоверно это нам не известно.

конуса, отсекает на этой образующей, считая от вершины, отрезок, в k раз больший радиуса шара.

70 (б. 11, 3). На одной и той же образующей конуса взяты две точки A и B на расстоянии a друг от друга. На поверхности конуса взяты ещё две точки C и D такие, что $ABCD$ — правильный тетраэдр. Найти расстояние от вершины конуса до ребра CD этого тетраэдра, если известно, что угол при вершине осевого сечения конуса определяется условиями

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{и} \quad \alpha < 90^\circ.$$

71 (б. 12, 3). Найти высоту правильной четырёхугольной пирамиды, если известно, что объём описанного вокруг пирамиды шара равен v, а перпендикуляр, опущенный из центра шара на её боковую грань, образует с высотой пирамиды угол α.

72 (б. 13, 3). Все четыре стороны равнобочной трапеции касаются цилиндра, ось которого перпендикулярна к параллельным сторонам трапеции. Найти угол, образуемый плоскостью трапеции с осью цилиндра, если длины оснований трапеции равны a и b, а высота трапеции равна h.

73 (б. 14, 3). Площади параллельных сечений шара, расположенных по одну сторону от его центра, равны s_1 и s_2, а расстояние между этими сечениями равно d. Найти площадь сечения шара, параллельного сечениям s_1 и s_2 и делящего пополам расстояние между ними.

74 (б. 15, 3). В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d. Найти объём этой пирамиды.

75 (б. 16, 3). Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр длины h, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, составляет с одним из катетов угол α. Найти объём призмы.

1955 год

76 (б. 1, 3). Доказать, что если все двугранные углы некоторой пирамиды равны, то и все рёбра этой пирамиды также равны.

77 (б. 3, 3). На двух параллельных плоскостях расположены отрезки AB и CD. Концы этих отрезков являются вершинами некоторой треугольной пирамиды. Доказать, что объём этой пирамиды сохраняется, если отрезки перемещать в этих плоскостях параллельно самим себе.

78 (б. 4, 3). Доказать, что прямая, пересекающая две грани двугранного угла, образует с ними равные углы тогда и только тогда, когда точки пересечения одинаково удалены от ребра.

79 (б. 8, 3). В пространстве рассматриваются два отрезка AB и CD, не лежащие в одной плоскости. Пусть MN — отрезок, соединяющий их середины. Доказать, что

$$\frac{AC+BD}{2} > MN.$$

1956 год

80 (б. 1, 3). Одна из двух треугольных пирамид с общим основанием расположена внутри другой. Доказать, что сумма плоских углов при вершине внутренней пирамиды больше, чем сумма плоских углов при вершине внешней.

81 (б. 2, 3). Через середины двух параллельных рёбер куба, не лежащих на одной грани, проведена прямая. Куб повёрнут вокруг неё на $90°$. Определить объём общей части исходного куба и повёрнутого.

82 (б. 3, 3). В правильной четырёхугольной призме проведены два параллельных сечения: одно проходит через середины двух смежных сторон основания и середину оси, другое делит ось в отношении $1:3$. Зная, что площадь первого сечения равна S, найти площадь второго.

83 (б. 4, 3). Данный выпуклый четырёхгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

84 (б. 5, 3). Показать, что площадь любого треугольного сечения произвольной треугольной пирамиды не превосходит площади хотя бы одной из её граней.

85 (б. 7, 3). В треугольной пирамиде проводятся сечения, параллельные двум её непересекающимся рёбрам. Найти сечение с наибольшей площадью.

86 (б. 10, 3). Трёхгранный угол $SABC$ пересекается плоскостью по треугольнику ABC. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников ABC, если

а) вершины A и B закреплены;

б) вершина A закреплена.

87 (б. 11, 3). Рассматриваются два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, которые лежат в непараллельных плоскостях и имеют попарно непараллельные стороны. При этом прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке O. Доказать, что соответствующие стороны треугольников попарно пересекаются и точки их пересечения лежат на одной прямой.

88 (б. 11, 4). В точке A плоскости P расположен источник света. Над плоскостью помещено полусферическое зеркало радиуса 1, обращённое внутренней зеркальной поверхностью к плоскости, причём так, что ось симметрии зеркала перпендикулярна плоскости P в точке A. Зная, что наименьший угол между лучами, отражёнными зеркалом и плоскостью P, равен 15°, определить расстояние от зеркала до плоскости и радиус освещённого на плоскости P круга.

89 (б. 12, 3). Показать, что отрезки, соединяющие вершины некоторой треугольной пирамиды с центрами тяжести противолежащих граней, пересекаются в одной точке.

1957 год

90 (б. 1, 1). Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a, а плоский угол при вершине равен 2α. Найти площадь поверхности шара, вписанного в эту пирамиду.

91 (б. 3, 4). Найти объём треугольной пирамиды, если площади её граней равны S_0, S_1, S_2, S_3, а двугранные углы, прилежащие к грани с площадью S_0, равны между собой.

92 (б. 5, 4). На плоскости лежат три равных шара радиуса R, попарно касающиеся друг друга. Четвёртый шар касается плоскости и каждого из первых трёх шаров. Найти радиус четвёртого шара.

93 (б. 6, 3). Доказать, что если в треугольной пирамиде сумма длин противоположных рёбер одна и та же для любой пары таких рёбер, то вершины этой пирамиды являются центрами четырёх шаров, попарно касающихся друг друга.

94 (б. 9, 4). Четыре шара, центры которых не лежат в одной плоскости, касаются попарно друг друга. Каждые два из них определяют плоскость, перпендикулярную их линии центров и касающуюся обоих шаров. Доказать, что возникающие таким образом шесть плоскостей имеют общую точку.

95 (б. 11, 2). На плоскости лежат четыре равных шара, причём три из них касаются попарно друг друга, а четвёртый касается двух из этих трёх. На эти шары сверху положены два равных шара меньшего радиуса, касающиеся друг друга, причём каждый из них касается трёх больших шаров. Найти отношение радиусов большого и малого шаров.

96 (б. 12, 4). Какому соотношению должны удовлетворять радиусы трёх шаров, попарно касающихся друг друга, для того, чтобы к ним можно было провести общую касательную плоскость?

1958 год

97 (б. 1, 1). Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из заданной точки A пространства на прямые, лежащие в заданной плоскости и пересекающиеся в одной точке B.

98 (б. 4, 4). В коническую поверхность с прямым углом при вершине вписан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a так, что ребро AB лежит на её образующей, а вершины C и D лежат на этой поверхности. Определить расстояние от вершины конической поверхности до середины ребра CD.

99 (б. 5, 2). В треугольной пирамиде $SABC$ рёбра SA, SB и SC попарно перпендикулярны, $AB = BC = a$, $BS = b$. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

100 (б. 10, 1). Из точки сферы радиуса R проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Определить длину этих хорд.

101 (б. 11, 4). Из точки, лежащей в основании ABC треугольной пирамиды $SABC$, проведены прямые Oa, Ob, Oc, параллельные рёбрам SA, SB, SC, до пересечения их, соответственно, с гранями SBC, SCA, SAB в точках a, b, c. Доказать, что

$$\frac{Oa}{SA} + \frac{Ob}{SB} + \frac{Oc}{SC} = 1.$$

102 (б. 14, 3). Четыре шара одинакового радиуса попарно касаются друг друга. Каждого из них касается внешним образом пятый и внутренним образом шестой шар. Найти отношение объёма шестого шара к объёму пятого.

103 (б. 15, 1). В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Определить угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания, если отношение объёма пирамиды к объёму шара равно $\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$.

104 (б. 17, 4). Пусть R — радиус шара, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, r — радиус шара, вписанного эту пирамиду. Доказать, что

$$\frac{R}{r} \geqslant \sqrt{2}+1.$$

105 (б. 19, 1). Найти двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной четырёхугольной пирамиды, если радиус описанного около пирамиды шара в 3 раза больше радиуса вписанного в неё шара.

106 (б. 21, 3). Дана плоскость P и две точки A и B вне её. Через A и B проводятся всевозможные сферы, касающиеся плоскости. Найти геометрическое место точек касания.

107 (б. 23, 2). Доказать, что при соединении трёх вершин правильного тетраэдра с серединой высоты, опущенной из четвёртой вершины, получаются три попарно перпендикулярные прямые.

108 (б. 24, 3). На плоскости P лежат три равных шара радиуса R, касающиеся друг друга. Найти радиус основания конуса, расположенного так, что его плоскость основания совпадает с P, а данные шары касаются конуса и лежат вне его. Отношение высоты конуса к R равно q.

1959 год

109 (б. 1, 3). В треугольной пирамиде боковые рёбра, равные a, b, c, взаимно перпендикулярны. Высота, опущенная из вершины на основание пирамиды, равна h. Доказать, что $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

110 (б. 4, 2). В треугольной пирамиде $SABC$ ребро BC равно a, $AB=AC$, ребро SA перпендикулярно основанию ABC, двугранный угол при ребре SA равен α, а при ребре BC равен β. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

111 (б. 7, 4). Доказать, что если в треугольной пирамиде все грани равновелики, то они равны.

112 (б. 8, 3). Найти наибольшую величину боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, вписанной в шар радиуса R.

113 (б. 10, 1). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол между боковыми гранями равен α. Вычислить объём и боковую поверхность пирамиды.

114 (б. 12, 4). В треугольной пирамиде $SABC$ ребро AB равно l, боковые грани образуют с плоскостью основания ABC двугранные углы α, β, γ, в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

115 (б. 15, 3). Дан конус с радиусом основания R и высотой H. Определить радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в конус, если боковая поверхность цилиндра имеет наибольшее значение.

116 (б. 18, 3). Ортогональной проекцией правильного треугольника на некоторую плоскость является прямоугольный треугольник с катетами a и b. Найти сторону этого правильного треугольника[1].

117 (б. 19, 1). В правильной треугольной пирамиде со стороной основания a и высотой h под углом α к основанию проведено сечение плоскостью, проходящей через одну из вершин основания и отсекающей на двух противоположных боковых рёбрах одинаковые отрезки. Найти площадь сечения.

---

[1] На экзамене эта задача предлагалась в следующей формулировке: «В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b. Эта призма рассечена плоскостью так, что в сечении получился равносторонний треугольник. Определить сторону этого треугольника». Легко понять, что в такой постановке задача не вполне корректна (имеет бесконечное множество решений), если только под призмой не понимать призматическую поверхность. Поэтому мы изменили формулировку так, чтобы сохранился ответ, данный составителями задачи.

118 (б. 20, 2). Радиус шара, вписанного в усечённый конус, равен R, а радиус шара, описанного около этого конуса, равен $R\sqrt{30}$. Найти угол между образующей конуса и его основанием.

1960 год

119 (б. 1, 4). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC; ребро SB перпендикулярно плоскости основания. Дано: $AB=BC=a$, $SB=h$. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

120 (б. 3, 4). Даны две концентрические сферы радиусов r и R, причём $r<R$. Определить ребро правильного тетраэдра, три вершины основания которого лежат на сфере большего радиуса, а боковые грани которого касаются сферы меньшего радиуса.

121 (б. 5, 4). Из середины высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный h, и перпендикуляр на боковую грань, равный b. Найти объём пирамиды.

122 (б. 6, 4). Дана треугольная пирамида $SABC$; грань SBC перпендикулярна плоскости основания ABC; $SB=$ $=SC=1$; плоские углы при вершине S равны 60°. Найти объём пирамиды.

123 (б. 7, 3). В правильной четырёхугольной пирамиде двугранный угол между основанием и боковой гранью равен 60°. Найти отношение объёма пирамиды к объёму вписанного в неё шара.

124 (б. 8, 4). В правильной треугольной пирамиде двугранный угол между основанием и боковой гранью равен 60°. Найти отношение радиуса описанного около пирамиды шара к радиусу вписанного в неё шара.

125 (б. 9, 1). В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна b, а двугранный угол между основанием и боковой гранью равен α. Определить радиус описанного около пирамиды шара.

126 (б. 10, 1). В треугольной пирамиде все боковые рёбра и две стороны основания равны b. Угол между равными сторонами основания равен α. Вычислить объём пирамиды.

127 (б. 11, 2). Доказать, что если в треугольной пирамиде все грани имеют равные периметры, то все грани равны.

128 (б. 12, 1). В конус вписаны два шара: первый шар касается боковой поверхности конуса и его основания, второй — боковой поверхности конуса и первого шара. Отношение объёмов шаров равно 27. Найти угол при вершине конуса.

1961 год

129 (б. 1, 3). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, угол между боковыми гранями равен φ. Определить боковую поверхность.

130 (б. 2, 4). В правильной шестиугольной пирамиде через центр основания проведено сечение параллельно боковой грани. Найти отношение площади сечения к площади боковой грани.

131 (б. 3, 4). Стороны оснований правильной шестиугольной усечённой пирамиды равны a и $3a$. Через два параллельных ребра пирамиды, лежащих на разных основаниях и разных боковых гранях, проведено сечение. Угол между сечением и основанием равен α. Найти площадь сечения.

132 (б. 5, 2). Полная поверхность правильной треугольной пирамиды равна S, плоский угол при вершине равен 2α. Найти высоту пирамиды.

133 (б. 6, 2). В сферу радиуса R вписаны два конуса с общим основанием. Объём одного из них в четыре раза превосходит объём другого. Найти боковую поверхность каждого из конусов.

134 (б. 6, 4). Треугольная пирамида рассечена плоскостью на два многогранника. Найти отношение их объёмов, если известно, что секущая плоскость делит три боковых ребра, сходящиеся в одной вершине пирамиды, в отношениях $1:2$, $1:2$ и $2:1$, считая от вершины.

135 (б. 7, 1). Найти объём тела, полученного вращением равнобедренного треугольника около оси, лежащей в его плоскости и проходящей через вершину угла при основании параллельно боковой стороне. Известно, что боковая сторона равна a, а угол при основании равен α.

136 (б. 8, 1). Конус вписан в шар. Найти отношение объёма конуса к объёму шара, если образующая конуса наклонена к основанию под углом α.

137 (б. 9, 2). На плоскости расположена правильная четырёхугольная пирамида с высотой 12 и стороной основания 8. На высоте 14 над плоскостью расположен источник света, причём проекция O' источника на плоскость, центр O основания пирамиды и вершина основания лежат на одной прямой. Найти площадь тени, отбрасываемой пирамидой на плоскость, если $OO' = 10$.

138 (б. 10, 3). Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а большее боковое ребро составляет с основанием угол β. В пирамиду вписан шар. Найти его радиус.

139 (б. 11, 4). На плоскости P дан угол в 60°. Точка M удалена от вершины угла на a, а от сторон угла — на b и c. Найти расстояние от точки M до плоскости P.

140 (б. 12, 3). Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, высота пирамиды — h. Через сторону основания пирамиды и середину скрещивающегося с ней бокового ребра проведено сечение. Определить расстояние от вершины пирамиды до плоскости этого сечения.

141 (б. 13, 3). Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а двугранный угол между боковой гранью и основанием равен α. Найти расстояние между центрами вписанного и описанного шаров.

142 (б. 14, 4). Найти двугранный угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием, равен α.

143 (б. 15, 4). Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб с диагоналями $AC = a$, $BD = b$. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равно q. Через точку A и середину K ребра SC проведена плоскость, параллельная диагонали основания BD. Определить площадь сечения.

144 (б. 16, 4). Все плоские углы трёхгранного угла равны α. Точка M находится внутри угла на одном и том же расстоянии от всех его граней. Найти это расстояние, если расстояние от точки M до вершины угла равно d.

1962 год

145 (б. 1, 4). Около шара описан усечённый конус. Отношение объёма усечённого конуса к объёму шара равно $\frac{13}{6}$. Определить угол между образующей конуса и его основанием.

146 (б. 2, 4). Расстояние от центра основания правильной четырёхугольной пирамиды до бокового ребра равно h, а до боковой грани равно b. Найти объём пирамиды.

147 (б. 3, 4). Отношение радиуса основания конуса к радиусу вписанного в конус шара равно b. Найти отношение объёма конуса к объёму шара.

148 (б. 4, 3). Все плоские углы при вершине S треугольной пирамиды $SABC$ прямые; $AS = a$, $BS = b$, $CS = c$. Найти радиус описанного около этой пирамиды шара.

149 (б. 5, 4). В треугольной пирамиде боковые рёбра равны, а в основании лежит прямоугольный треугольник, высота которого, опущенная из вершины прямого угла, равна h. Двугранные углы, образуемые гранями пирамиды, пересекающимися по катетам основания, равны α и β. Найти объём пирамиды.

150 (б. 6, 4). В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник, острый угол которого равен α. Каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол β. Найти отношение объёма пирамиды к объёму описанного около пирамиды шара.

151 (б. 7, 4). В правильной треугольной пирамиде высота, опущенная на основание, равна h, а расстояние от центра основания до бокового ребра равно b. Определить радиус вписанного в пирамиду шара.

152 (б. 8, 3). В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна b. Каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол β. Определить радиус сферы, описанной около пирамиды.

153 (б. 9, 4). В правильной треугольной усечённой пирамиде, боковые рёбра которой обозначены через AA_1, BB_1 и CC_1, сторона большего основания ABC равна b. Расстояние от точки A до плоскости треугольника A_1BC_1 равно m, расстояние от точки B_1 до той же плоскости равно n. Найти высоту усечённой пирамиды.

154 (б. 10, 3). В правильной треугольной пирамиде высота, опущенная на основание, равна h, а расстояние от центра основания до боковой грани равно b. Определить радиус вписанного в пирамиду шара.

155 (б. 11, 4). Около шара описана правильная треугольная усечённая пирамида, боковая грань которой наклонена к плоскости основания под углом α. Найти отношение объёма шара к объёму усечённой пирамиды.

156 (б. 12, 2). На основании полусферы радиуса R построен конус, боковая поверхность которого пересекает сферу в точках, отстоящих от основания на расстояние, равное $\frac{1}{4}$ высоты конуса. Найти объём конуса.

1963 год

157 (б. 1, 4). В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной a. Ребро $SD = h$ перпендикулярно плоскости основания. Внутри пирамиды лежит цилиндр так, что окружность одного его основания вписана в треугольник SCD, а окружность другого касается грани SAB. Найти высоту цилиндра.

158 (б. 2, 4). Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса R так, что каждый шар касается двух других, одного и того же основания цилиндра и его боковой поверхности. Найти радиус основания цилиндра.

159 (б. 3, 4). Около двух касающихся шаров радиусов r и R описан конус так, что центры шаров лежат на высоте конуса. Найти объём конуса и показать, что он не меньше, чем удвоенный объём большего шара.

160 (б. 4, 3). Угол между соседними боковыми рёбрами правильной четырёхугольной пирамиды равен α; радиус сферы, описанной около этой пирамиды, равен R. Найти длину бокового ребра пирамиды.

161 (б. 5, 4). Через середину бокового ребра правильного тетраэдра под углом 45° к его основанию и параллельно противолежащему ребру проведена плоскость. Определить площадь сечения, если ребро тетраэдра равно a.

162 (б. 6, 4). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а боковое ребро равно l. Найти радиус шара, касающегося всех рёбер пирамиды.

163 (б. 7, 4). В правильной треугольной пирамиде угол между боковым ребром и основанием равен 45°. В пирамиду вписан цилиндр так, что одно его основание лежит на основании пирамиды, а окружность другого основания цилиндра касается боковых граней пирамиды. Высота цилиндра равна диаметру его основания. Найти отношение объёма пирамиды к объёму цилиндра.

164 (б. 8, 3). Ребро правильного тетраэдра равно a. Найти радиус сферы, касающейся боковых граней тетраэдра, если центр этой сферы лежит на основании тетраэдра.

165 (б. 9, 3). Два боковых ребра пирамиды, длины которых равны a и b, образуют угол в 60°. Угол между проекциями этих рёбер на плоскость основания пирамиды равен 120°. Найти высоту пирамиды.

166 (б. 10, 4). В полусферу радиуса R вписаны три равных шара так, что каждый шар касается двух других шаров, полусферы и её основания. Найти радиус этих шаров.

167 (б. 11, 3). В правильной треугольной пирамиде площадь боковой поверхности равна s, угол между боковой гранью и основанием равен α. Найти высоту пирамиды.

168 (б. 12, 4). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC; ребро SB перпендикулярно плоскости основания. Дано: $AB=BC=a$, $SB=h$. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

1964 год

169 (б. 1, 3). В шар радиуса R вписана прямая треугольная призма, в основании которой лежит правильный треугольник. Площадь боковой грани призмы равна S. Найти рёбра призмы.

170 (б. 3, 3). Все рёбра прямой треугольной призмы равны a. Найти площадь сечения, проведённого через сторону основания под углом $\alpha > 60^\circ$ к плоскости основания.

171 (б. 4, 2). Сфера вписана в конус с углом α при вершине. В неё вписан конус с тем же углом при вершине. Определить угол α, если отношение объёма первого конуса к объёму второго равно a. При каких a задача имеет решение?

172 (б. 5, 4). В двугранный угол α вписаны два шара радиуса r, касающиеся друг друга. Найти радиус шара, касающегося граней угла и данных шаров.

173 (б. 6, 4). В тетраэдре $ABCD$ $AB=6$, $CD=8$, остальные рёбра равны $\sqrt{74}$. Найти радиус описанного шара.

174 (б. 7, 4). Два шара радиуса r и два одинаковых шара неизвестного радиуса расположены так, что каждый шар касается трёх других и данной плоскости. Найти радиусы двух последних шаров.

175 (б. 8, 4). Ребро куба равно a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины нижнего основания куба и касающейся рёбер верхнего основания.

176 (б. 9, 4). Диаметр шара является высотой правильного тетраэдра с ребром a. Найти площадь поверхности тетраэдра, лежащей внутри шара.

177 (б. 10, 4). Около конуса с высотой 2 описана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $3\sqrt{3}$. Найти радиус шара, вписанного в трёхгранный угол при основании пирамиды и касающегося боковой поверхности конуса.

178 (б. 11, 4). Радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, равен R, а двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями равен α. Найти сторону основания пирамиды.

179 (б. 12, 2). Высота конуса, равная h, является диаметром сферы, которая делит боковую поверхность конуса в отношении $m:n$. Найти радиус основания конуса.

1965 год

180 (б. 1, 4). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна b, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\arccos \frac{2}{3}$. Плоскость, параллельная диагонали основания AC и боковому ребру BS, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность. Определить радиус этой окружности (найти все решения).

181 (б. 2, 4). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно b. Найти радиус шара, вписанного в трёхгранный угол, образованный гранями тетраэдра с вершиной в точке A, и касающегося плоскости, проведённой через середины рёбер AB, AD и BC.

182 (б. 3, 3). В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной b, а высота параллелепипеда равна $\frac{5}{4}b$. Найти радиус сферы, проходящей через концы стороны AB основания и касающейся граней параллелепипеда, параллельных AB.

183 (б. 4, 4). В треугольной пирамиде три грани взаимно перпендикулярны, и их площади равны S_1, S_2, S_3. Найти площадь четвёртой грани.

184 (б. 5, 3). Ребро куба равно b. Найти объём конуса, у которого вершина совпадает с вершиной A куба, а окружность основания проходит через центры граней куба, не проходящих через вершину A.

185 (б. 6, 2). В конус с высотой h и радиусом основания $2h$ вписан шар. Найти площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через вершину конуса под углом $\frac{\pi}{4}$ к его оси.

186 (б. 7, 4). Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через середины рёбер AA', BB' и через вершины A и C'.

187 (б. 8, 4). В правильную треугольную усечённую пирамиду с боковым ребром l можно поместить шар, касающийся всех граней, и шар, касающийся всех рёбер пирамиды. Найти длины сторон оснований пирамиды.

188 (б. 9, 4). В треугольной призме $ABCA'B'C'$ боковое ребро равно l. В основании призмы лежит правильный треугольник со стороной b, а прямая, проходящая через вершину B' и центр основания ABC, перпендикулярна основаниям. Найти площадь сечения, проходящего через ребро BC и середину ребра AA'.

189 (б. 10, 3). В треугольной пирамиде периметр основания равен $2p$, радиус вписанного шара равен R, а боковые грани образуют с основанием равные углы α. Найти объём пирамиды.

190 (б. 11, 4). Ребро куба равно a. Через диагональ AC грани $ABCD$ проведена плоскость так, что в сечении получилась трапеция, острый угол у которой равен $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$. Найти расстояние от вершины B до секущей плоскости.

191 (б. 12, 4). В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c. Через гипотенузу нижнего основания проведена плоскость так, что в сечении призмы получился равносторонний треугольник. Известно, что существует шар, касающийся боковых граней призмы, верхнего основания и сечения. Найти объём призмы.

1966 год

192 (б. 1, 4). В правильной четырёхугольной пирамиде апофема равна стороне основания. Внутри пирамиды расположены два шара: шар радиуса r касается всех боковых граней; шар радиуса $2r$ касается основания и двух смежных боковых граней; оба шара касаются друг друга внешним образом. Найти апофему этой пирамиды.

193 (б. 2, 4). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребре AB как на диаметре построена сфера. Найти радиус шара, вписанного в трёхгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A и касающегося построенной сферы.

194 (б. 3, 4). Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположены два шара радиусов $2R$ и $3R$, касающиеся друг друга внешним образом, причём один шар вписан в трёхгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A, а другой —

в трёхгранный угол с вершиной в точке B. Найти длину ребра этого тетраэдра.

195 (б. 4, 4). Внутри правильного тетраэдра с ребром a лежат четыре равных шара так, что каждый шар касается трёх других шаров и трёх граней тетраэдра. Определить радиус этих шаров.

196 (б. 5, 4). В правильную четырёхугольную пирамиду вписан куб так, что одно ребро куба лежит на средней линии основания пирамиды; вершины куба, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности пирамиды; центр куба лежит на высоте пирамиды. Найти отношение объёма пирамиды к объёму куба.

197 (б. 6, 4). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна a, высота равна $2\sqrt{2}a$. Через вершину A параллельно диагонали BD основания пирамиды проведена плоскость так, что угол между прямой AB и этой плоскостью равен 30°. Найти площадь сечения.

198 (б. 7, 4). Внутри конуса расположен куб так, что одно ребро куба лежит на диаметре основания конуса, вершины куба, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности конуса, центр куба лежит на высоте конуса. Найти отношение объёма конуса к объёму куба.

199 (б. 8, 4). Ребро правильного тетраэдра $SABC$ равно a. Через вершину A параллельно ребру BC проведена плоскость так, что угол между прямой AB и этой плоскостью равен 30°. Найти площадь сечения.

200 (б. 9, 3). Внутри цилиндра, высота которого равна $3r$, лежат три равных шара радиуса r так, что каждый шар касается двух других шаров и боковой поверхности цилиндра, причём два шара касаются нижнего основания цилиндра, а третий шар касается верхнего основания цилиндра. Найти радиус основания цилиндра.

201 (б. 10, 3). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребре BD расположена точка M так, что $3DM = a$.

Конус расположен так, что его вершина находится в середине ребра AC, а окружность основания проходит через точку M и пересекает рёбра AB и BC. Найти радиус основания этого конуса.

202 (б. 11, 3). В основании треугольной призмы лежит правильный треугольник со стороной a. Прямая, соединяющая одну из вершин верхнего основания с центром нижнего основания, перпендикулярна плоскостям оснований. Известно, что внутрь этой призмы можно поместить шар, касающийся всех граней призмы. Найти боковое ребро призмы.

203 (б. 12, 3). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота равна диагонали основания $ABCD$. Через вершину A параллельно прямой BD проведена плоскость, касающаяся вписанного в пирамиду шара. Найти отношение площади сечения к площади основания пирамиды.

1967 год

204 (б. 1, 2). Определить высоту правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а двугранный угол между боковыми гранями равен α.

205 (б. 2, 4). Ребро правильного тетраэдра равно a. Найти расстояние между скрещивающимися высотами граней тетраэдра.

206 (б. 3, 3). В треугольной пирамиде $SABC$ боковая грань SBC образует с плоскостью основания ABC двугранный угол, равный $\frac{\pi}{4}$. Треугольники SBC и ABC равнобедренные с общим основанием $BC = a$. Высота пирамиды равна h. Центр шара, описанного около пирамиды, лежит в плоскости основания. Найти радиус описанного шара.

207 (б. 4, 4). Разность периметров нижнего и верхнего оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна $4a$, высота пирамиды равна h. Расстояние от центра описанного около пирамиды шара до плоскости боковой грани в $\sqrt{2}$ раз меньше радиуса шара. Найти стороны оснований пирамиды.

208 (б. 5, 4). В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ лежит квадрат со стороной a. Через диагональ AC нижнего основания $ABCD$ проведена плоскость, пересекающая верхнее основание $A'B'C'D'$. В трёхгранные углы B и D' вписаны шары, касающиеся этой плоскости и имеющие радиусы $r=\frac{a}{5}$ и $R=\frac{a}{4}$. Найти высоту параллелепипеда.

209 (б. 6, 4). В основании пирамиды $SABC$, у которой все углы при вершине S прямые, лежит равнобедренный треугольник: $AC=BC$. Ребро SC наклонено к плоскости основания ABC под углом $\frac{\pi}{2}$. На ребре AB как на диаметре построена сфера радиуса R. Найти радиус сферы, вписанной в трёхгранный угол при вершине C и касающейся данной сферы (найти все решения).

210 (б. 7, 4). В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ лежит квадрат со стороной 5. Высота параллелепипеда равна 4. В трёхгранные углы при вершинах A и C' вписаны равные касающиеся друг друга шары. Третий шар касается двух первых и бокового ребра BB' параллелепипеда в его середине. Найти радиусы шаров (найти все решения).

211 (б. 8, 4). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна a, высота пирамиды равна $a\sqrt{3}$. Точки M, N и K являются серединами, соответственно, боковых рёбер AS, BS и CS. Найти радиус шара, касающегося основания пирамиды и прямых AK, CN и BM.

212 (б. 9, 3). В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде проведено сечение через диагонали оснований и сечение, проходящее через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания. Угол между секущими плоскостями равен α. Найти отношение площадей сечений.

213 (б. 10, 3). Образующая усечённого конуса, равная $r\sqrt{2}$, наклонена к плоскости основания под углом $\alpha = \frac{\pi}{4}$, а радиус верхнего основания усечённого конуса равен r. Найти радиус шара, описанного около этого конуса.

214 (б. 11, 3). В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде $ABCDA'B'C'D'$ проведено два сечения $AA'C'C$ и $ABC'D'$. Первое сечение имеет площадь S_1, а второе — площадь S_2. Найти площадь сечения, проходящего через середину высоты параллельно основаниям.

215 (б. 12, 2). В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна b, а боковое ребро равно $2b$, через середину бокового ребра перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.

1968 год

216 (б. 1, 4). В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной a. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равно h. Через вершину A параллельно диагонали основания BD проведено сечение, которое делит ребро SC в отношении $2:1$, считая от вершины S. Найти площадь сечения.

217 (б. 2, 4). Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ равна b, а высота призмы равна $b\sqrt{2}$. Через вершины A, B' и середину ребра CC' проведено сечение. Второе сечение проведено через вершину B, середину ребра AC и середину ребра $B'C'$. Найти длину отрезка, по которому пересекаются эти сечения.

218 (б. 3, 4). Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, в котором $AB = 3$, $AD = 2$, $AA' = 1$. Найти радиус шара, вписанного в трёхгранный угол при вершине A и касающегося диагонали BD'.

219 (б. 4, 4). Дана произвольная треугольная призма $ABCA'B'C'$, в которой проведены два сечения. Первое сечение проходит через ребро AB и середину ребра $A'C'$, а второе сечение — через ребро $A'B'$ и середину ребра CC'. Найти отношение длины отрезка линии пересечения этих сечений, заключённого внутри призмы, к длине ребра AB.

220 (б. 5, 3). Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, в котором $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Найти угол между плоскостями $AB'D'$ и $A'C'D$.

221 (б. 6, 4). В тетраэдре $ABCD$ рёбра AB и CD взаимно перпендикулярны и равны a и b соответственно. Общий перпендикуляр к этим рёбрам пересекает ребро AB в точке M и ребро CD в точке N; $MN = c$. В тетраэдр вписан куб так, что четыре ребра куба параллельны MN и на каждой грани тетраэдра лежат в точности две вершины куба. Найти ребро куба.

222 (б. 7, 3). Центр шара, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, находится на расстоянии a от боковой грани и на расстоянии b от бокового ребра. Найти радиус шара.

223 (б. 8, 4). В тетраэдре $ABCD$ ребро AB равно a, высота CE грани ABC равна b (точка E лежит между A и B), высота тетраэдра DF равна c (точка F лежит внутри $\triangle ABC$). В тетраэдр вписан куб $PQMNP'Q'M'N'$ так, что грань $PQMN$ куба лежит на грани ABC тетраэдра, ребро $P'Q'$ лежит на грани ABD, а вершины M' и N' лежат на гранях ACD и BCD соответственно. Найти ребро куба.

224 (б. 9, 3). Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна b, а высота призмы равна h. Через вершины A, B_1 и точку P на ребре CC_1 проведено сечение так, что $\angle APB_1 = \frac{2\pi}{3}$. Найти площадь сечения.

225 (б. 10, 3). В правильной шестиугольной пирамиде вписанная сфера проходит через центр описанной. Во сколько раз радиус описанной сферы больше радиуса вписанной? (Найти все решения.)

226 (б. 11, 3). В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит равнобедренный треугольник ($AB = BC$), высота которого, опущенная из вершины B, равна $\sqrt{3}$. На ребре BB' взята точка P так, что $\angle A'PC = \frac{\pi}{2}$, $A'P = 2\sqrt{2}$ и $PC = \sqrt{5}$. Найти объём призмы.

227 (б. 12, 4). Центр шара, вписанного в правильную четырёхугольную пирамиду, находится на расстоянии $\sqrt{2}$ от бокового ребра и на расстоянии $\sqrt{5}$ от стороны основания. Найти радиус шара.

1969 год

228 (б. 1, 5). В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AD с центром грани BCD, а отрезок PQ соединяет середину ребра CD с центром грани ABC. Найти угол между отрезками MN и PQ.

229 (б. 2, 5). В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC, а точка E лежит на середине ребра AB. Найти угол между отрезками MN и DE.

230 (б. 3, 5). В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середины рёбер AB и CD, а отрезок PQ соединяет середину ребра AD с центром грани ABC. Найти угол между отрезками MN и PQ.

231 (б. 4, 4). В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро в два раза больше стороны основания. Найти отношение объёма пирамиды к объёму шара, касающегося всех рёбер пирамиды.

232 (б. 5, 5). В основании наклонной треугольной призмы лежит правильный треугольник. Высота призмы равна h, а площади боковых граней равны S_1, S_1 и S_2. Найти сторону основания. Рассмотреть случаи $S_1 > S_2$ и $S_1 < S_2$.

233 (б. 6, 4). Внутри правильной четырёхугольной пирамиды расположен правильный тетраэдр так, что ребро CD тетраэдра лежит на диагонали основания пирамиды, вершины A и B тетраэдра лежат на двух противоположных боковых рёбрах пирамиды и ребро AB параллельно основанию пирамиды. Найти отношение объёма пирамиды к объёму тетраэдра, если известно, что ребро тетраэдра равно стороне основания пирамиды.

234 (б. 7, 5). В треугольной пирамиде $ABCD$ $AB = 2$, $CD = 4$, остальные рёбра равны 6. На отрезке MN, который соединяет середины рёбер AB и CD, как на диаметре построена сфера. Найти длины отрезков, которые отсекает эта сфера на остальных рёбрах пирамиды.

235 (б. 8, 5). В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник. Площади боковых граней равны S_1, S_1, S_2. Площадь проекции призмы на плоскость, перпендикулярную боковому ребру, равна S_3. Найти площадь основания призмы. Рассмотреть случаи $S_1 > S_2$ и $S_1 < S_2$.

236 (б. 9, 5). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины A, B, середину ребра CD и центр грани ABC.

237 (б. 10, 3). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через вершину A, середины рёбер CD и BD и центр грани ABC.

238 (б. 11, 5). Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через центры граней $ABCD$, $AA'B'B$ и середины рёбер $B'C'$ и $C'D'$.

239 (б. 12, 5). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины A и B и центры граней ABD и ACD.

1970 год

240 (б. 1, 5). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC. Каждый из плоских углов CSA и ASB равен $45°$, а $\angle SAB = \operatorname{arctg} 2$. Через вершину C проведено сечение перпендикулярно ребру SA. Найти двугранный угол между плоскостью основания и плоскостью сечения (найти все решения).

241 (б. 2, 5). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90°$). Плоские углы SAB, SCA, SAC, SBA (в указанном порядке) составляют арифметическую прогрессию, разность которой отлична от нуля. Площади граней SAB, ABC и SAC составляют геометрическую прогрессию. Найти углы, составляющие прогрессию.

242 (б. 3, 5). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC. Грань SAB перпендикулярна плоскости основания, $\angle ASB = \angle ASC = \frac{\pi}{4}$. Найти плоские углы граней SAC и SAB (найти все решения).

243 (б. 4, 5). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90°$). Двугранный угол между гранью SAC и плоскостью основания равен α. Плоские углы SAB, ASC, SAC, BSA (в указанном порядке) составляют арифметическую прогрессию. Найти эту прогрессию.

244 (б. 5, 4). В правильном тетраэдре $ABCD$ проведены два сечения, каждое из которых параллельно рёбрам AB и CD. Площадь части грани ABC, заключённой между секущими плоскостями, на S больше площади части грани ACD, заключённой между этими же плоскостями. На сколько площадь одного сечения больше площади другого?

245 (б. 6, 5). В правильном тетраэдре $ABCD$ проведены два сечения, каждое из которых параллельно рёбрам AC и BD. Найти ребро тетраэдра, если площади сечений равны 20 и 24, а расстояние между секущими плоскостями равно 1.

246 (б. 7, 5). Правильная треугольная усечённая пирамида обладает следующими двумя свойствами: 1) в пирамиду можно вписать шар; 2) существует шар, который касается всех рёбер этой пирамиды. Найти двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием пирамиды.

247 (б. 8, 5). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Две плоскости, каждая из которых параллельна рёбрам AB и CD, касаются вписанного в тетраэдр шара. Найти полную поверхность тела, которое отсекается от тетраэдра этими плоскостями.

248 (б. 9, 2). Цилиндр и правильная треугольная пирамида расположены так, что окружность нижнего основания цилиндра вписана в основание пирамиды, а окружность верхнего основания цилиндра пересекает боковые рёбра пирамиды. Найти отношение объёма цилиндра к объёму пирамиды.

249 (б. 10, 2). Около шара радиуса R описана правильная треугольная призма. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр шара и сторону основания призмы.

250 (б. 11, 2). Правильная треугольная пирамида и правильная треугольная призма расположены так, что стороны нижнего основания призмы являются средними линиями основания пирамиды, а стороны верхнего основания призмы пересекают боковые рёбра пирамиды. Найти отношение объёма призмы к объёму пирамиды.

251 (б. 12, 2). В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма со стороной основания a. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр сферы и сторону основания призмы.

1971 год

252 (б. 1, 5). Через ребро BC треугольной пирамиды $SABC$ и точку M — середину ребра SA — проведено сечение BCM. Вершина конуса совпадает с вершиной S пирамиды, а окружность основания вписана в треугольник BCM, касаясь стороны BC в её середине. Точки касания окружности с отрезками BM и CM являются точками пересечения медиан граней ASB и ASC. Высота конуса в два раза больше радиуса основания. Найти отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её основания.

253 (б. 2, 5). Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — её вершина). Ребро SC этой пирамиды совпадает с боковым ребром правильной треугольной призмы $A_1B_1CA_2B_2S$ (A_1A_2, B_1B_2 и CS — боковые рёбра, а A_1B_1C — одно из оснований). Вершины призмы A_1 и B_1 лежат в плоскости грани SAB пирамиды. Какую долю от объёма всей пирамиды составляет объём части пирамиды, лежащей внутри призмы, если отношение длины бокового ребра пирамиды к длине стороны её основания равно $\frac{2}{\sqrt{3}}$?

254 (б. 3, 5). Сторона BC основания четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и медианы BM и CN граней SAB и SDC лежат в одной плоскости. Вершина конуса совпадает с вершиной S пирамиды, а окружность основания конуса вписана в четырёхугольник $BMNC$ и касается стороны BC в её середине. Точки касания этой окружности с отрезками BM и CN являются точками пересечения медиан граней SAB и SDC. Найти отношение объёма конуса к объёму пирамиды.

255 (б. 4, 5). Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — её вершина), сторона основания которой равна $2a$. Ребро SA этой пирамиды совпадает с боковым ребром правильной треугольной призмы $AB_1C_1SB_2C_2$ (AS, B_1B_2 и C_1C_2 — боковые рёбра призмы, а AB_1C_1 — одно из оснований). Вершины B_1 и C_1 призмы лежат в плоскости грани SBC пирамиды. Плоскость основания ABC пирамиды рассекает призму на две равные по объёму части. Найти объём призмы.

256 (б. 5, 5). В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 сторона верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ равна 1, а сторона нижнего основания равна 7. Плоскость, проходящая через ребро B_1C_1 перпендикулярно к плоскости AD_1C, делит пирамиду на две части равного объёма. Найти объём пирамиды.

257 (б. 6, 5). Нижним основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 является правильный треугольник ABC со стороной $2a$. Проекцией призмы на плоскость основания является трапеция с боковой стороной AB и площадью, в 2 раза большей площади основания. Радиус шара, проходящего через вершины A, B, A_1, C_1, равен $2a$. Найти объём призмы (найти все решения).

258 (б. 7, 5). В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 сторона верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ равна 1, а сторона нижнего основания равна 7. Плоскость, проходящая через ребро B_1C_1 перпендикулярно плоскости сечения AD_1C, делит площадь грани AA_1D_1D на две равные части. Найти объём пирамиды.

259 (б. 8, 5). В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC, а все боковые грани имеют равные площади. Ребро SA равно 2, ребро SB равно $\sqrt{2}$. Через вершину B проведено сечение пирамиды перпендикулярно ребру SC. Найти площадь этого сечения.

260 (б. 9, 5). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна b, а высота равна $b\sqrt{2}$. Шар, вписанный в эту пирамиду, касается боковой грани SAD в точке K. Найти площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро AB и точку K.

261 (б. 10, 5). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На рёбрах AB и CD взяты точки E и F так, что описанная около тетраэдра сфера пересекает прямую, проходящую через E и F, в точках M и N. Найти длину отрезка EF, если $ME : EF : FN = 3 : 12 : 4$.

262 (б. 11, 5). Шар, вписанный в правильную пирамиду $ABCD$, касается грани ADC в точке K. Через сторону AB основания ABC пирамиды и точку K проведено сечение. Найти площадь этого сечения, если сторона основания пирамиды равна b, а высота пирамиды равна $b\sqrt{2}$.

263 (б. 12, 5). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На рёбрах AB и CD взяты соответственно точки E и F так, что вписанная в тетраэдр сфера делит отрезок EF на три части, длины которых относятся как $3:5:4$, считая от точки E. Найти длину отрезка EF.

1972 год

264 (б. 1, 5). Нижним основанием четырёхугольной усечённой пирамиды является ромб $ABCD$, у которого $AB=4$ и $\angle BAD=60°$; AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые рёбра усечённой пирамиды, ребро A_1B_1 равно 2, ребро CC_1 перпендикулярно плоскости основания и равно 2. На ребре BC взята точка M так, что $BM=3$, и через точки B_1, M и центр ромба $ABCD$ проведена плоскость. Найти двугранный угол между этой плоскостью и плоскостью AA_1C_1C.

265 (б. 2, 5). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагонали AC грани $ABCD$ взята точка M, а на диагонали BD_1 куба взята точка N так, что $\angle NMC=60°$, $\angle MNB=45°$. В каком отношении точки M и N делят отрезки AC и BD_1?

266 (б. 3, 5). В усечённой четырёхугольной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро AA_1 перпендикулярно плоскости нижнего основания $ABCD$. Грани BAA_1B_1, DAA_1D_1, $ABCD$ — равные трапеции, AB параллельна CD и $\angle BAD=60°$. Определить двугранный угол между плоскостями, проходящими через точки A, D_1, B_1 и B, D, C_1 соответственно.

267 (б. 4, 5). В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F являются серединами рёбер AD и BC соответственно. На ребре CD взята точка N, на отрезке EF — точка M так, что $\angle MNC=45°$ и $\angle NME=\arccos\frac{3}{4}$. В каком отношении точки M и N делят отрезки EF и CD?

268 (б. 5, 5). В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$; AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 — его боковые рёбра. Сфера с центром в точке O касается рёбер

BC, A_1B_1 и DD_1 соответственно в точках B, A_1 и D_1. Определить $\angle A_1OB$, если $AD = 4$, а высота параллелепипеда равна 1.

269 (б. 6, 5). Ребро правильного тетраэдра равно a. Плоскость P проходит через вершину B и середины рёбер AC и AD. Шар касается прямых AB, AC, AD и той части плоскости P, которая заключена внутри тетраэдра. Найти радиус шара (найти все решения).

270 (б. 7, 5). В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$; AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 — его боковые рёбра. Сторона AB основания равна высоте параллелепипеда. Сфера с центром в точке O проходит через вершину B и касается рёбер A_1B_1 и DD_1 соответственно в точках A_1 и D_1. Найти отношение объёма параллелепипеда к объёму сферы, если $\angle A_1OB = \angle D_1OB = 120°$.

271 (б. 8, 5). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Отрезок EF соединяет центр грани ADC с серединой ребра BC. Найти радиус шара, вписанного в трёхгранный угол при вершине A и касающегося отрезка EF (найти все решения).

272 (б. 9, 5). В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны между собой, все плоские углы при вершине A острые и равны между собой. Плоскость P проходит через вершину A и пересекает боковые рёбра BB_1, CC_1 и DD_1 в точках K, L и M соответственно. Площади фигур AKB, AMD, $DMLC$ и площадь нижнего основания $ABCD$ образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найти отношение объёма отсечённой части $ABCDKLM$ к объёму всего параллелепипеда.

273 (б. 10, 5). В правильном тетраэдре $ABCD$ плоскость P пересекает рёбра AB, BC, CD, AD в точках K, L, M, N соответственно. Площади треугольников AKN, KBL, NDM составляют соответственно $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ площади грани тетраэдра. В каком отношении плоскость P делит площадь грани BCD?

274 (б. 11, 5). Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 15$, $BC = 3$ и боковой стороной $AB = 10$; высота призмы равна 9. Плоскость P пересекает боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 в точках K, L, M и N соответственно, причём $AK = 3$. Площади фигур $BLMC$, $BLKA$, $CMND$ и $DNKA$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. В каком отношении плоскость P делит объём призмы?

275 (б. 12, 5). Боковое ребро правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне основания ABC. Плоскость P пересекает стороны основания AB и AC и боковые рёбра CC_1 и BB_1 в точках K, L, M и N соответственно. Площади фигур AKL, CLM и $CMNB$ равны соответственно $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{2}$ площади грани, в которой каждая из них находится. В каком отношении плоскость P делит объём призмы?

1973 год

276 (б. 1, 5). В пирамиде $ABCD$ длина каждого из рёбер AB и CD равна 4, длина каждого из остальных рёбер равна 3. В эту пирамиду вписана сфера. Определить объём пирамиды, вершинами которой являются точки касания сферы с гранями пирамиды $ABCD$.

277 (б. 2, 5). В пирамиде $ABCD$ плоские углы DAB, ABC, BCD прямые. Вершины M, N, P, Q правильного тетраэдра расположены соответственно на рёбрах AC, BC, AB, BD пирамиды $ABCD$. Ребро MN параллельно ребру AB. Найти отношение объёмов правильного тетраэдра $MNPQ$ и пирамиды $ABCD$.

278 (б. 3, 5). Сторона основания MNP правильной пирамиды $MNPQ$ равна 5. Основанием правильной пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$. Все вершины пирамиды $SABCD$ расположены на рёбрах пирамиды $MNPQ$, причём вершина S лежит на ребре QM и $MS = \frac{3}{4}MQ$. Определить объём пирамиды $SABCD$.

279 (б. 4, 5). В пирамиде $MNPQ$ плоские углы QMN, MNP, NPQ прямые. Вершины A, B, C, D правильного тетраэдра расположены соответственно на рёбрах MP, NP, NQ, PQ пирамиды $MNPQ$. Ребро AB параллельно ребру MN. Найти отношение объёмов правильного тетраэдра $ABCD$ и пирамиды $MNPQ$.

280 (б. 5, 5). Две равные сферы S_1 и S_2 касаются друг друга, и, кроме того, каждая сфера касается обеих граней P и Q прямого двугранного угла. Сфера S_1 касается грани P в точке A. Через эту точку проведена прямая, пересекающая сферу S_1 в точке B, касающаяся сферы S_2 в точке C и пересекающая грань Q в точке D. Прямая AD составляет с гранью P угол 30°. Определить отношение $AB : BC : CD$.

281 (б. 6, 5). Две сферы S_1 и S_2 касаются друг друга, и, кроме того, каждая сфера касается обеих граней P и Q двугранного угла величины 2α. Сфера S_1 касается грани P в точке A, а сфера S_2 касается грани Q в точке B. В каком отношении отрезок AB делится сферами?

282 (б. 7, 5). Две равные сферы радиуса r касаются друг друга, и каждая из них касается обеих граней двугранного угла, равного 120°. Через общую точку касания этих сфер проведена прямая, пересекающая грани угла в точках A и B. Отрезок AB делится сферами на четыре равные части. Определить длину отрезка AB.

283 (б. 8, 5). Две равные сферы S_1 и S_2 касаются друг друга, а также боковой поверхности (снаружи) и плоскости основания цилиндра. Сфера S_1 касается боковой поверхности цилиндра в точке A, а сфера S_2 касается плоскости основания цилиндра в точке B. В каком отношении отрезок AB делится сферами, если отношение радиуса основания цилиндра к радиусу сферы равно n ($n > 1$)?

284 (б. 9, 5). Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной 4, а длина каждого из боковых рёбер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равна 6. Цилиндр расположен так, что его ось лежит в плоскости BB_1D_1D, а точки A_1, C_1, B_1 и центр O квадрата $ABCD$ лежат на боковой поверхности цилиндра. Определить радиус цилиндра (найти все решения).

285 (б. 10, 5). Сторона основания ABC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 1, а каждое из боковых рёбер имеет длину $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Цилиндр расположен так, что точка A_1 и середина M ребра CC_1 лежат на его боковой поверхности, а ось цилиндра параллельна прямой AB_1 и отстоит от неё на расстояние $\frac{1}{4}$. Определить радиус цилиндра.

286 (б. 11, 5). Основанием пирамиды $ABCD$ является правильный треугольник ABC со стороной 12. Ребро BD перпендикулярно плоскости основания, и его длина равна $10\sqrt{3}$. Все вершины этой пирамиды лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого пересекает ребро BD и плоскость ABC. Определить радиус цилиндра (найти все решения).

287 (б. 12, 5). Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной 1. Длина каждого из боковых рёбер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равна $\sqrt{3}$. Цилиндр расположен так, что точки A, A_1, D лежат на его боковой поверхности, а ось цилиндра параллельна диагонали BD параллелепипеда. Определить радиус цилиндра.

1974 год

288 (б. 1, 5). В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 8$ и $BC = 6$. Гипотенуза AC является диаметром основания конуса, вершина которого расположена на ребре A_1B_1. Боковая поверхность конуса пересекает ребро AB в точке M так, что $AM = 5$. Определить объём конуса.

289 (б. 2, 5). Основанием пирамиды служит квадрат $ABCD$ со стороной 1,5. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 1,75. Точки S, B и D лежат на боковой поверхности конуса с вершиной в точке A, а точка C — в плоскости основания этого конуса. Определить площадь боковой поверхности конуса.

290 (б. 3, 5). Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна a, боковое ребро равно $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Вершина конуса находится в центре основания пирамиды. Точка C и середины рёбер SA и SB лежат на боковой поверхности конуса, а вершина S пирамиды — в плоскости его основания. Определить площадь боковой поверхности конуса.

291 (б. 4, 5). Основанием пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной 4, боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания и равно 3. Точки A, B, C лежат на боковой поверхности конуса с вершиной в точке S, а точка D лежит в плоскости основания этого конуса. Определить площадь боковой поверхности конуса.

292 (б. 5, 4). Сторона основания ABC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точки M и N являются соответственно серединами рёбер AC и A_1B_1. Проекция отрезка MN на прямую BA_1 равна $\frac{a}{2\sqrt{6}}$. Определить высоту призмы (найти все решения).

293 (б. 6, 3). Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a, точки O и O_1 являются центрами оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Проекция отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5}{6}a$. Определить высоту призмы.

294 (б. 7, 4). Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точки M и N являются соответственно серединами рёбер A_1B_1 и AA_1. Проекция отрезка BM на прямую C_1N равна $\frac{a}{2\sqrt{5}}$. Определить высоту призмы (найти все решения).

295 (б. 8, 3). Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точки M, N, P и Q являются серединами рёбер AB, AC, A_1C_1 и C_1B_1 соответственно. Проекция отрезка MP на прямую NQ равна $\frac{1}{4}a$. Определить высоту призмы.

296 (б. 9, 5). В прямой призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит равнобочная трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, $AD:BC=n>1$. Параллельно диагонали B_1D проведены плоскость через ребро AA_1 и плоскость через ребро BC; параллельно диагонали A_1C проведены плоскость через ребро DD_1 и плоскость через ребро B_1C_1. Определить отношение объёма треугольной пирамиды, ограниченной этими четырьмя плоскостями, к объёму призмы.

297 (б. 10, 5). Основанием призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel CD$, $CD:AB=n<1$. Диагональ AC_1 пересекает диагонали A_1C и D_1B в точках M и N соответственно, а диагональ DB_1 пересекает диагонали A_1C и D_1B соответственно в точках Q и P. Известно, что $MNPQ$ — правильный тетраэдр. Определить отношение объёма тетраэдра к объёму призмы.

298 (б. 11, 5). В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение сторон AB и A_1B_1 нижнего и верхнего оснований равно $m<1$. Параллельно диагонали B_1D проведены плоскость через ребро AB и плоскость через ребро A_1D_1; параллельно диагонали BD_1 проведены плоскость через ребро CD и плоскость через ребро B_1C_1. Определить отношение объёма треугольной пирамиды, ограниченной этими четырьмя плоскостями, к объёму усечённой пирамиды.

299 (б. 12, 5). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На рёбрах AB, BC, CD, DA соответственно взяты пары точек M и M_1, N и N_1, P и P_1, Q и Q_1 так, что

$AM = AQ = CN = CP = \frac{1}{8}a$, $BM_1 = BN_1 = DP_1 = DQ_1 = \frac{3}{8}a$. Определить объём треугольной пирамиды, вершинами которой служат точки пересечения отрезков MP_1 и M_1P с отрезками NQ_1 и N_1Q.

1975 год

300 (б. 1, 3). Катеты AB и AC прямоугольного треугольника расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла величины φ. Катет AB образует с ребром двугранного угла острый угол α. Определить угол между этим ребром и катетом AC.

301 (б. 2, 3). Стороны AB и AC равностороннего треугольника расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла величины φ. Сторона AB образует с ребром двугранного угла острый угол α. Определить угол между плоскостью ABC и гранью Q.

302 (б. 3, 3). Катеты AB и AC прямоугольного треугольника расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла и образуют с ребром этого двугранного угла острые углы α и β соответственно. Определить величину двугранного угла.

303 (б. 4, 3). Стороны AB и AC равностороннего треугольника расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла, сторона AB образует с ребром двугранного угла острый угол α. Плоскость треугольника образует с гранью Q острый двугранный угол величины β. Определить величину угла между гранями P и Q.

304 (б. 5, 5). В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, угол между апофемой и боковой гранью равен $\frac{\pi}{4}$. Определить высоту пирамиды.

305 (б. 6, 5). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ угол между боковым ребром SA и плоскостью основания $ABCD$ равен углу между SA и плоскостью грани SBC. Определить этот угол.

306 (б. 7, 5). Через боковое ребро SC правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведена плоскость, параллельная стороне AB основания. Боковое ребро SA образует с этой плоскостью угол, равный $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$. Определить угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

307 (б. 8, 5). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA и диагональ BD основания образуют равные углы с плоскостью боковой грани SBC. Определить угол между ребром SA и плоскостью SBC.

308 (б. 9, 2). На высоте конуса как на диаметре построена сфера. Площадь поверхности части сферы, лежащей внутри конуса, равна площади части поверхности конуса, лежащей внутри сферы. Определить угол в осевом сечении конуса.

309 (б. 10, 2). Две сферы с центрами O_1 и O_2 пересечены плоскостью P, перпендикулярной отрезку O_1O_2 и проходящей через его середину. Плоскость P делит площадь поверхности первой сферы в отношении $m:1$, а площадь поверхности второй сферы — в отношении $n:1$ ($m>1$, $n>1$). Найти отношение радиусов этих сфер.

310 (б. 11, 2). На высоте конуса как на диаметре построена сфера. Площадь части поверхности сферы, лежащей вне конуса, равна площади основания конуса. Определить угол в осевом сечении конуса.

311 (б. 12, 2). Две сферы пересечены плоскостью, параллельной их линии центров. Эта плоскость делит площадь поверхности одной сферы в отношении $m:1$, а площадь поверхности другой — в отношении $n:1$ ($m>1$, $n>1$). Найти отношения радиусов сфер.

1976 год

312 (б. 1, 5). Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен V. Высота SP пирамиды является ребром правильного тетраэдра $SPQR$, плоскость грани PQR

которого перпендикулярна ребру SC. Найти объём общей части этих пирамид.

313 (б. 2, 5). Точки A, B, C, D, E, F — вершины нижнего основания правильной шестиугольной призмы, точки M, N, P, Q, R, S — середины сторон верхнего основания, точки O и O_1 — центры нижнего и верхнего оснований соответственно. Найти объём общей части пирамид $O_1ABCDEF$ и $OMNPQRS$, если объём призмы равен V.

314 (б. 3, 5). Высота SO правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ образует с боковым ребром угол α, объём этой пирамиды равен V. Вершина второй правильной четырёхугольной пирамиды находится в точке S, центр основания — в точке C, а одна из вершин основания лежит на прямой SO. Найти объём общей части этих пирамид.

315 (б. 4, 5). Точки O и O_1 — соответственно центры оснований $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ правильной четырёхугольной призмы объёма V. Правильный восьмиугольник, четыре вершины которого совпадают с серединами сторон квадрата $ABCD$, служит основанием пирамиды с вершиной в точке O_1. Найти объём общей части этой пирамиды и пирамиды $OA_1B_1C_1D_1$.

316 (б. 5, 4). На боковых рёбрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки M, N и P так, что $AM : AA_1 = B_1N : BB_1 = C_1P : CC_1 = 3 : 4$. На отрезках CM и A_1N расположены соответственно точки E и F так, что $EF \parallel B_1P$. Определить отношение $EF : B_1P$.

317 (б. 6, 4). В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — середина бокового ребра AA_1. На диагоналях AB_1 и BC_1 боковых граней расположены соответственно точки E и F так, что $EF \parallel CM$. Определить отношение $EF : CM$.

318 (б. 7, 4). В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — середины боковых рёбер AA_1 и CC_1 соответственно. На отрезках CM и AB_1 расположены соответственно точки E и F так, что $EF \parallel BN$. Определить отношение $EF:BN$.

319 (б. 8, 4). На диагоналях AB_1 и CA_1 боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки E и F так, что $EF \parallel BC_1$. Определить отношение $EF:BC_1$.

320 (б. 9, 5). Два правильных тетраэдра $ABCD$ и $MNPQ$ расположены так, что плоскости BCD и NPQ совпадают, вершина M лежит на высоте AO первого тетраэдра, а плоскость MNP проходит через центр грани ABC и середину ребра BD. Найти отношение длин рёбер тетраэдров.

321 (б. 10, 5). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{6}$, а высота — 3. Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится в центре основания пирамиды, вершина C_1 — на высоте пирамиды, а ребро CD лежит в плоскости одной из боковых граней. Найти длину ребра куба.

322 (б. 11, 5). Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3, а высота — $4\sqrt{3}$. Вершина правильного тетраэдра лежит на отрезке, соединяющем центры граней ABC и $A_1B_1C_1$. Плоскость основания этого тетраэдра совпадает с плоскостью основания ABC призмы, а плоскость одной из боковых граней тетраэдра проходит через диагональ AB_1 боковой грани призмы. Найти длину ребра тетраэдра.

323 (б. 12, 5). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2, а высота — 3. Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится в центре основания пирамиды, вершина C — на высоте пирамиды, а отрезок BC_1 лежит в плоскости одной из боковых граней пирамиды. Найти длину ребра куба.

1977 год

324 (б. 1, 6). Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $AC = BC = a$. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой CA_1, а вершины P и Q — на прямой AB_1. Найти:

1) объём призмы;

2) расстояние между серединами отрезков MN и PQ.

325 (б. 2, 6). Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка E — середина ребра AD. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой ED_1, а вершины P и Q — на прямой, проходящей через точку A_1 и пересекающей прямую BC в точке R. Найти:

1) отношение $BR : BC$;

2) расстояние между серединами отрезков MN и PQ.

326 (б. 3, 6). Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой, проходящей через точки C_1 и B, а вершины P и Q — на прямой A_1C. Найти:

1) объём призмы;

2) расстояние между серединами отрезков MN и PQ.

327 (б. 4, 6). Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длины рёбер AB, BC и BB_1 которого равны соответственно $2a$, a и a; точка E — середина ребра BC. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой C_1E, вершины P и Q — на прямой, проходящей через точку B_1 и пересекающей прямую AD в точке F. Найти:

1) длину отрезка DF;

2) расстояние между серединами отрезков MN и PQ.

328 (б. 5, 5). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на рёбрах AD и SC, параллельные плоскости SAB.

1) Один из этих отрезков проведён через точку M ребра AD такую, что $AM : AD = 3 : 4$. Найти его длину.

2) Найти наименьшую длину рассматриваемых отрезков.

329 (б. 6, 5). Сторона основания $ABCD$ правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину $2a$, боковое ребро — длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани и диагонали DB_1 призмы, параллельные плоскости AA_1B_1B.

1) Один из этих отрезков проведён через точку M диагонали AD_1 такую, что $AM : AD_1 = 2 : 3$. Найти его длину.

2) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

330 (б. 7, 5). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC, параллельные плоскости SAD.

1) Один из этих отрезков проведён через точку M диагонали BD такую, что $DM : DB = 1 : 3$. Найти его длину.

2) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

331 (б. 8, 5). Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1.

1) Один из этих отрезков проведён через точку M диагонали BC_1 такую, что $BM : BC_1 = 1 : 3$. Найти его длину.

2) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

332 (б. 9, 5). Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a. Точка D — середина ребра AB, точка E лежит на ребре A_1C_1. Прямая DE образует углы α и β с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Найти:

1) высоту призмы;

2) радиус шара с центром на отрезке DE, касающегося плоскостей ABC и AA_1C_1C.

333 (б. 10, 5). Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. Точки M и N лежат на отрезках BD и CC_1 соответственно. Прямая MN образует угол $\frac{\pi}{4}$ с плоскостью $ABCD$ и угол $\frac{\pi}{6}$ с плоскостью BB_1C_1C. Найти:

1) длину отрезка MN;

2) радиус шара с центром на отрезке MN, касающегося плоскостей $ABCD$ и BB_1C_1C.

334 (б. 11, 5). Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна h. Точка D лежит на ребре AB. Прямая C_1D образует угол $\frac{\pi}{6}$ с плоскостью AA_1C_1C и угол $\arcsin\frac{3}{4}$ с плоскостью ABC. Найти:

1) длину стороны основания призмы;

2) радиус шара с центром на отрезке C_1D, касающегося плоскостей ABC и AA_1C_1C.

335 (б. 12, 5). Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. На рёбрах AB и CC_1 взяты соответственно точки M и N так, что прямая MN образует угол $\frac{\pi}{6}$ с плоскостью $ABCD$ и угол $\arcsin\frac{1}{3}$ с плоскостью BB_1C_1C. Найти:

1) длину отрезка MN;

2) радиус шара с центром на отрезке MN, касающегося плоскостей $ABCD$ и BB_1C_1C.

1978 год

336 (б. 1, 6). Вершина A основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ совпадает с вершиной конуса, вершины B и D лежат на его боковой поверхности, вершина S — на окружности основания этого конуса, а вершина C — в плоскости его основания. Найти отношение объёма конуса к объёму пирамиды.

337 (б. 2, 6). Дана правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, вершина A которой совпадает с центром одного из оснований цилиндра, вершины B_1 и C_1 лежат на окружности другого основания, а вершины A_1, B, C — на боковой поверхности цилиндра. Определить отношение объёмов цилиндра и призмы.

338 (б. 3, 6). Дана правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, вершина A которой совпадает с вершиной конуса, вершины B и C лежат на боковой поверхности этого конуса, а вершины B_1 и C_1 — на окружности его основания. Найти отношение объёмов конуса и призмы, если $AB_1 : AB = 5$.

339 (б. 4, 6). Вершины A, B_1, C_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежат на боковой поверхности цилиндра, вершины B и C — на окружности одного основания, вершина A_1 — в плоскости другого основания. Плоскость A_1BC перпендикулярна плоскости основания цилиндра. Найти отношение объёмов цилиндра и призмы.

340 (б. 5, 6). Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка P — середина ребра CC_1, точка Q — центр грани AA_1B_1B. Отрезок MN с концами на прямых AD и A_1B_1 пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

341 (б. 6, 6). Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна a. Точка E — середина ребра CD, точка F — середина высоты BL грани ABD. Отрезок MN с концами на прямых AD и BC пересекает прямую EF и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

342 (б. 7, 6). Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки P, K, L — середины рёбер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка Q — центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

343 (б. 8, 6). В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна $4a$, длина бокового ребра равна a. Точки D и E — середины рёбер A_1B_1 и BC. Отрезок MN с концами на прямых AC и BB_1 пересекает прямую DE и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

344 (б. 9, 6). В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна $2a$, длина бокового ребра — a. Через вершину A проведена плоскость перпендикулярно прямой AB_1, через вершину B — плоскость перпендикулярно прямой BC_1 и через вершину C — плоскость перпендикулярно прямой CA_1. Найти объём многогранника, ограниченного этими тремя плоскостями и плоскостью $A_1B_1C_1$.

345 (б. 10, 6). В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна $2a$, а длина бокового ребра — a. Проведены четыре плоскости: первая через точку B перпендикулярно прямой BA_1, вторая через точку C перпендикулярно прямой CA_1, третья через точку B_1 перпендикулярно прямой B_1A, четвёртая через точку C_1 перпендикулярно прямой C_1A. Найти объём многогранника, ограниченного этими четырьмя плоскостями и плоскостью BB_1C_1C.

346 (б. 11, 6). В прямой призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием является ромб с острым углом BAD, величина которого равна $\frac{\pi}{3}$. Длина стороны основания призмы равна a, длина бокового ребра — $\frac{3}{2}a$. Через вершину A проведены две плоскости: одна перпендикулярно прямой AB_1, другая перпендикулярно прямой AD_1. Через вершину C также проведены две плоскости: одна перпендикулярно прямой CB_1, другая перпендикулярно прямой CD_1. Найти объём многогранника, ограниченного этими четырьмя плоскостями и плоскостью $A_1B_1C_1D_1$.

347 (б. 12, 6). В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина бокового ребра и высота основания равны a. Через вершину A проведены две плоскости: одна перпендикулярно прямой AB_1, вторая перпендикулярно прямой AC_1. Через вершину A_1 также проведены две плоскости: одна перпендикулярно прямой A_1B, вторая перпендикулярно прямой A_1C. Найти объём многогранника, ограниченного этими четырьмя плоскостями и плоскостью BB_1C_1C.

1979 год

348 (б. 1, 5). В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AB, AC и BD прямые. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных рёбер тетраэдра, имеет длину a, а другой — длину $a\sqrt{6}$. Найти длину наибольшего ребра тетраэдра.

349 (б. 2, 5). В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при рёбрах BC и CD прямые. Длина одного из рёбер тетраэдра в три раза больше длины не пересекающегося с ним ребра. Вершина конуса совпадает с одной из вершин тетраэдра, а окружность основания конуса описана около одной из граней. Найти угол в осевом сечении конуса.

350 (б. 3, 5). В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AB, BC и CD прямые, $\angle ABC = \angle BCD = \alpha$. Радиус сферы, описанной около тетраэдра, равен R. Найти объём тетраэдра.

351 (б. 4, 5). В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AB и BD прямые, $\angle ACD = \alpha$. Вершина конуса совпадает с одной из вершин тетраэдра, окружность основания конуса вписана в одну из граней. Найти угол в осевом сечении конуса.

352 (б. 5, 6). Найти наибольшую возможную величину угла между плоскостью боковой грани и не принадлежащим ей боковым ребром правильной четырёхугольной пирамиды.

353 (б. 6, 6). Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$. Найти наибольшую возможную величину угла между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

354 (б. 7, 6). В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ найти наибольшую возможную величину угла между прямой SA и плоскостью SBC.

355 (б. 8, 6). В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найти наибольшую возможную величину угла между прямой AE_1 и плоскостью BC_1E_1F.

356 (б. 9, 6). Точка M — середина бокового ребра AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямые BD, MD_1 и A_1C попарно перпендикулярны. Найти высоту параллелепипеда, если $BD=2a$, $BC=\frac{3}{2}a$, $A_1C=4a$.

357 (б. 10, 6). Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$, точки M и N — середины рёбер SC и SD соответственно. Прямые SA, BM и CN попарно перпендикулярны. Найти объём пирамиды, если $SA=a$, $BM=b$, $CN=c$.

358 (б. 11, 6). Точка D — середина бокового ребра CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Прямые AB_1, BC и DA_1 попарно перпендикулярны. Найти высоту призмы, если $AB=BC=AB_1=a$.

359 (б. 12, 6). Точки M и N — соответственно середины рёбер AA_1 и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямые A_1C, B_1M и BN попарно перпендикулярны. Найти объём параллелепипеда, если $A_1C=a$, $B_1M=b$, $BN=c$.

1980 год

360 (б. 1, 5). Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину 4, а боковое ребро равно 3. На ребре BB_1 взята точка F, а на ребре CC_1 — точка G так, что $B_1F=1$, $CG=\frac{2}{3}$. Точки E и D — середины рёбер AC и B_1C_1 соответственно. Найти наименьшее возможное значение суммы $EP+PQ$, где точка P принадлежит отрезку A_1D, а точка Q — отрезку FG.

361 (б. 2, 5). На ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка F так, что $B_1F=\frac{1}{3}BB_1$, на ребре C_1D_1 — точка E так, что $D_1E=\frac{1}{3}C_1D_1$. Какое наибольшее значение может принимать отношение $\frac{AP}{PQ}$, где точка P лежит на луче DE, а точка Q — на прямой A_1F?

362 (б. 3, 5). Пусть $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная призма, все рёбра которой имеют длину 4. На ребре EE_1 взята точка K так, что $E_1K = \frac{1}{2}$, а на ребре FF_1 — точка L так, что $F_1L = \frac{5}{2}$. Найти наименьшее возможное значение суммы $AP + PQ$, где точка P принадлежит отрезку B_1F_1, а точка Q — отрезку KL.

363 (б. 4, 5). Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. На продолжении ребра AD за точку D выбрана точка M так, что $AM = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$. Точка E — середина ребра A_1B_1, точка F — середина ребра DD_1. Какое наибольшее значение может принимать отношение $\frac{MP}{PQ}$, где точка P лежит на отрезке AE, а точка Q — на отрезке CF?

364 (б. 5, 5). В правильном тетраэдре точки M и N являются серединами противоположных рёбер. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость, параллельную прямой MN, является четырёхугольник площади S, один из углов которого равен $60°$. Найти площадь поверхности тетраэдра.

365 (б. 6, 5). Длина стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, длина апофемы пирамиды равна $\frac{3}{2}a$. Ортогональной проекцией пирамиды на плоскость, перпендикулярную одной из боковых граней, является равнобедренная трапеция. Найти площадь этой трапеции.

366 (б. 7, 5). Ортогональной проекцией правильного тетраэдра на плоскость, параллельную одному из рёбер, является четырёхугольник площади S, у которого отношение длин наибольшей и наименьшей сторон равно $\sqrt{3}$. Найти площадь поверхности тетраэдра.

367 (б. 8, 5). Ортогональной проекцией правильной треугольной призмы на плоскость, перпендикулярную одной из боковых граней, является трапеция, у которой диагонали перпендикулярны, отношение длин оснований равно 3, а площадь равна S. Найти площадь поверхности призмы.

368 (б. 9, 4). Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен V, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 30°. Рассматриваются правильные треугольные призмы, вписанные в пирамиду так, что одно из боковых рёбер лежит на диагонали основания пирамиды, одна из боковых граней параллельна основанию пирамиды и вершины этой грани лежат на боковых гранях пирамиды. Найти:

а) объём той призмы, плоскость боковой грани которой делит высоту пирамиды в отношении $2:3$, считая от вершины;

б) наибольшее значение объёма рассматриваемых призм.

369 (б. 10, 4). Высота правильной четырёхугольной пирамиды вдвое больше диагонали её основания, объём пирамиды равен V. Рассматриваются правильные четырёхугольные призмы, вписанные в пирамиду так, что их боковые рёбра параллельны диагонали основания пирамиды, одна боковая грань принадлежит этому основанию, вершины противоположной боковой грани лежат на боковой поверхности пирамиды. Найти:

а) объём той призмы, плоскость боковой грани которой делит высоту пирамиды в отношении $4:1$, считая от вершины;

б) наибольшее значение объёма рассматриваемых призм.

370 (б. 11, 4). Высота правильной треугольной пирамиды равна высоте её основания, объём пирамиды равен V. Рассматриваются правильные треугольные призмы, вписанные в пирамиду так, что боковое ребро лежит на высоте основания, противоположная этому ребру боковая грань параллельна основанию пирамиды и вершины этой грани лежат на боковой поверхности пирамиды. Найти:

а) объём той призмы, плоскость боковой грани которой делит высоту пирамиды в отношении $3:1$, считая от вершины пирамиды;

б) наибольшее значение объёма рассматриваемых призм.

371 (б. 12, 4). Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне основания, объём пирамиды равен V. Рассматриваются правильные четырёхугольные призмы, вписанные в пирамиду так, что одна из боковых граней принадлежит основанию пирамиды, а вершины противоположной боковой грани лежат на боковой поверхности пирамиды. Найти:

а) объём той призмы, плоскость боковой грани которой делит высоту пирамиды в отношении $5:3$, считая от вершины пирамиды;

б) наибольшее значение объёма рассматриваемых призм.

1981 год

372 (б. 1, 5). Точка D — середина ребра A_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Правильная треугольная пирамида $SMNP$ расположена так, что плоскость её основания совпадает с плоскостью ABC, вершина M лежит на продолжении AC, причём $CM = \frac{1}{2}AC$, ребро SN проходит через точку D, а ребро SP пересекает отрезок BB_1. В каком отношении отрезок BB_1 делится точкой пересечения?

373 (б. 2, 5). Точка E — середина ребра MQ правильной четырёхугольной пирамиды $SMNPQ$. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен так, что плоскость грани $ABCD$ совпадает с плоскостью $MNPQ$, вершина B_1 лежит на ребре SN, точка E лежит на прямой AB, причём $EA = AB$, прямая SP пересекает ребро CC_1. В каком отношении отрезок CC_1 делится точкой пересечения?

374 (б. 3, 5). Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой точка D — середина ребра A_1C_1. Правильная треугольная пирамида расположена так, что плоскость её основания совпадает с плоскостью ABC, одно боковое ребро проходит через вершину B, другое — через точку D, а третье пересекает ребро CC_1. Найти отношение объёма пирамиды к объёму призмы.

375 (б. 4, 5). Плоскость основания правильной четырёхугольной пирамиды $SMNPQ$ совпадает с плоскостью грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вершина A лежит на ребре MQ и делит его пополам, вершина B_1 лежит на апофеме грани SMN, а ребро SP пересекает прямую CC_1. Найти отношение объёма пирамиды к объёму куба.

376 (б. 5, 4). Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки E и F — середины рёбер BB_1 и CC_1 соответственно. Рассматриваются треугольники, вершинами которых служат точки пересечения плоскостей, параллельных основаниям куба, с прямыми AC_1, CE, DF. Найти:

а) площадь того треугольника, плоскость которого проходит через середину отрезка CF;

б) наименьшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

377 (б. 6, 4). Площадь основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна S. Точки D и E — середины рёбер BC и A_1B_1 соответственно. Рассматриваются треугольники, вершинами которых служат точки пересечения плоскостей, параллельных основаниям призмы, с прямыми A_1B, AC_1, DE. Найти:

а) площадь того треугольника, плоскость которого проходит через середину ребра AA_1;

б) наименьшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

378 (б. 7, 4). Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки E и F — середины рёбер BC и CC_1 соответственно. Рассматриваются треугольники, вершинами которых служат точки пересечения плоскостей, параллельных основаниям куба, с прямыми A_1E, DF, AD_1. Найти:

а) площадь того треугольника, плоскость которого проходит через середину ребра AA_1;

б) наименьшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

379 (б. 8, 4). Площадь основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна S. Точка D — середина ребра B_1C_1. Рассматриваются треугольники, вершинами которых служат точки пересечения плоскостей, параллельных основаниям призмы, с прямыми AD, BC_1, CA_1. Найти:

а) площадь того треугольника, плоскость которого проходит через середину ребра AA_1;

б) наименьшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников,

380 (б. 9, 5). Основаниями усечённой пирамиды являются правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ со сторонами длины 3 и 2 соответственно. Отрезок, соединяющий вершину C_1 с центром O основания ABC, перпендикулярен основаниям; $C_1O = 3$. Через вершину B и середины M и N рёбер A_1B_1 и B_1C_1 проведена плоскость. Рассматриваются цилиндры, расположенные внутри многогранника $ABCA_1MNC_1$, с основанием в грани A_1MNC_1. Найти:

а) наибольшее значение объёма таких цилиндров с данной высотой h;

б) наибольшее значение объёма среди всех рассматриваемых цилиндров.

381 (б. 10, 5). В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковым ребром длины 8 лежит трапеция с основаниями $AD = 12$, $BC = 7$; $\angle B_1BC = 60^\circ$. Отрезок, соединяющий вершину B с центром O грани AA_1D_1D, перпендикулярен ей; $BO = 9$. Рассматриваются цилиндры, расположенные внутри призмы, с основанием в грани BB_1C_1C. Найти:

а) наибольшее значение объёма таких цилиндров с данной высотой h;

б) наибольшее значение объёма среди всех рассматриваемых цилиндров.

382 (б. 11, 5). Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$, основаниями которой служат прямоугольные треугольники. Плоскость, проведённая через вершину C_1, пересекает гипотенузу AC основания в точке M, а катет BC — в точке N, причём $MN \parallel AB$, $B_1N \perp ABC$. Известно, что $A_1B_1 = 3$, $B_1C_1 = 4$, $BN = 6$, $NC = 2$, $B_1N = 9$. Рассматриваются цилиндры, расположенные внутри многогранника $AMNBB_1A_1C_1$, с основанием в грани $AMNB$. Найти:

а) наибольшее значение объёма таких цилиндров с данной высотой h;

б) наибольшее значение объёма среди всех рассматриваемых цилиндров.

383 (б. 12, 5). В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковым ребром длины 5 лежит трапеция с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$; $\angle B_1BC = 60°$. Отрезок, соединяющий вершину A_1 с серединой O ребра BC, перпендикулярен грани AA_1D_1D; $A_1O = 4$. Рассматриваются цилиндры, расположенные внутри призмы, с основанием в грани AA_1D_1D. Найти:

а) наибольшее значение объёма таких цилиндров с данной высотой h;

б) наибольшее значение объёма среди всех рассматриваемых цилиндров.

1982 год

384 (б. 1, 5). В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина бокового ребра равна 3. Точка M — середина ребра AC, точка N лежит на ребре B_1C_1, а точка P принадлежит грани AA_1B_1B и удалена от плоскости ABC на расстояние 1. Известно, что угол в 30° образуют: прямые PM и PN — с плоскостью AA_1B_1B, прямая PN — с плоскостью BB_1C_1C. Найти объём призмы.

385 (б. 2, 5). Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$, ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Точка M — середина ребра AD, точка N лежит на ребре SC. Известно, что углы, образованные прямой MN с плоскостью SAB, прямой MN с плоскостью SCD и прямой BN с плоскостью SAD, равны. Найти величину этих углов.

386 (б. 3, 5). В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна a. Точка P лежит на ребре AC и $AP = \frac{a}{3}$, точка N лежит на ребре B_1C_1, а точка M принадлежит грани AA_1B_1B, причём расстояние от точки M до плоскости ABC втрое меньше высоты призмы. Известно, что угол в $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{5}$ образуют: прямые MN и MP — с плоскостью AA_1B_1B, прямая MN — с плоскостью BB_1C_1C. Найти MN.

387 (б. 4, 5). В правильной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) величина двугранного угла при основании равна 30°. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Точка E лежит на ребре AB, точка F — на ребре SC. Известно, что углы, образованные прямой EF с плоскостью SMP, прямой EF с плоскостью SBA и прямой DF с плоскостью SNQ, равны. Найти величину этих углов.

388 (б. 5, 5). Две сферы радиуса R касаются друг друга. Через точку M проведены две прямые, касающиеся данных сфер. Первая прямая касается сфер в точках A и B, вторая — в точках C и D, точки A и C лежат на одной сфере. Известно, что $\angle BMD = 60^\circ$, $AB = 3CD$ и $MB > MA$. Найти CD.

389 (б. 6, 5). Сферы с центрами в точках O_1 и O_2 касаются друг друга; их радиусы равны 3 и 1 соответственно. Через точку M, удалённую от O_2 на расстояние 3, проведены две прямые, каждая из которых касается обеих сфер, причём точки касания лежат на прямых по одну сторону от точки M. Найти угол между касательными, если известно, что одна из них образует с прямой O_1O_2 угол 45°.

390 (б. 7, 5). Две сферы равных радиусов касаются друг друга. Через точку M проведены две прямые, касающиеся данных сфер. Первая прямая касается сфер в точках A и B, вторая — в точках C и D, точки A и C лежат на одной сфере. Известно, что $AB = 6$, $CD = 2$, $\angle BMD = 60^\circ$ и $MB > MA$. Найти радиусы сфер.

391 (б. 8, 5). Сферы с центрами в точках O_1 и O_2 касаются друг друга; их радиусы равны 3 и 2 соответственно. Через точку M, удалённую от O_2 на расстояние $2\sqrt{5}$, проведены две прямые, каждая из которых касается обеих сфер, причём точки касания лежат на прямых по одну сторону от точки M. Найти угол между касательными, если известно, что одна из них образует с прямой O_1O_2 угол $\arccos \frac{4}{5}$.

392 (б. 9, 5). В правильной пирамиде $SABC$ (S — вершина) точка E — середина апофемы грани SBC, а точки F, L и M лежат на рёбрах AB, AC и SC соответственно, причём $AL = \frac{1}{10}AC$. Известно, что $EFLM$ — равнобедренная трапеция и длина её основания EF равна $\sqrt{7}$. Найти объём пирамиды.

393 (б. 10, 5). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) длина стороны основания равна 2. Точка F — середина ребра AD. Вершины L и N ромба $FLMN$ лежат на рёбрах SC и AB соответственно, $LN = \sqrt{3}$, а отрезок NM пересекает ребро SB. Найти объём пирамиды.

394 (б. 11, 5). В пирамиде $SABCD$ основанием является трапеция $ABCD$, у которой $AB = BC = CD$ и $\angle BAD = 60^\circ$. Середина ребра BC является основанием высоты пирамиды, опущенной из вершины S. Точки E, F, L и M лежат на рёбрах SC, AD, AB и SB соответственно, причём $SE = EC$, $BL = \frac{1}{7}AB$. Известно, что $EFLM$ — равнобедренная трапеция и длина её основания EF равна $\sqrt{11}$. Найти объём пирамиды.

395 (б. 12, 5). В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (S — вершина) длина стороны основания равна 2. Вершины K и M ромба $KLMF$ лежат на рёбрах AB и SD соответственно, $KM = 3$, а отрезок KL пересекает ребро SB. Найти объём пирамиды.

1983 год

396 (б. 1, 5). На ребре SB пирамиды $SABC$ выбраны точки D и E так, что $SD = DE = 1$, $BE = 2$. Сечения пирамиды плоскостями, перпендикулярными ребру SB и проходящими через точки D и E, имеют площади 5 и 16 соответственно, причём первое из этих сечений — треугольник, одна из вершин которого делит ребро SA в отношении $2:1$, считая от вершины S. Найти объём пирамиды.

397 (б. 2, 5). В пирамиде $SABCD$, основанием которой является параллелограмм $ABCD$, проведены два сечения параллельными плоскостями. Первая плоскость параллельна прямой BD, проходит через середину ребра SC и пересекает ребро SA в точке E такой, что $SE = \frac{1}{6}SA$. Найти отношение объёмов частей, на которые делит пирамиду второе сечение, если его площадь в 6 раз больше площади первого сечения.

398 (б. 3, 5). На ребре SA пирамиды $SABC$ выбраны точки D и E так, что $SD = 1$, $DE = EA = 2$. Сечения пирамиды плоскостями, перпендикулярными ребру SA и проходящими через точки D и E, имеют площади 3 и 23 соответственно, причём первое из этих сечений — треугольник, одна из вершин которого делит ребро SC в отношении $2:3$, считая от точки S. Найти объём пирамиды.

399 (б. 4, 5). В пирамиде $SABCD$, основанием которой является параллелограмм $ABCD$, проведены два сечения параллельными плоскостями. Первая плоскость параллельна прямой AC и пересекает ребро SD в точке E, а ребро SB — в точке F, причём $SE = \frac{1}{5}SD$, $SF = \frac{1}{10}SB$. Найти отношение объёмов частей, на которые делит пирамиду второе сечение, если его площадь в 30 раз больше площади первого сечения.

400 (б. 5, 4). Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, длина стороны основания которой равна a, длина бокового ребра равна $\frac{a}{2}$. Точка D является ортогональной проекцией середины ребра A_1C_1 на плоскость AB_1C, а точка E — ортогональной проекцией точки D на плоскость AA_1B_1B. Найти объём пирамиды A_1B_1DE.

401 (б. 6, 4). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ с углом $A = 60°$, все рёбра призмы имеют длину a. Точка K является ортогональной проекцией точки B_1 на плоскость DA_1C_1, а точка L — ортогональной проекцией точки K на плоскость DD_1C_1C. Найти объём пирамиды $DCLK$.

402 (б. 7, 4). Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Точка M является ортогональной проекцией вершины B на плоскость AB_1C, а точка N — ортогональной проекцией точки M на плоскость CC_1B_1B. Найти объём пирамиды $BMNC$.

403 (б. 8, 4). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ с углом $A = 60°$. Длина стороны основания призмы равна a, длина бокового ребра равна $\sqrt{3}a$. Точка E является ортогональной проекцией вершины C, на плоскость AB_1D_1, а точка F — ортогональной проекцией точки E на плоскость AA_1D_1D. Найти объём пирамиды $ADEF$.

404 (б. 9, 5). Объём правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен V. Точка N — центр грани BB_1C_1C. Вторая призма симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой AN, и объём общей части этих призм равен $\frac{2}{5}V$. Найти отношение $AA_1 : AB$, если известно, что $AA_1 < \sqrt{3}AB$.

405 (б. 10, 5). Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a, а боковое ребро — длину $\frac{9}{8}a$.

Точка E – середина ребра AB, точка M лежит на отрезке EC, и $EM = \frac{1}{4}EC$. Вторая призма симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой MC_1. Найти объём общей части этих призм.

406 (б. 11, 5). Объём правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен V. Точка D – середина ребра AB, точка E – середина ребра A_1B_1. На отрезке DE взята точка M так, что $DM = 3ME$. Вторая призма симметрична исходной относительно прямой MC_1, и объём общей части этих призм равен $\frac{2}{9}V$. Найти отношение $AA_1 : AB$, если известно, что $AA_1 < 2\sqrt{3}AB$.

407 (б. 12, 5). Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a, а боковое ребро – длину $\frac{5}{4}a$. Точка D – середина ребра A_1C_1, а точка M лежит на отрезке DB_1, и $DM = \frac{1}{6}DB_1$. Вторая призма симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой BM. Найти объём общей части этих призм.

1984 год

408 (б. 1, 5). Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина). Сфера касается плоскости её основания и всех боковых рёбер. Найти объём пирамиды, если радиус сферы равен R, а $\angle SAB = \alpha$.

Плоскость проходит через точку S, касается указанной сферы и пересекает прямые BE и AD соответственно в точках M и N ($EM > BM$, $AN > DN$). Найти:

а) отношение $DN : AD$, если $BM = DN$;

б) отношение $DN : AD$, если $BM : BE = 3 : 22$.

409 (б. 2, 5). В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, в котором $AB = BD$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба. В пирамиду вписана сфера. Найти объём пирамиды, если радиус сферы равен R, а $\angle SBC = \alpha$.

Плоскость проходит через точку S, касается указанной сферы и пересекает отрезки AB и BC в точках M и N соответственно. Найти:

а) отношение $BN:NC$, если $BN=BM$;

б) отношение $BN:NC$, если $7BM=AB$.

410 (б. 3, 5). В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AC=2AB$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей прямоугольника. Сфера касается плоскости $ABCD$ и всех боковых рёбер пирамиды. Найти объём пирамиды, если радиус сферы равен R, а $\angle SCD=\alpha$.

Плоскость проходит через точку S, касается указанной сферы и пересекает прямые BD и AC соответственно в точках P и Q ($DP>BP$, $AQ>CQ$). Найти:

а) отношение $BP:BD$, если $BP=CQ$;

б) отношение $BP:BD$, если $CQ=3AC$.

411 (б. 4, 5). В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, в котором $AB=AC$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба. В пирамиду вписана сфера. Найти объём пирамиды, если радиус сферы равен R, а $\angle SBA=\alpha$.

Плоскость проходит через точку S, касается указанной сферы и пересекает отрезки AB и BC соответственно в точках P и Q. Найти:

а) отношение $BQ:QC$, если $BP=BQ$;

б) отношение $BQ:QC$, если $4BP=AB$.

412 (б. 5, 5). В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=1$, $BC=3$. Высота пирамиды проходит через точку O пересечения диагоналей прямоугольника. Точка E — середина ребра BC, точка F лежит на ребре SA, причём $SF:FA=1:7$, $EF=\frac{7\sqrt{2}}{16}$. Найти объём пирамиды.

Из всех плоскостей, проходящих через прямую EF, выбрана та плоскость P, проекция на которую отрезка SO имеет минимальную длину. В каком отношении плоскость P делит отрезок AC?

413 (б. 6, 5). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$; в основании её лежит ромб $ABCD$, в котором $AC=4$, $BD=2$. Точки M и N лежат на рёбрах AD и B_1C_1 соответственно, причём $AM:MD=C_1N:NB_1=3:2$, $MN=\sqrt{5}$. Найти объём призмы.

Из всех плоскостей, проходящих через прямую MN, выбрана та плоскость P, проекция на которую отрезка AA_1 имеет минимальную длину. В каком отношении плоскость P делит отрезок AC?

414 (б. 7, 5). В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=2$, $BC=1$. Высота пирамиды проходит через точку E пересечения диагоналей прямоугольника. Точка H — середина ребра CD, точка K лежит на ребре SB, причём $SK:KB=1:2$, $KH=1$. Найти объём пирамиды.

Из всех плоскостей, проходящих через прямую KH, выбрана та плоскость P, проекция на которую отрезка SE имеет минимальную длину. В каком отношении плоскость P делит отрезок BD?

415 (б. 8, 5). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$; в основании её лежит ромб $ABCD$, в котором $AC=2$, $BD=6$. Точки K и F лежат на рёбрах CD и A_1B_1 соответственно, причём $DK:KC=B_1F:FA_1=4:1$, $KF=\sqrt{5}$. Найти объём призмы.

Из всех плоскостей, проходящих через прямую KF, выбрана та плоскость P, проекция на которую отрезка DD_1 имеет минимальную длину. В каком отношении плоскость P делит отрезок BD?

416 (б. 9, 5). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $SA=4$) точка D лежит на ребре SC, $CD=3$, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найти объём пирамиды.

Дана сфера радиуса 1 с центром в точке A. Рассматриваются всевозможные правильные тетраэдры $MNPQ$ такие, что точки M и N лежат на прямой BD, а прямая PQ касается сферы в одной из точек отрезка PQ. Найти наименьшее значение длины ребра рассматриваемых тетраэдров.

417 (б. 10, 5). В правильной пирамиде $SMNPQ$ (S — вершина) точки H и F — середины рёбер MN и NP соответственно, точка E лежит на отрезке SH, причём $SH = 3$, $SE = \frac{9}{4}$. Расстояние от точки S до прямой EF равно $\sqrt{5}$. Найти объём пирамиды.

Дана сфера радиуса 1 с центром в точке S. Рассматриваются всевозможные правильные тетраэдры $ABCD$ такие, что точки C и D лежат на прямой EF, а прямая AB касается сферы в одной из точек отрезка AB. Найти наименьшее значение длины ребра рассматриваемых тетраэдров.

418 (б. 11, 5). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $SA = 2$) точка D — середина ребра SB. Расстояние от точки C до прямой AD равно $\sqrt{\frac{5}{6}}$. Найти объём пирамиды.

Дана сфера радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$ с центром в точке C. Рассматриваются всевозможные правильные тетраэдры $MNPQ$ такие, что точки P и Q лежат на прямой AD, а прямая MN касается сферы в одной из точек отрезка MN. Найти наименьшее значение длины ребра рассматриваемых тетраэдров.

419 (б. 12, 5). В правильной пирамиде $SMNPQ$ (S — вершина) точки K и F — середины рёбер PQ и QM соответственно, точка E лежит на отрезке SK, причём $SK = 4$, $SE = \frac{8}{3}$. Расстояние от точки S до прямой EF равно $\sqrt{7}$. Найти объём пирамиды.

Дана сфера радиуса 1 с центром в точке S. Рассматриваются всевозможные правильные тетраэдры $ABCD$ такие, что точки A и B лежат на прямой EF, а прямая CD касается сферы в одной из точек отрезка CD. Найти наименьшее значение длины ребра рассматриваемых тетраэдров.

1985 год

420 (б. 1, 5). Точка F лежит на ребре AD правильной четырёхугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина), $AF : AD = 1 : 10$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAB и SAD, одно из оснований цилиндра проходит через точку F, второе основание имеет общую точку с ребром SD. Боковая поверхность цилиндра имеет с высотой SH пирамиды общую точку O, причём $SO = OH$. Найти отношение объёмов цилиндра и пирамиды.

421 (б. 2, 5). Точка E лежит на ребре AB правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина), $AE : EB = 1 : 4$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAB и SAC, одно из оснований цилиндра проходит через точку E, второе основание имеет общую точку с ребром SB. Боковая поверхность цилиндра имеет единственную общую точку с ребром BC. Найти отношение объёмов цилиндра и пирамиды.

422 (б. 3, 5). Точка M лежит на ребре DC правильной четырёхугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина), $DM : DC = 1 : 15$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAD и SCD, одно из оснований цилиндра проходит через точку M, второе основание имеет общую точку с ребром SC. Боковая поверхность цилиндра имеет с высотой SH пирамиды общую точку O, причём $SO : SH = 1 : 3$. Найти отношение объёмов цилиндра и пирамиды.

423 (б. 4, 5). Точка D лежит на ребре BC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина), $BD : DC = 2 : 3$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAB и SBC, одно из оснований цилиндра проходит через точку D, второе основание имеет общую точку с ребром SC. Боковая поверхность цилиндра имеет единственную общую точку с ребром AC. Найти отношение объёмов цилиндра и пирамиды.

424 (б. 5, 5). В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1 вписана сфера. Точка F расположена на продолжении ребра BB_1 за точку B_1, причём $FB_1 = \frac{1}{6}$. Из точки F проведена касательная к сфере, пересекающая грань куба CC_1D_1D в точке E так, что $\angle EFB_1 = \arccos\frac{2}{7}$. Найти EF.

425 (б. 6, 5). В правильную четырёхугольную пирамиду $SABC$ (S — вершина) вписана сфера. Длина ребра основания пирамиды равна 6, а длина высоты пирамиды равна 4. Точка E выбрана на ребре SC, причём $SE = \frac{1}{4}SC$, а точка F является ортогональной проекцией точки E на плоскость $ABCD$. Через точку E проведена касательная к сфере, пересекающая плоскость BSD в точке P так, что $\angle PEF = \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Найти PE.

426 (б. 7, 5). В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1 вписана сфера. Точка E расположена на ребре C_1C, причём $C_1E = \frac{1}{8}$. Из точки E проведена касательная к сфере, пересекающая грань куба AA_1D_1D в точке K так, что $\angle KEC = \arccos\frac{1}{7}$. Найти KE.

427 (б. 8, 5). В правильную четырёхугольную пирамиду $SABCD$ (S — вершина) вписана сфера. Длина ребра основания пирамиды равна 8, а длина высоты пирамиды равна 3. Точка M — середина ребра SD, точка K является ортогональной проекцией точки M на плоскость $ABCD$. Через точку M проведена касательная к сфере, пересекающая плоскость ASC в точке N так, что $\angle NMK = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Найти MN.

428 (б. 9, 5). Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого есть ортогональная проекция вершины S на плоскость $ABCD$. Точки E и F выбраны на рёбрах BS и BC соответственно так, что $BE=\frac{1}{4}BS$, $BF=\frac{1}{3}BC$. Точки P и Q расположены на прямых AE и SF так, что прямая PQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3, $PQ=12$. Найти объём пирамиды.

429 (б. 10, 5). Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина). Точки M и N выбраны на рёбрах SC и AB соответственно так, что $CM=\frac{1}{3}SC$, $BN=\frac{1}{2}AB$. Точки K и L расположены на прямых DM и SN так, что прямая KL перпендикулярна плоскости ASD. Длина высоты пирамиды равна 8, $KL=3$. Найти объём пирамиды.

430 (б. 11, 5). Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого есть ортогональная проекция вершины S на плоскость $ABCD$. Точки P и Q выбраны на рёбрах DS и AD соответственно так, что $DP=\frac{1}{5}DS$, $DQ=\frac{1}{4}AD$. Точки N и M расположены на прямых CP и SQ так, что прямая NM перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 6, $NM=8$. Найти объём пирамиды.

431 (б. 12, 5). Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина). Точки K и L выбраны на рёбрах ES и AF соответственно так, что $EK=\frac{1}{5}ES$, $FL=\frac{1}{2}FA$. Точки R и T расположены на прямых DK и SL так, что прямая RT перпендикулярна плоскости SAD. Длина высоты пирамиды равна 18, $RT=4$. Найти объём пирамиды.

1986 год

432 (б. 1, 4). Длина высоты правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) в $\sqrt{3}$ раз больше длины ребра основания. Точка E — середина апофемы грани ASB. Найти угол между прямой DE и плоскостью ASC.

433 (б. 2, 4). Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки E и G — середины отрезков A_1B_1 и DC_1 соответственно, точка F лежит на отрезке BE, причём $3BF = BE$. Найти угол между прямой FG и плоскостью AA_1C_1, если известно, что $AB = AD$, $AA_1 = \sqrt{\frac{8}{3}}AB$.

434 (б. 3, 4). Длина высоты правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) в $\frac{5}{\sqrt{6}}$ раз больше длины ребра основания. Точка D — середина апофемы грани ASC. Найти угол между прямой BD и плоскостью, проходящей через ребро SC и середину ребра AB.

435 (б. 4, 4). Длина высоты правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в 4 раза больше длины ребра основания. Точка D — середина ребра A_1B_1, точки E и F расположены на отрезках AD и CB_1 соответственно, причём $AE = \frac{1}{2}AD$, $CF = \frac{1}{4}CB_1$. Найти угол между прямой EF и плоскостью, проходящей через ребро BB_1 и середину ребра AC.

436 (б. 5, 5). Длина ребра основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) равна 10. Точки E и F расположены на рёбрах DC и BC соответственно, причём $CE = 6$, $CF = 9$. Известно, что для данной пирамиды существует единственный конус, вершина которого совпадает с точкой E, центр основания лежит на прямой SA, а отрезок EF является одной из образующих. Найти объём этого конуса.

437 (б. 6, 5). Длина ребра основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) равна 8. Точки K и L расположены на рёбрах AB и AC соответственно, причём $AK = 7$, $AL = 4$. Известно, что для данной пирамиды существует единственный конус, вершина которого совпадает с точкой K, центр основания лежит на прямой SC, а отрезок KL является одной из образующих. Найти объём этого конуса.

438 (б. 7, 5). Длина ребра основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) равна 4. Точки E и F расположены на рёбрах CB и AD соответственно, причём $CE = 3$, $AF = 2$. Известно, что для данной пирамиды существует единственный конус, вершина которого совпадает с точкой F, центр основания лежит на прямой SD, а отрезок EF является одной из образующих. Найти объём этого конуса.

439 (б. 8, 5). Длина ребра основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) равна 3. Точки K и L расположены на рёбрах AC и BC соответственно, причём $CK = \frac{3}{2}$, $BL = 1$. Известно, что для данной пирамиды существует единственный конус, вершина которого совпадает с точкой K, центр основания лежит на прямой SB, а отрезок KL является одной из образующих. Найти объём этого конуса.

440 (б. 9, 5). В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (S — вершина) длина ребра основания равна $2\sqrt{3}$, а длина высоты пирамиды SH равна 6. Через точку E перпендикулярно к прямой AS проходит плоскость, которая пересекает отрезок SH в точке O. Точки P и Q расположены на прямых AS и CE соответственно так, что прямая PQ касается сферы радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ с центром в точке O. Найти наименьшую длину отрезка PQ.

441 (б. 10, 5). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) длина ребра основания равна $4\sqrt{2}$, а длина высоты пирамиды SH равна 8. SE — апофема грани ASD. Через точку C перпендикулярно к прямой SE проходит плоскость, которая пересекает отрезок SH

в точке O. Точки P и Q расположены на прямых SE и CB соответственно так, что прямая PQ касается сферы радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке O. Найти наименьшую длину отрезка PQ.

442 (б. 11, 5). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) длина ребра основания равна 6, а длина высоты пирамиды SH равна $\sqrt{15}$. Через точку B перпендикулярно к прямой AS проходит плоскость, которая пересекает отрезок SH в точке O. Точки P и Q расположены на прямых AS и CB соответственно так, что прямая PQ касается сферы радиуса $\sqrt{\frac{2}{5}}$ с центром в точке O. Найти наименьшую длину отрезка PQ.

443 (б. 12, 5). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) длина ребра основания равна $8\sqrt{3}$, а длина высоты пирамиды SH равна 8. Точки E и F — середины рёбер AB и AD соответственно. Через точку F перпендикулярно к прямой SC проходит плоскость, пересекающая высоту SH в точке O. Точки P и Q расположены на прямых SC и EF соответственно так, что прямая PQ касается сферы радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке O. Найти наименьшую длину отрезка PQ.

1987 год

444 (б. 1, 5). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) точка P — середина апофемы SD грани SBC. На ребре AB взята точка M так, что $MB : AB = 2 : 7$. Сфера, центр которой лежит на прямой MP, проходит через точки A, C и пересекает прямую BC в точке Q так, что $CQ = m$. Найти объём пирамиды $SABC$, если известно, что радиус сферы равен $\frac{m}{\sqrt{3}}$.

445 (б. 2, 5). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $SA = 2AB$. Перпендикуляр, опущенный из точки B на ребро SD, пересекает его в точке K. На апофеме SF грани SAB взята точка M так, что $SM : SF = 4 : 5$. Сфера с центром на прямой MK проходит через точки B, K и пересекает прямую AB в точке P, причём $BP = d$. Найти длину отрезка AB.

446 (б. 3, 5). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) на ребре AC взята точка L так, что $LC : AC = 4 : 5$. Медианы грани SAB пересекаются в точке K. Сфера, центр которой лежит на прямой KL, проходит через точки B, C и пересекает прямую AB в точке P так, что $BP = b$. Найти объём пирамиды $SABC$, если известно, что радиус сферы равен b.

447 (б. 4, 5). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) точка F — середина ребра SB, а $SA = \sqrt{2}AB$. На апофеме SL грани SAD взята точка P так, что $SP : SL = 7 : 12$. Сфера с центром на прямой PF проходит через точки D, F и пересекает прямую AD в точке M, причём $MD = l$. Найти длину отрезка AB.

448 (б. 5, 5). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) $AB = 4$, длина высоты SO пирамиды равна $\sqrt{\dfrac{11}{3}}$. Точка D лежит на отрезке SO, причём $SO : DO = 2 : 9$. Цилиндр, ось которого параллельна прямой SA, расположен так, что точка D — центр его верхнего основания, а точка O лежит на окружности нижнего основания. Найти площадь части верхнего основания цилиндра, лежащей внутри пирамиды.

449 (б. 6, 5). В основании пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AD = 1$, $BC = \dfrac{1}{2}$, угол BAD равен $\operatorname{arctg} 6$. Высота пирамиды проходит через точку O пересечения диагоналей трапеции. Точка E лежит на отрезке SO, причём $SE : SO = 1 : 4$. Цилиндр, ось которого параллельна апофеме SM грани SAD ($SM = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$), расположен так, что точка E является центром его верхнего основания, а точка O лежит на окружности нижнего основания. Найти площадь части верхнего основания цилиндра, лежащей внутри пирамиды.

450 (б. 7, 5). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) $SA = \frac{9}{4}$, $AB = 3$. Точка E лежит на высоте пирамиды SO, причём $SE : SO = 2 : 11$. Цилиндр, ось которого параллельна прямой SB, расположен так, что точка E — центр его верхнего основания, а точка O лежит на окружности нижнего основания. Найти площадь части верхнего основания цилиндра, лежащей внутри пирамиды.

451 (б. 8, 5). В основании пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AD = 2$, $BC = 1$, высота трапеции равна 3. Высота пирамиды проходит через точку O пересечения диагоналей трапеции, $SO = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Точка F лежит на отрезке SO, причём $SF : FO = 1 : 3$. Цилиндр, ось которого параллельна апофеме грани SAD, расположен так, что точка F является центром его верхнего основания, а точка O лежит на окружности нижнего основания. Найти площадь части верхнего основания цилиндра, лежащей внутри пирамиды.

1988 год

452 (б. 1, 5). На продолжении за точку A_1 ребра AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (ABC — основание) взята точка M. Через точку M и точку K — середину ребра BC — проведена плоскость α, пересекающая ребро AC в точке K_1 так, что угол KK_1M равен $\operatorname{arctg}\sqrt{55}$. Известно, что сечение призмы плоскостью α — пятиугольник $KK_1K_2K_3K_4$, у которого $K_1K_2 = \frac{7}{2}$, $KK_1 = \frac{\sqrt{14}}{2}$, $K_2K_3 = \frac{3}{8}\sqrt{14}$. Найти объём призмы.

453 (б. 2, 5). В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. Через точку K — середину гипотенузы AB треугольника ABC — проведена плоскость β, пересекающая рёбра BC

и CC_1 в точках K_1 и K_2 соответственно. Известно, что сечение призмы плоскостью β — пятиугольник $KK_1K_2K_3K_4$, у которого $\angle K_1KK_4 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $KK_4 = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $K_3K_4 = \frac{35}{6}$, $KK_1 = 5$. Найти объём призмы.

454 (б. 3, 5). На продолжении за точку B_1 ребра BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (ABC — основание) взята точка K. Через точку K и точку D — середину ребра AC — проведена плоскость α, пересекающая ребро AB в точке D_1 так, что угол DD_1K равен $\operatorname{arctg}\sqrt{51}$. Известно, что сечение призмы плоскостью α — пятиугольник $DD_1D_2D_3D_4$, у которого $D_1D_2 = \frac{4}{5}\sqrt{13}$, $DD_1 = 1$, $D_2D_3 = \frac{3}{5}$. Найти объём призмы.

455 (б. 4, 5). В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. Через точку D — середину гипотенузы AB треугольника ABC — проведена плоскость β, пересекающая рёбра BC и CC_1 в точках D_1 и D_2 соответственно. Известно, что сечение призмы плоскостью β — пятиугольник $DD_1D_2D_3D_4$, у которого $\angle D_1DD_4 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{1}}{10}\right)$, $DD_4 = 5$, $D_3D_4 = 2\sqrt{10}$, $DD_1 = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$. Найти объём призмы.

456 (б. 5, 5). В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой, угол ABC равен $\operatorname{arctg} 2$, $AB = AD$. Квадрат $KLMN$ расположен в пространстве так, что его центр совпадает с серединой отрезка AB. Точка A лежит на стороне LK и $AL < AK$, точка M равноудалена от точек A и D. Расстояние от L до ближайшей к ней точки трапеции $ABCD$ равно $\frac{3}{2}$, а расстояние от N до ближайшей к ней точки трапеции $ABCD$ равно $\sqrt{6}$. Найти площадь трапеции $ABCD$ и расстояние от точки M до плоскости $ABCD$.

457 (б. 6, 5). Два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ расположены в пространстве так, что центр квадрата $KLMN$ совпадает с серединой стороны BC. Точка B лежит на стороне LM и

$BM < BL$, точка N равноудалена от точек C и D. Расстояние от M до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно $\sqrt{10}$, а расстояние от K до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно $\sqrt{6}$. Найти длины сторон квадратов $ABCD$ и $KLMN$ и расстояние от точки N до плоскости $ABCD$.

458 (б. 7, 5). В трапеции $ABCD$ угол ADC прямой, угол BAD равен $\operatorname{arctg} 3$, $AD = CD$. Квадрат $KLMN$ расположен в пространстве так, что его центр совпадает с серединой отрезка AD. Точка D лежит на стороне LK и $DL < DK$, точка M равноудалена от точек C и D. Расстояние от L до ближайшей к ней точки трапеции $ABCD$ равно 2, а расстояние от N до ближайшей к ней точки трапеции $ABCD$ равно 3. Найти площадь трапеции $ABCD$ и расстояние от точки M до плоскости $ABCD$.

459 (б. 8, 5). Два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ расположены в пространстве так, что центр квадрата $KLMN$ совпадает с серединой стороны AB. Точка A лежит на стороне LM и $AM < AL$, точка N равноудалена от точек B и C. Расстояние от M до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно $2\sqrt{3}$, а расстояние от K до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно 5. Найти длины сторон квадратов $ABCD$ и $KLMN$ и расстояние от точки N до плоскости $ABCD$.

1989 год

460 (б. 1, 5). Сфера радиуса 13 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и AA_1B_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вторая сфера радиуса 5 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D куба и касается первой сферы. На ребре BC взята точка F, на продолжении ребра DC за точку C — точка E так, что $CE = CD$. Плоскость C_1EF пересекает первую сферу по окружности, радиус которой в 2,6 раза больше радиуса окружности, по которой эта плоскость пересекает вторую сферу. Найти отношение $BF : FC$.

461 (б. 2, 5). Сфера радиуса 13 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и AA_1B_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вторая сфера радиуса 5 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D куба и касается первой сферы. На ребре AA_1 взята точка L, на ребре DD_1 — точка K так, что $DK : KD_1 = 1 : 10$. Плоскость C_1KL пересекает первую сферу по окружности, радиус которой в 2,6 раза больше радиуса окружности, по которой эта плоскость пересекает вторую сферу. Найти отношение $AL : LA_1$.

462 (б. 3, 5). Сфера радиуса 17 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и AA_1B_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вторая сфера радиуса 5 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D куба и касается первой сферы. На ребре A_1D_1 взята точка L, на продолжении ребра DD_1 за точку D_1 — точка K так, что $D_1K = D_1D$. Плоскость B_1KL пересекает первую сферу по окружности, радиус которой в 3,4 раза больше радиуса окружности, по которой эта плоскость пересекает вторую сферу. Найти отношение $A_1L : LD_1$.

463 (б. 4, 5). Сфера радиуса 17 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и AA_1B_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вторая сфера радиуса 5 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D куба и касается первой сферы. На ребре AA_1 взята точка F, на ребре DD_1 — точка E так, что $DE : ED_1 = 1 : 50$. Плоскость C_1EF пересекает первую сферу по окружности, радиус которой в 3,4 раза больше радиуса окружности, по которой эта плоскость пересекает вторую сферу. Найти отношение $AF : FA_1$.

464 (б. 5, 4). Точка D является серединой ребра BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. На боковой грани AA_1C_1C взята точка E, на основании ABC — точка F так, что прямые EB_1 и FD параллельны. Какой наибольший объём может иметь призма $ABCA_1B_1C_1$, если $EB_1 = 1$, $FD = \dfrac{3}{4}$, $EF = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$?

465 (б. 6, 4). Точка K является серединой ребра AA_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На боковой грани DD_1C_1C взята точка L, на основании $ABCD$ —

точка M так, что прямые A_1L и KM параллельны. Какой наименьший объём может иметь призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $A_1L=\frac{4}{3}$, $KM=1$, $ML=\frac{1}{\sqrt{3}}$?

466 (б. 7, 4). Точка K является серединой ребра AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. На боковой грани CC_1B_1B взята точка L, на основании ABC — точка M так, что прямые A_1L и KM параллельны. Какой наибольший объём может иметь призма $ABCA_1B_1C_1$, если $A_1L=1$, $KM=\frac{3}{5}$, $ML=\frac{1}{\sqrt{10}}$?

467 (б. 8, 4). Точка N является серединой ребра CC_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На боковой грани AA_1D_1D взята точка E, на основании $ABCD$ — точка F так, что прямые EC_1 и FN параллельны. Какой наименьший объём может иметь призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $EC_1=1$, $FN=\frac{4}{5}$, $EF=\frac{1}{\sqrt{15}}$?

1990 год

468 (б. 1, 5). В основании пирамиды $SABC$ лежит остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) площади 2. Ребро SA — высота пирамиды. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$ на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB. Наибольшая из площадей таких проекций равна 2,5, а наименьшая — $\frac{3}{\sqrt{5}}$. Найти объём пирамиды.

469 (б. 2, 5). В треугольной пирамиде $SABC$ площадь основания ABC равна 7, а углы ABC, ASB и двугранный угол при ребре AB прямые. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$ на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB. Наибольшая из площадей таких проекций равна 14, а наименьшая — $4\sqrt{3}$. Найти объём пирамиды.

470 (б. 3, 5). В основании пирамиды $SABC$ лежит остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$)

площади 1,5. Ребро SA — высота пирамиды. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$ на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB. Наибольшая из площадей таких проекций равна 2,5, а наименьшая — $\sqrt{2}$. Найти объём пирамиды.

471 (б. 4, 5). В треугольной пирамиде $SABC$ площадь основания ABC равна 14, а углы ABC, ASB и двугранный угол при ребре AB прямые. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$ на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB. Наибольшая из площадей таких проекций равна 21, а наименьшая — $6\sqrt{5}$. Найти объём пирамиды.

472 (б. 5, 5). Даны правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ и цилиндр, центр симметрии которого лежит на прямой SO (SO — высота пирамиды). Точка F — середина ребра SD, точка E принадлежит апофеме ST грани BSC, причём $TE = 3ES$. Прямоугольник, являющийся одним из осевых сечений цилиндра, расположен так, что две его вершины лежат на прямой AB, а одна из двух других вершин лежит на прямой EF. Найти объём цилиндра, если $SO = 3$, $AB = 1$.

473 (б. 6, 5). Даны правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ и конус, центр основания которого лежит на прямой SO (SO — высота пирамиды). Точка E — середина ребра SD, точка F лежит на ребре AD, причём $AF = \frac{3}{2}FD$. Треугольник, являющийся одним из осевых сечений конуса, расположен так, что две его вершины лежат на прямой CD, а третья — на прямой EF. Найти объём конуса, если $AB = 4$, $SO = 3$.

474 (б. 7, 5). Даны правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ и цилиндр, центр симметрии которого лежит на прямой SO (SO — высота пирамиды). Точка E — середина апофемы грани BSC, точка F принадлежит ребру SD, причём $SF = 2FD$. Прямоугольник, являющийся одним из осевых сечений цилиндра, расположен так, что две его вершины лежат на прямой AB, а одна из двух других вершин лежит на прямой EF. Найти объём цилиндра, если $SO=12$, $AB=4$.

475 (б. 8, 5). Даны правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ и конус, центр основания которого лежит на прямой SO (SO — высота пирамиды). Точка E лежит на ребре SD, причём $SE=2ED$, точка F — середина ребра AD. Треугольник, являющийся одним из осевых сечений конуса, расположен так, что две его вершины лежат на прямой CD, а третья — на прямой EF. Найти объём конуса, если $AB=1$, $SO=\sqrt{3}$.

1991 год

476 (б. 1, 5). Конус расположен внутри треугольной пирамиды $SABC$ так, что плоскость его основания совпадает с плоскостью одной из граней пирамиды, а три другие грани касаются его боковой поверхности. Найти объём пирамиды, если длина образующей конуса равна 1, $\angle ABS=\frac{\pi}{2}$, $\angle BSC=\frac{\pi}{12}$, $\angle SCB=\frac{\pi}{4}$.

477 (б. 2, 5). Сфера, вписанная в треугольную пирамиду $KLMN$, касается одной из граней пирамиды в центре вписанной в эту грань окружности. Найти объём пирамиды, если $MK=\frac{5}{4}$, $\angle NMK=\frac{\pi}{2}$, $\angle KML=3\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\angle NML=\frac{\pi}{2}-$ $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

478 (б. 3, 5). Конус расположен внутри треугольной пирамиды $SABC$ так, что плоскость его основания совпадает с плоскостью одной из граней пирамиды, а три другие грани касаются его боковой поверхности. Найти объём пирамиды, если длина образующей конуса равна 1, $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$, $\angle SBA=\frac{\pi}{6}$, $\angle ASB=\frac{\pi}{4}$.

479 (б. 4, 5). Сфера, вписанная в треугольную пирамиду $EFGH$, касается одной из граней пирамиды в центре вписанной в эту грань окружности. Найти объём пирамидыды, если $FG = 3\sqrt{5}$, $\angle HFG = \frac{\pi}{2}$, $\angle EFG = \frac{3\pi}{2} - 3 \operatorname{arctg} \sqrt{5}$, $\angle EFH = \operatorname{arctg} \sqrt{5}$.

480 (б. 5, 5). В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основанием является трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $BC = \frac{4}{5}AD$, $\angle ASD = \angle CDS = \frac{\pi}{2}$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях основании цилиндра, высота которого равна 2, а радиус основания равен $\frac{5}{3}$. Найти объём пирамиды.

481 (б. 6, 5). В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основанием является параллелограмм $ABCD$, $\angle BSC = \angle ASB = \frac{\pi}{2}$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований усечённого конуса, высота которого равна $\frac{4}{3}$, а радиусы оснований равны $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{6}$. Найти объём пирамиды.

482 (б. 7, 5). В четырёхугольной пирамиде $SKLMN$ основанием является трапеция $KLMN$ ($LM \parallel KN$), $LM = \frac{3}{5}KN$, $\angle KSN = \angle MNS = \frac{\pi}{2}$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований цилиндра, высота которого равна 3, а радиус основания равен $\frac{5}{2}$. Найти объём пирамиды.

483 (б. 8, 5). В четырёхугольной пирамиде $SKLMN$ основанием является параллелограмм $KLMN$ $\angle LSM = \angle KSL = \frac{\pi}{2}$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований усечённого конуса, высота которого равна $\frac{3}{2}$, а радиусы оснований равны 1 и $\frac{5}{4}$. Найти объём пирамиды.

484 (б. 9, 5). В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A. Высота ромба равна 4, точка пересечения его диагоналей является ортогональной проекцией вершины S на плоскость основания. Сфера радиуса 2 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найти объём пирамиды, если расстояние от центра сферы до прямой AC равно $\frac{2\sqrt{3}}{3}AB$.

485 (б. 10, 5). В сферу радиуса $\frac{5}{8}$ вписана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основанием которой служит параллелограмм $ABCD$. Точка пересечения диагоналей параллелограмма является ортогональной проекцией вершины S на плоскость $ABCD$. Плоскость каждой грани пирамиды касается второй сферы, расстояние от центра которой до прямой AD вдвое больше расстояния до прямой BC. Найти радиус второй сферы и расстояние от её центра до вершины S, если $AD : AB = 5 : 3$.

486 (б. 11, 5). В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с тупым углом при вершине A. Высота ромба равна 2, точка пересечения его диагоналей является ортогональной проекцией вершины S на плоскость основания. Сфера радиуса 1 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найти объём пирамиды, если расстояние от центра сферы до прямой BD равно $\frac{\sqrt{14}}{5}AB$.

487 (б. 12, 5). В сферу радиуса $\frac{13}{3}$ вписана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основанием которой служит параллелограмм $ABCD$. Точка пересечения диагоналей параллелограмма является ортогональной проекцией вершины S на плоскость $ABCD$. Плоскость каждой грани пирамиды касается второй сферы, расстояние от центра которой до прямой AB втрое больше расстояния до прямой CD. Найти радиус второй сферы и расстояние от её центра до вершины S, если $AB : AD = 1 : 4$.

1992 год

488 (б. 1, 4). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) точки D и E являются серединами рёбер AC и BC соответственно. Через точку E проведена плоскость β, пересекающая рёбра AB и SB и удалённая от точек D и B на одинаковое расстояние, равное $\frac{1}{2}$. Найти длины отрезков, на которые плоскость β делит ребро SB, если $BC=4$, $SC=3$.

489 (б. 2, 4). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABDC$ (S — вершина) $AD=\frac{1}{5}$ и $SD=1$. Через точку B проведена плоскость α, пересекающая ребро SC и удалённая от точек A и C на одинаковое расстояние, равное $\frac{1}{10}$. Найти длины отрезков, на которые плоскость α делит ребро SC, если известно, что α не параллельна прямой AC.

490 (б. 3, 4). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) точки K и L являются серединами рёбер AB и AC соответственно. Через точку L проведена плоскость β, пересекающая рёбра BC и SC и удалённая от точек K и C на одинаковое расстояние, равное $\frac{1}{3}$. Найти длины отрезков, на которые плоскость β делит ребро SC, если $AB=\frac{4}{3}$, $SB=\frac{4}{5}$.

491 (б. 4, 4). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $AB=5$ и $SA=4$. Через точку A проведена плоскость α, пересекающая ребро SD и удалённая от точек B и D на одинаковое расстояние, равное $\frac{5}{4}$. Найти длины отрезков, на которые плоскость α делит ребро SD, если известно, что α не параллельна прямой BD.

492 (б. 5, 5). Сфера вписана в четырёхугольную пирамиду $SABCD$, основанием которой является трапеция $ABCD$, а также вписана в правильный тетраэдр, одна из граней которого совпадает с боковой гранью пирамиды $SABCD$. Найти радиус сферы, если объём пирамиды $SABCD$ равен 64.

493 (б. 6, 5). Сфера вписана в правильную треугольную пирамиду $SABC$ (S — вершина), а также вписана в прямую треугольную призму $KLMK'L'M'$, у которой $KL=KM=\sqrt{6}$, а боковое ребро KK' лежит на прямой AB. Найти радиус сферы, если известно, что прямая SC параллельна плоскости $LL'M'M$.

494 (б. 7, 5). Сфера вписана в четырёхугольную пирамиду $SKLMN$, основанием которой является трапеция $KLMN$, а также вписана в правильный тетраэдр, одна из граней которого совпадает с боковой гранью пирамиды $SKLMN$. Найти радиус сферы, если площадь трапеции $KLMN$ равна $3\sqrt{3}$.

495 (б. 8, 5). Сфера вписана в треугольную пирамиду $SKLM$ (S — вершина), а также вписана в прямую треугольную призму $ABCA'B'C'$, у которой $AB = AC$, $BC = 4\sqrt{2}$, а боковое ребро AA' лежит на прямой KL. Найти радиус сферы, если известно, что прямая SM параллельна плоскости $BB'C'C$.

496 (б. 9, 4). Основание прямой призмы $ABCA'B'C'$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, $\angle ABC = 2\arcsin\frac{3}{5}$. Плоскость, перпендикулярная прямой $A'C$, пересекает рёбра AC и $A'C'$ в точках D и E соответственно, причём $AD = \frac{1}{3}AC$, $EC' = \frac{1}{3}A'C'$. Найти площадь сечения призмы этой плоскостью.

497 (б. 10, 4). Основание прямой призмы $ABCDA'B'C'D'$ есть равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$, $BC = 1$, $AD = 5$, $\angle BAD = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. Плоскость, перпендикулярная прямой $A'D$, пересекает рёбра AD и $A'D'$ в точках E и F соответственно, причём $AE = FD' = \frac{5}{3}$. Найти периметр сечения призмы этой плоскостью.

498 (б. 11, 4). Основание прямой призмы $ABCA'B'C'$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = CB = 2$, $\angle ACB = 2\arcsin\frac{4}{5}$. Плоскость, перпендикулярная прямой $A'B$, пересекает рёбра AB и $A'B'$ в точках K и L соответственно, причём $AK = \frac{7}{16}AB$, $LB' = \frac{7}{16}A'B'$. Найти площадь сечения призмы этой плоскостью.

499 (б. 12, 4). Основание прямой призмы $ABCDA'B'C'D'$ есть равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$, $BC = 5$, $AD = 10$, $\angle BAD = \operatorname{arctg} 2$. Плоскость, перпендикулярная прямой AD', пересекает рёбра AD и $A'D'$ в точках M и N соответственно, причём $MD = A'N = 1$. Найти периметр сечения призмы этой плоскостью.

500 («Абитуриент—92», второй тур, 4). Основанием прямой призмы $ABCDA'B'C'D'$ является ромб $ABCD$, у которого $\angle DAB = \arccos \frac{1}{3}$. Точки M и N расположены на рёбрах AD и BC соответственно, $AM = \frac{1}{2}AD$, $BN = \frac{1}{6}BC$. Точка L лежит на прямой $D'C'$. Какое наименьшее значение может принимать угол между прямыми AL и MN, если $AA' = \frac{1}{3}AB$?

1993 год

501 (б. 1, 4). Через середину ребра AC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) проведены плоскости α и β, каждая из которых образует угол $\frac{\pi}{6}$ с плоскостью ABC. Найти площади сечений пирамиды $SABC$ плоскостями α и β, если эти сечения имеют общую сторону длины 1, лежащую в грани ABC, а плоскость α перпендикулярна ребру SA.

502 (б. 2, 4). На сторонах BC и AD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) взяты точки P и Q. Сечения пирамиды $SABCD$ двумя взаимно перпендикулярными плоскостями α и β, проходящими через прямую PQ, — трапеции с равными основаниями. Грань SAB образует угол $\frac{\pi}{4}$ с пересекающей её плоскостью сечения, а угол между гранями SAB и $ABCD$ равен $\operatorname{arctg} 2$. Найти площади сечений пирамиды плоскостями α и β, если $PQ = 13$.

503 (б. 3, 4). Через середину ребра BC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) проведены плоскости α и β, каждая из которых образует угол $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ с плоскостью ABC. Найти площади сечений пирамиды $SABC$ плоскостями α и β, если эти сечения имеют общую сторону длины 3, лежащую в грани ABC, а плоскость α перпендикулярна ребру SC.

504 (б. 4, 4). На сторонах AB и CD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) взяты точки K и L. Сечения пирамиды $SABCD$ двумя взаимно перпендикулярными плоскостями α и β, проходящими через прямую KL, — трапеции с равными основаниями. Грань SAD образует угол $\frac{\pi}{4}$ с пересекающей её плоскостью сечения, а угол между гранями SAD и $ABCD$ равен $\operatorname{arctg} 3$. Найти площади сечений пирамиды $SABCD$ плоскостями α и β, если $KL = 19$.

505 (б. 5, 5). Основание прямой призмы $KLMNK'L'M'N'$ есть ромб $KLMN$ с углом 60° при вершине K. Точки E и F — середины рёбер LL' и LM призмы. Ребро SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) лежит на прямой LN, вершины D и B — на прямых MM' и EF соответственно. Найти отношение объёмов призмы и пирамиды, если $SA = 2AB$.

506 (б. 6, 5). Точки E и F — середины рёбер CC' и $C'D'$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Ребро KL правильной треугольной пирамиды $KLMN$ (K — вершина) лежит на прямой AC, а вершины N и M — на прямых DD' и EF соответственно. Найти отношение объёмов призмы и пирамиды, если $AB : BC = 4 : 3$, $KL : MN = 2 : 3$.

507 (б. 7, 5). Точки P и Q — середины рёбер KL и LM правильной треугольной призмы $KLMK'L'M'$. Ребро SB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) лежит на прямой QK, а вершины A и C — на прямых $K'P$ и LL' соответственно. Найти отношение объёмов призмы и пирамиды, если $SA = 5AB$.

508 (б. 8, 5). Основание прямой призмы $PQRP'Q'R'$ — треугольник PQR, в котором $\angle PQR = 90^\circ$, $PQ : QR = 1 : 3$. Точка K — середина катета PQ. Ребро AB правильной треугольной пирамиды $ABCD$ (A — вершина) лежит на прямой PR, а вершины C и D — на прямых $P'K$ и QQ' соответственно. Найти отношение объёмов призмы и пирамиды, если $AB : CD = 2 : 3$.

509 (б. 9, 5). Внутри правильной треугольной пирамиды расположена прямая призма, в основании которой лежит ромб. Одна из граней призмы принадлежит основанию пирамиды, другая грань — боковой грани пирамиды. Какой наибольший объём может иметь призма, если ребро основания пирамиды равно 2, а высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$?

510 (б. 10, 5). Внутри правильной четырёхугольной пирамиды расположена прямая призма $KLMNK'L'M'N'$, в основании которой лежит ромб $KLMN$ с углом 60° при вершине L. Ребро KK' принадлежит основанию пирамиды, а ребро LL' — диагонали этого основания. Какой наибольший объём может иметь призма, если диагональ основания пирамиды равна 6, а высота пирамиды равна $\sqrt{3}$?

511 (б. 11, 5). Внутри правильной треугольной пирамиды расположена прямая призма, в основании которой лежит ромб. Одна из граней призмы принадлежит основанию пирамиды, другая грань — боковой грани пирамиды. Какой наибольший объём может иметь призма, если ребро основания пирамиды равно 2, а высота пирамиды равна 1?

512 (б. 12, 5). Внутри правильной четырёхугольной пирамиды расположена прямая призма $ABCDA'B'C'D'$, в основании которой лежит ромб $ABCD$, в котором $BD = \sqrt{2}AC$. Ребро AA' призмы принадлежит основанию пирамиды, а ребро BB' — диагонали этого основания. Какой наибольший объём может иметь призма, если ребро основания пирамиды равно 2, а высота пирамиды равна 1?

513 («Абитуриент—93», второй тур, 2). Ортогональная проекция грани BB_1C_1C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ на плоскость AB_1C_1 — квадрат со стороной 1. Найти объём призмы.

1994 год

514 (б. 1, 4). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ с углом BAD, равным $2\arccos\frac{1}{3}$. Сфера касается всех звеньев ломаной $ABCC_1A_1$ и пересекает ребро BB_1 в точках B_1 и M. Найти объём призмы и радиус сферы, если $B_1M=1$.

515 (б. 2, 4). Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB:BC=2:3$. Точки F и F_1 — середины рёбер BC и B_1C_1 соответственно. Сфера касается всех звеньев ломаной $AFDD_1A_1$ и пересекает отрезок F_1F в точках F_1 и E. Найти объём параллелепипеда и радиус сферы, если $F_1E=\frac{3}{2}$.

516 (б. 3, 4). Сфера пересекает ребро CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в точках C_1 и K и касается всех звеньев ломаной $BCAA_1B_1$. Найти объём призмы и радиус сферы, если $C_1K=4$.

517 (б. 4, 4). Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB:BC=\sqrt{6}$. Точки K и K_1 — середины рёбер AD и A_1D_1 соответственно. Сфера пересекает отрезок K_1K в точках K_1 и M и касается всех звеньев ломаной $CKBB_1C_1$. Найти объём параллелепипеда и радиус сферы, если $K_1M=1$.

518 (б. 5, 5). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ ребро AB вдвое больше высоты пирамиды. По одну сторону от плоскости грани $ABCD$ расположен цилиндр, окружность основания которого проходит через центр этой грани. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SCD и SBC — прямоугольники с общей вершиной в точке C. Найти отношение объёмов цилиндра и пирамиды.

519 (б. 6, 5). Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ имеет длину $\frac{11}{5}$ и составляет с плоскостью основания ABC угол, равный $\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}\right)$. Цилиндр расположен так, что окружность одного из его оснований проходит через середину ребра AC и не пересекает грань SAB. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SAB и SBC — прямоугольники с общей вершиной в точке S. Найти объём цилиндра.

520 (б. 7, 5). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ двугранный угол при ребре AB равен $\arccos\frac{1}{3}$. По одну сторону от плоскости грани $ABCD$ расположен цилиндр, окружность основания которого проходит через центр этой грани. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SAB и SBC — прямоугольники с общей вершиной в точке B. Найти отношение объёмов цилиндра и пирамиды.

521 (б. 8, 5). Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна $\sqrt{\frac{7}{3}}$, а боковая грань составляет с основанием ABC угол $60°$. Цилиндр расположен так, что окружность одного из его оснований проходит через середину ребра BC и не пересекает грань SAC. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SAB и SAC — прямоугольники с общей вершиной в точке S. Найти объём цилиндра.

522 (б. 9, 5). Сфера, касающаяся верхнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его нижнего основания и делит ось цилиндра в отношении $2:6:1$, считая от центра одного из оснований. Найти объём цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии $2\sqrt{6}$ друг от друга.

523 (б. 10, 5). Сфера, касающаяся нижнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его верхнего основания и делит ось цилиндра в отношении $1:6:2$, считая от центра одного из оснований. Найти объём цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии 8 друг от друга.

524 (б. 11, 5). Сфера, касающаяся верхнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его нижнего основания и делит ось цилиндра в отношении $2:6:1$, считая от центра одного из оснований. Найти объём цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии $\sqrt{6}$ друг от друга.

525 (б. 12, 5). Сфера, касающаяся нижнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его верхнего основания и делит ось цилиндра в отношении $1:6:2$, считая от центра одного из оснований. Найти объём цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии 4 друг от друга.

526 («Абитуриент—94», второй тур, 5). Даны конус и сфера, касающаяся образующей AB конуса в её середине, а также основания конуса в некоторой точке P. Найти объём конуса, если наибольшее и наименьшее расстояния от центра O основания конуса до точек сферы равны 9 и $\frac{1}{2}$, а прямые OP и AB перпендикулярны.

1995 год

527 (б. 1, 4). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $AB = 3\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 8. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку A, а другая — через точки B и D, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SC плоскости сечении? Найти расстояние между плоскостями сечений и объёмы многогранников, на которые пирамида разбивается этими плоскостями.

528 (б. 2, 4). Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости ABC, $AB = 2$, $AC = 1$, $\angle BAC = 120^\circ$, $SA = 3\sqrt{2}$. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку C и середину ребра AB, а другая — через точку B, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SA плоскости сечений? Найти объёмы многогранников, на которые разбивают пирамиду плоскости сечений, а также расстояние между этими плоскостями.

529 (б. 3, 4). В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, ребро SD перпендикулярно основанию, $SD = 6$, $BD = 3$, $AC = 2$. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку B, а другая — через точки A и C, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SD плоскости сечений? Найти расстояние между плоскостями сечений и объёмы многогранников, на которые пирамида разбивается этими плоскостями.

530 (б. 4, 4). Ребро SB пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости ABC, $AB = 4$, $BC = 2$, $\angle ACB = 90^\circ$, $SB = 3$. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку C и середину ребра AB, а другая — через точку A, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SB плоскости сечений? Найти объёмы многогранников, на которые разбивают пирамиду плоскости сечений, а также расстояние между этими плоскостями.

531 (б. 5, 5). В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно $\sqrt{14}$, длина стороны основания $ABCD$ призмы равна 6. Окружность основания конуса вписана в треугольник BC_1D, а вершина конуса лежит в плоскости ABC_1. Найти объём конуса.

532 (б. 6, 5). Окружность основания цилиндра вписана в боковую грань SAB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), центр другого основания цилиндра лежит в плоскости SBC. Найти объём цилиндра, если $AB=6$, $SB=5$.

533 (б. 7, 5). В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $ABCD$ равна 2, боковое ребро равно $\sqrt{14}$. Основание конуса вписано в треугольник AB_1D_1, а вершина конуса лежит в плоскости AB_1C_1. Найти объём конуса.

534 (б. 8, 5). Окружность основания цилиндра вписана в боковую грань SBC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), центр другого основания цилиндра лежит в плоскости SBD. Найти объём цилиндра, если $BC=4$, $SA=3$.

535 (б. 9, 5). На ребре AC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка K так, что $AK=\frac{1}{4}$, $CK=\frac{3}{4}$. Через точку K проведена плоскость, не проходящая через ребро призмы, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}\frac{7}{6}$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найти объём призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет.

536 (б. 10, 5). В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB=AC=25$, $BC=$ $=40$. На ребре AB взята точка M так, что $BM=15$. Через точку M проведена плоскость, не проходящая через ребро призмы, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}\frac{11}{15}$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найти объём призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет.

537 (б. 11, 5). На ребре AB правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка D так, что $AD=\frac{1}{3}$, $BD=\frac{2}{3}$. Через точку D проведена плоскость, не проходящая через ребро призмы, образующая с плоскостью ABC угол

$\operatorname{arctg}\frac{11}{4}$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найти объём призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет.

538 (б. 12, 5). В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB=BC=5$, $AC=6$. На ребре BC взята точка D так, что $DC=4$. Через точку D проведена плоскость, не проходящая через ребро призмы, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найти объём призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет.

1996 год

539 (б. 1, 5). Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ касаются некоторого шара. Основанием призмы служит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 5. Угол C_1CD острый, а $\angle C_1CB=\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$. Найти $\angle C_1CD$, угол между боковым ребром и плоскостью основания призмы, а также расстояние от точки C до точки касания шара с плоскостью AA_1D.

540 (б. 2, 5). В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. Длина AB равна 8, а $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$. Острые углы A_1AB и A_1AD равны между собой, а угол между ребром A_1A и плоскостью основания призмы равен $\arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}$. Все грани призмы касаются некоторой сферы. Найти длину ребра AD, угол между плоскостями A_1AB и ABC, а также расстояние от точки A до центра сферы.

541 (б. 3, 5). Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ касаются некоторого шара. Основанием призмы служит ромб $ABCD$. Угол B_1BC острый, $\angle B_1BA=\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}$, $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$, а $AB=\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Найти $\angle B_1BC$, угол между боковым ребром и плоскостью основания призмы, а также расстояние от точки B до точки касания шара с плоскостью D_1DC.

542 (б. 4, 5). В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$. Острые углы D_1DA и D_1DC равны между собой, угол между ребром D_1D и плоскостью основания призмы равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}$, а $CD=5\sqrt{6}$. Все грани призмы касаются некоторой сферы. Найти длину ребра BC, угол между плоскостями D_1DC и ABC, а также расстояние от точки D до центра сферы.

543 (б. 5, 5). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6, точки M и N — середины рёбер AB и B_1C_1 соответственно, а точка K расположена на ребре DC так, что $CK=2KD$. Найти:

1) расстояние от точки N до прямой AK;

2) расстояние между прямыми MN и AK;

3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника MKN.

544 (б. 6, 5). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4, точки E и F — середины рёбер AB и B_1C_1 соответственно, а точка P расположена на ребре CD так, что $CP=3PD$. Найти:

1) расстояние от точки F до прямой AP;

2) расстояние между прямыми EF и AP;

3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника EFP.

545 (б. 7, 5). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6, точки M и N — середины рёбер AB и B_1C_1 соответственно, а точка K расположена на ребре DC так, что $DK=2KC$. Найти:

1) расстояние от точки N до прямой AK;

2) расстояние между прямыми MN и AK;

3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника MKN.

546 (б. 8, 5). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4, точки E и F — середины рёбер AB и B_1C_1 соответственно, а точка P расположена на ребре CD так, что $PD = 3PC$. Найти:

1) расстояние от точки F до прямой AP;

2) расстояние между прямыми EF и AP;

3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника EFP.

547 (б. 9, 5). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ACD, а вершиной конуса является точка O, где OD — высота пирамиды. Найти радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трёх граней пирамиды с общей точкой B.

548 (б. 10, 5). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ABD, а вершина конуса расположена на средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AB. Найти боковое ребро пирамиды и радиус шара, касающегося конуса и трёх граней пирамиды с общей точкой C.

549 (б. 11, 5). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ACD, а вершиной конуса является точка O, лежащая на высоте BE треугольника ABC так, что $BE : OB = 3$. Найти радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трёх граней пирамиды с общей точкой B.

550 (б. 12, 5). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ABD, а вершиной конуса является точка O, лежащая на медиане CE треугольника ABC так, что $CE : OE = 4$. Найти боковое ребро пирамиды и радиус шара, касающегося конуса и трёх граней пирамиды с общей точкой C.

1997 год

551 (б. 1, 5). Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $\frac{3}{2}r$ так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причём первые два равных шара шара касаются нижнего основания, а третий шар касается верхнего основания цилиндра. Найти радиус основания цилиндра, если его высота равна $4r$.

552 (б. 2, 5). Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $\frac{r}{2}$ так, что каждый шар касается двух других, нижнего основания цилиндра и его боковой поверхности. Найти радиус основания цилиндра.

553 (б. 3, 5). Внутри цилиндра лежит шар радиуса r и два равных шара радиуса $\frac{3}{2}r$ так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причём шар радиуса r касается нижнего основания цилиндра, а два других шара касаются верхнего основания цилиндра. Найти радиус основания цилиндра, если его высота равна $4r$.

554 (б. 4, 5). Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $2r$ так, что каждый шар касается двух других, верхнего основания цилиндра и его боковой поверхности. Найти радиус основания цилиндра.

555 (б. 5, 5). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро равно a и равно диагонали основания $ABCD$. Через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AD угол, равный $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и четырёх прямых, которым принадлежат боковые рёбра пирамиды.

556 (б. 6, 5). В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AB угол, равный $\arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Найти площадь сечения куба плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и граней $ABCD$, BCC_1B_1 и DCC_1D_1.

557 (б. 7, 5). В треугольной пирамиде $SABC$ все рёбра, кроме SA, равны a, а ребро SA равно высоте треугольника ABC. Через точку A параллельно прямой BC проведена плоскость P, образующая с прямой AB угол, равный $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P и радиус шара с центром на прямой, проходящей через точку S перпендикулярно плоскости треугольника ABC, касающегося плоскости P и плоскости треугольника SBC.

558 (б. 8, 5). В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна a, боковое ребро AA_1 равно $a\sqrt{2}$. Через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AB угол, равный $\frac{\pi}{6}$. Найти площадь сечения призмы плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и граней $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и ADD_1A_1.

559 (б. 9, 5). В треугольной пирамиде $ABCD$ рёбра AB и CD взаимно перпендикулярны, $AD = BC$, расстояние от середины E ребра AB до плоскости ACD равно h, $\angle DAC = \frac{\pi}{2}$, $\angle ACD = \frac{\pi}{4}$, угол между ребром DC и гранью ABC равен $\frac{\pi}{6}$. Найти расстояние от точки E до плоскости BCD, угол между ребром AB и гранью ACD, а также угол между гранями ABD и ABC.

560 (б. 10, 5). В треугольной пирамиде $ABCD$ рёбра AC и BD взаимно перпендикулярны, $AB = BD = AD = a$, середина ребра AC равноудалена от плоскостей ABD и BCD, угол между ребром AC и гранью CBD равен $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Найти длину ребра CD, $\angle CAD$ и угол между ребром BD и гранью ACD.

561 (б. 11, 5). В треугольной пирамиде $ABCD$ рёбра BC и AD взаимно перпендикулярны, $AB = CD$, расстояние от середины O ребра BC до плоскости ABD равно h, $\angle CAD = \angle CDA = \frac{\pi}{6}$, угол между ребром AD и гранью ABC равен $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$. Найти расстояние от точки O до плоскости ACD, угол между ребром BC и гранью ABD, а также угол между гранями ABC и BCD.

562 (б. 12, 5). В треугольной пирамиде $ABCD$ рёбра AB и DC взаимно перпендикулярны, $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$, $\angle ABD = \frac{\pi}{6}$, угол между ребром CD и гранью ABD равен $\frac{\pi}{3}$, $AD = a$, середина ребра CD равноудалена от плоскостей ABD и ABC. Найти длину ребра BC, $\angle CDB$ и угол между ребром AB и гранью BCD.

1998 год

563 (б. 1, 5). Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6, а высота равна $\frac{3}{\sqrt{7}}$. На рёбрах AC, A_1C_1 и BB_1 расположены соответственно точки P, F и K так, что $AP = 1$, $A_1F = 3$ и $BK = KB_1$. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки P, F и K, найти площадь сечения и угол между плоскостью основания призмы и плоскостью сечения.

564 (б. 2, 5). Построить сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, A_1C_1, BB_1. Найти площадь сечения и вычислить угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения, если сторона основания равна 2, а высота призмы равна $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

565 (б. 3, 5). Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12, а высота равна

$\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$. На рёбрах AC, A_1C_1 и AB расположены соответственно точки P, F и E так, что $AP = 2$, $A_1F = 6$ и $AE = 6$. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки P, F и E, найти площадь сечения и угол между плоскостью основания призмы и плоскостью сечения.

566 (б. 4, 5). Построить сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, A_1C_1, BB_1. Найти площадь сечения и вычислить угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения, если сторона основания равна 4, а высота призмы равна $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

567 (б. 5, 5). Две противоположные боковые грани четырёхугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярны основанию, высота пирамиды равна $\sqrt{5}$. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD = BC$), описанная около окружности и такая, что $AB = 6$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$. Найти расстояние от точки D до плоскости SAB.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SCD, а вершина принадлежит грани SAB. Найти объём конуса.

568 (б. 6, 5). В основании четырёхугольной пирамиды $SKLMN$ лежит равнобедренная трапеция $KLMN$, описанная около окружности и такая, что $KN = LM = 4$, $MN > KL$ и угол между прямыми KN и LM равен $\frac{\pi}{3}$. Две противоположные боковые грани этой пирамиды перпендикулярны основанию, $SM = 12$. Найти расстояние от точки M до плоскости SKL.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SMN, а вершина принадлежит грани SKL. Вычислить высоту конуса.

569 (б. 7, 5). В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию, расстояние от вершины S до прямой AB равно $4\sqrt{2}$.

В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ $(AD = BC)$, описанная около окружности и такая, что $CD = 2$, $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$. Найти расстояние от точки C до плоскости SAB.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SCD, а вершина принадлежит грани SAB. Найти объём конуса.

570 (б. 8, 5). В основании четырёхугольной пирамиды $SKLMN$ лежит равнобедренная трапеция $KLMN$ с равными боковыми сторонами LM и KN, описанная около окружности радиуса $\sqrt{3}$, $\angle MLK = \frac{2\pi}{3}$. Две противоположные боковые грани этой пирамиды перпендикулярны основанию, высота пирамиды равна $6\sqrt{3}$. Найти расстояние от точки N до плоскости SKL.

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SMN, а вершина принадлежит грани SKL. Вычислить высоту конуса.

1999 год

571 (б. 1, 6). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K – середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 2$, точка F – центр грани ABC. Найти угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F.

572 (б. 2, 6). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K – середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 3$, точка F – центр грани ABC. Найти угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F.

573 (б. 3, 6). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K – середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 2 : 1$, точка F – центр грани ABC. Найти угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F.

574 (б. 4, 6). Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 3 : 1$, точка F — центр грани ABC. Найти угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F.

575 (б. 5, 6). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота пирамиды, опущенная на основание, равна $2\sqrt{2}$. На рёбрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2ES$, $SF = 5DF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная CD. Найти:

1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α;

2) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α;

3) угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

576 (б. 6, 6). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, угол между боковым ребром и основанием равен $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. На рёбрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2ES$, $DF = 8SF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная AB. Найти:

1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α;

2) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α;

3) угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

577 (б. 7, 6). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, длина бокового ребра равна $\sqrt{10}$. На рёбрах SA и SD расположены точки E и F так, что $SE = 5AE$, $DF = 2SF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная CD. Найти:

1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α;

2) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α;

3) угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

578 (б. 8, 6). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, двугранный угол между основанием и боковой гранью равен $\arccos\frac{1}{3}$. На рёбрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 8ES$, $DF = 2SF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная AB. Найти:

1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α;

2) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α;

3) угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

2000 год

579 (б. 1, 6). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, $\angle ADB = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объём пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

580 (б. 2, 6). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 6, угол между боковыми гранями $\arccos\frac{1}{10}$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объём пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

581 (б. 3, 6). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 3, угол между основанием и боковой гранью $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объём пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

582 (б. 4, 6). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, высота пирамиды $DO = \sqrt{33}$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объём пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

583 (б. 5, 6). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ $\angle ADC = 2\arcsin\frac{1}{6}$, сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N — середины рёбер AB, CD, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке KM и $3ME = KE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку KN. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит рёбра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$.

584 (б. 6, 6). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ $\angle ADC = 2\arcsin\frac{1}{3}$, сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N — середины рёбер AB, CD, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке CM и $3ME = CE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку KN. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит рёбра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$.

585 (б. 7, 6). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ длина бокового ребра равна 12, а угол между основанием ABC и боковой гранью равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{105}}$. Точки K, M, N — середины рёбер AB, CD, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке KM и $2ME = KE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку KN. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит рёбра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$.

586 (б. 8, 6). В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 4, угол между плоскостью основания и боковой гранью равен $\arccos\frac{1}{2\sqrt{6}}$. Точки K, M, N — середины отрезков AB, DK, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке CM и $5ME = CE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку KN. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит рёбра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$.

2001 год

587 (б. 1, 5). Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми рёбрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $S \neq A$, $AB = BS$. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

588 (б. 2, 5). Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми рёбрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $2AB = BS$ и точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

589 (б. 3, 5). Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми рёбрами поставлено гранью ABC на плоскость.

Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $AB=2BS$, точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

590 (б. 4, 5). Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми рёбрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F лежит на ребре CD, $2DF=FC$, точка S лежит на прямой AB, $AB=3BS$ и точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

591 (б. 1, 6). Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $4\sqrt{3}$, $\angle DAB=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{37}{3}}$. Точки A_1, B_1, C_1 — середины рёбер AD, BD, CD соответственно. Найти:

1) угол между прямыми BA_1 и AC_1;

2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1;

3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1.

592 (б. 2, 6). Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота пирамиды $DO=6$. Точки A_1, B_1, C_1 — середины рёбер AD, BD, CD соответственно. Найти:

1) угол между прямыми BA_1 и AC_1;

2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1;

3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1.

593 (б. 3, 6). Боковое ребро правильной пирамиды $ABCD$ с основанием ABC равно $8\sqrt{10}$, $\angle ADB=\arcsin\frac{\sqrt{111}}{20}$. Точки A_1, B_1, C_1 — середины рёбер AD, BD, CD соответственно. Найти:

1) угол между прямыми BA_1 и AC_1;

2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1;

3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1.

594 (б. 4, 6). Боковое ребро правильной пирамиды $ABCD$ с основанием ABC равно 20, $\angle DAB = \arcsin \frac{\sqrt{13}}{5}$. Точки A_1, B_1, C_1 — середины рёбер AD, BD, CD соответственно. Найти:

1) угол между прямыми BA_1 и AC_1;

2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1;

3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1.

595 (б. 5, 6). Три шара радиуса r касаются друг друга и шара радиуса R внешним образом. При каком соотношении r и R это возможно? Считая, что $R > r$, найти радиус шара, касающегося всех четырёх шаров внешним образом.

596 (б. 6, 6). Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом, и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R. При каком соотношении между r и R это возможно? Найти радиус наименьшего из шаров, касающихся трёх шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом.

597 (б. 7, 6). Три шара радиуса r касаются друг друга и шара радиуса R внешним образом. При каком соотношении между r и R это возможно? Считая, что $R > r$, найти радиус такой сферы, что все четыре шара касаются её внутренним образом.

598 (б. 8, 6). Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом, и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R. При каком соотношении между r и R это возможно? Найти радиус наибольшего из шаров, касающихся трёх шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом.

599 (б. 9, 6). Апофема правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковое ребро образует с основанием $ABCD$ угол, равный $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}$. Точки E, F, K выбраны соответственно на рёбрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} = \frac{SK}{KC} = \frac{1}{2}$. Найти:

1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK;
2) расстояние от точки D до плоскости EFK;
3) угол между прямой SD и плоскостью EFK.

600 (б. 10, 6). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 1, боковое ребро образует с основанием угол, равный arctg 4. Точки E, F, K выбраны соответственно на рёбрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AD}=\frac{SK}{SC}=\frac{2}{3}$. Найти:

1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK;
2) расстояние от точки D до плоскости EFK;
3) угол между прямой SD и плоскостью EFK.

601 (б. 11, 6). Высота правильной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 3, угол между соседними боковыми рёбрами равен $\arccos\frac{9}{10}$. Точки E, F, K выбраны соответственно на рёбрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AD}=\frac{CK}{SC}=\frac{1}{3}$. Найти:

1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK;
2) расстояние от точки D до плоскости EFK;
3) угол между прямой SD и плоскостью EFK.

602 (б. 12, 6). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковая грань образует с основанием угол, равный arctg 2. Точки E, F, K выбраны соответственно на рёбрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FD}=\frac{CK}{KS}=2$. Найти:

1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK;
2) расстояние от точки D до плоскости EFK;
3) угол между прямой SD и плоскостью EFK.

2002 год

603 (б. 1, 6). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2. Плоскость α, параллельная прямым SC и AD, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность, причём периметр сечения равен $\frac{32}{5}$. Найти:

1) в каком отношении плоскость α делит рёбра пирамиды;

2) отношение объёмов частей, на которые плоскость α разбивает пирамиду;

3) расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости α.

604 (б. 2, 6). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2. Плоскость α, параллельная прямым SB и AD, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность, причём периметр сечения равен $\frac{48}{7}$. Найти:

1) в каком отношении плоскость α делит рёбра пирамиды;

2) отношение объёмов частей, на которые плоскость α разбивает пирамиду;

3) расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости α.

605 (б. 3, 6). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2. Плоскость α, параллельная прямым SB и AD, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность радиуса $\frac{\sqrt{15}}{5}$. Найти:

1) в каком отношении плоскость α делит рёбра пирамиды;

2) отношение объёмов частей, на которые плоскость α разбивает пирамиду;

3) расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости α.

606 (б. 4, 6). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2. Плоскость α, параллельная прямым SC и AD, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность радиуса $\frac{\sqrt{35}}{7}$. Найти:

1) в каком отношении плоскость α делит рёбра пирамиды;

2) отношение объёмов частей, на которые плоскость α разбивает пирамиду;

3) расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости α.

607 (б. 5, 6). Расстояние от центра O шара радиуса 12, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, до бокового ребра равно $4\sqrt{2}$. Найти:

1) высоту пирамиды;

2) расстояние от точки O до боковой грани пирамиды;

3) радиус вписанного в пирамиду шара.

608 (б. 6, 6). Расстояние от центра O шара радиуса $6\sqrt{2}$, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, до боковой грани равно 3. Найти:

1) высоту пирамиды;

2) расстояние от точки O до боковой грани пирамиды;

3) радиус вписанного в пирамиду шара.

609 (б. 7, 6). Расстояние от центра O шара, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, до бокового ребра равно $2\sqrt{2}$, а от O до боковой грани равно $\frac{6}{\sqrt{5}}$. Найти:

1) высоту пирамиды;

2) радиус описанного вокруг пирамиды шара;

3) радиус вписанного в пирамиду шара.

610 (б. 8, 6). Расстояние от центра O шара радиуса 9, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, до бокового ребра в $\frac{\sqrt{10}}{3}$ раз больше расстояния от точки O до боковой грани пирамиды. Найти:

1) высоту пирамиды;

2) расстояние от точки O до боковой грани пирамиды;

3) радиус вписанного в пирамиду шара.

611 (б. 9, 4). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 8, высота SO равна 3. Точка M — середина ребра SB, точка K — середина ребра BC. Найти:

1) объём пирамиды $AMSK$;

2) угол между прямыми AM и SK;

3) расстояние между прямыми AM и SK.

612 (б. 10, 4). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна $4\sqrt{2}$, угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$. Точка M — середина ребра SD, точка K — середина ребра AD. Найти:

1) объём пирамиды $CMSK$;

2) угол между прямыми CM и SK;

3) расстояние между прямыми CM и SK.

613 (б. 11, 4). Диагональ основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна $8\sqrt{2}$, угол между боковой гранью и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра AB. Найти:

1) объём пирамиды $DMSK$;

2) угол между прямыми DM и SK;

3) расстояние между прямыми DM и SK.

614 (б. 12, 4). Диагональ основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 8, высота пирамиды SO равна 1. Точка M — середина ребра SC, точка K — середина ребра CD. Найти:

1) объём пирамиды $BMSK$;

2) угол между прямыми BM и SK;

3) расстояние между прямыми BM и SK.

2003 год

615 (б. 1, 6). Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает рёбра DA, DB и DC, а её центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 3, объём пирамиды $ABCD$ равен $27\sqrt{2}$, ребро $AB = 24$. Найти двугранный угол между гранями ABC и ABD и радиус описанной вокруг $ABCD$ сферы.

616 (б. 2, 6). Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает рёбра DA, DB и DC, а её центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 2, двугранный угол между гранями ABC и ABD равен $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, ребро $AB = 20$. Найти объём пирамиды $ABCD$ и радиус описанной вокруг $ABCD$ сферы.

617 (б. 3, 6). Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает рёбра DA, DB и DC, а её центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 2, объём пирамиды $ABCD$ равен $28\sqrt{2}$, ребро $AB = 12$. Найти двугранный угол между гранями ABC и ABD и радиус описанной вокруг $ABCD$ сферы.

618 (б. 4, 6). Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC. Окружность верхнего основания цилиндра пересекает рёбра DA, DB и DC, а её центр лежит на грани ABD. Радиус цилиндра равен 4, двугранный угол между гранями ABC и ABD равен $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, ребро $AB = 24$. Найти объём пирамиды $ABCD$ и радиус описанной вокруг $ABCD$ сферы.

619 (б. 5, 6). Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся

а) рёбер BA, BB_1, BC и плоскости A_1DC_1;

б) рёбер BA, BB_1, BC и прямой DA_1.

620 (б. 6, 6). Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся

а) рёбер AD, DD_1, DC и плоскости A_1BC_1;

б) рёбер AD, DD_1, DC и прямой BC_1.

621 (б. 7, 6). Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся

а) рёбер AB, AA_1, AD и плоскости B_1CD_1;

б) рёбер AB, AA_1, AD и прямой CD_1.

622 (б. 8, 6). Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся

а) рёбер CB, CC_1, CD и плоскости B_1AD_1;

б) рёбер CB, CC_1, CD и прямой AD_1.

2004 год

623 (б. 1, 6). В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна $\frac{5}{2}$, точка E — середина AB, а F — точка пересечения медиан грани BCD, причём $EF = 8$. Сфера радиуса 5 касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найти двугранный угол между гранями ABD и BCD, площадь грани BCD и объём пирамиды $ABCD$.

624 (б. 2, 6). В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна $\frac{8}{3}$, точка E — середина AB, а F — точка пересечения медиан грани BCD, причём $EF = 6$. Сфера радиуса 5 касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найти двугранный угол между гранями ABD и BCD, площадь грани BCD и объём пирамиды $ABCD$.

625 (б. 3, 6). В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна 6, точка E — середина AB, а F — точка пересечения медиан грани BCD, причём $EF = 10$. Сфера радиуса $\frac{25}{4}$ касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найти двугранный угол между гранями ABD и BCD, площадь грани BCD и объём пирамиды $ABCD$.

626 (б. 4, 6). В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна $\frac{4}{3}$, точка E — середина AB, а F — точка пересечения медиан грани BCD, причём $EF = 8$. Сфера радиуса $\frac{20}{3}$ касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найти двугранный угол между гранями ABD и BCD, площадь грани BCD и объём пирамиды $ABCD$.

627 (б. 5, 6). Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ попарно пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причём $SK = 5$. Найти длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC.

628 (б. 6, 6). Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ попарно пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причём $SK = 3$. Найти длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC.

629 (б. 7, 6). Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ попарно пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$ и $\sqrt{15}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причём $SK = 5$. Найти длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC.

630 (б. 8, 6). Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ попарно пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$ и $\sqrt{14}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причём $SK = 7$. Найти длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC.

631 (б. 9, 4). Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1, середину ребра AD и параллельной прямой A_1C_1;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1 и параллельной прямой A_1C_1, у которой площадь проекции сечения на плоскость A_1C_1A максимальна.

632 (б. 10, 4). Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину C, середину ребра A_1B_1 и параллельной прямой BD;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину C и параллельной прямой BD, у которой площадь проекции сечения на плоскость BDB_1 максимальна.

633 (б. 11, 4). Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину D_1, середину ребра BC и параллельной прямой A_1C_1;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину D_1 и параллельной прямой A_1C_1, у которой площадь проекции сечения на плоскость A_1C_1A максимальна.

634 (б. 12, 4). Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти:

а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину A, середину ребра C_1D_1 и параллельной прямой BD;

б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину A и параллельной прямой BD, у которой площадь проекции сечения на плоскость BDB_1 максимальна.

2005 год

635 (б. 1, 6). Прямой круговой конус с вершиной O имеет высоту 4 и образующую длины 5. Пирамида $ABCD$ вписана в конус так, что A и C принадлежат окружности основания, B и D принадлежат боковой поверхности, причём B принадлежит образующей OA. Треугольники OAC и OBD равносторонние, причём $OB = 3$. Найти объём пирамиды $ABCD$, двугранный угол при ребре AB и радиус сферы, описанной около $ABCD$.

636 (б. 2, 6). Прямой круговой конус с вершиной O имеет высоту 4 и радиус основания 2. Пирамида $ABCD$ вписана в конус так, что A и C принадлежат окружности основания, B и D принадлежат боковой поверхности, причём B принадлежит образующей OA. Прямая BD параллельна плоскости основания конуса, $OB : BA = 1 : 2$, $AC = \sqrt{7}$,

$BD = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Найти объём пирамиды $ABCD$, двугранный угол при ребре AB и радиус сферы, описанной около $ABCD$.

637 (б. 3, 6). Прямой круговой конус с вершиной O имеет высоту 2 и образующую длины $\sqrt{13}$. Пирамида $ABCD$ вписана в конус так, что A и C принадлежат окружности основания, B и D принадлежат боковой поверхности, причём B принадлежит образующей OA. Точки B и D равноудалены от плоскости основания конуса, $OB = \frac{\sqrt{13}}{3}$, $AC = 4\sqrt{2}$, $BD = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Найти объём пирамиды $ABCD$, двугранный угол при ребре AB и радиус сферы, описанной около $ABCD$.

638 (б. 4, 6). Прямой круговой конус с вершиной O имеет высоту 3 и радиус основания 2. Пирамида $ABCD$ вписана в конус так, что A и C принадлежат окружности основания, B и D принадлежат боковой поверхности, причём B принадлежит образующей OA. Известно, что $OB = OD = AB$, $AC = 2\sqrt{2}$, $BD = \sqrt{2}$. Найти объём пирамиды $ABCD$, двугранный угол при ребре AB и радиус сферы, описанной около $ABCD$.

639 (б. 5, 6). Сфера касается боковых граней четырёхугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на рёбрах AB, BC, CD, DA. Известно, что высота пирамиды равна $2\sqrt{5}$, $AB = 6$, $SA = 5$, $SB = 7$, $SC = 2\sqrt{10}$. Найти длины рёбер BC и CD, радиус сферы и двугранный угол при ребре SD.

640 (б. 6, 6). Сфера касается боковых граней четырёхугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на рёбрах AB, BC, CD, DA. Известно, что высота пирамиды равна $\sqrt{6}$, $AB = 8$, $SA = 4$, $SB = 8$, $SC = 4\sqrt{6}$. Найти длины рёбер BC и CD, радиус сферы и двугранный угол при ребре SD.

641 (б. 7, 6). Сфера касается боковых граней четырёхугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на рёбрах AB, BC, CD, DA. Известно, что высота пирамиды равна $\sqrt{5}$,

$AB = 12$, $SA = 5$, $SB = 11$, $SC = \sqrt{85}$. Найти длины рёбер BC и CD, радиус сферы и двугранный угол при ребре SD.

642 (б. 8, 6). Сфера касается боковых граней четырёхугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на рёбрах AB, BC, CD, DA. Известно, что высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$, $AB=9$, $SA=6$, $SB=9$, $SC=2\sqrt{33}$. Найти длины рёбер BC и CD, радиус сферы и двугранный угол при ребре SD.

643 (б. 9, 4). Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 6, двугранный угол между боковыми гранями пирамиды равен $\arccos \frac{7}{32}$. Точки A_1 и B_1 — середины рёбер AD и BD соответственно, BC_1 — высота в треугольнике DBC. Найти:

1) угол между прямыми AB и B_1C_1;
2) площадь треугольника $A_1B_1C_1$;
3) расстояние от точки B до плоскости $A_1B_1C_1$;
4) радиус вписанного в пирамиду $A_1B_1C_1D$ шара.

644 (б. 10, 4). Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 3, двугранный угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$. Точки A_1 и C_1 — середины рёбер AD и CD соответственно, AB_1 — высота в треугольнике ABD. Найти:

1) угол между прямыми AC и A_1B_1;
2) площадь треугольника $A_1B_1C_1$;
3) расстояние от точки A до плоскости $A_1B_1C_1$;
4) радиус вписанного в пирамиду $A_1B_1C_1D$ шара.

645 (б. 11, 4). Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 6, угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды равен $\arccos \frac{2\sqrt{3}}{5}$. Точки B_1 и C_1 — середины рёбер BD и CD соответственно, CA_1 — высота в треугольнике ACD. Найти:

1) угол между прямыми BC и A_1C_1;
2) площадь треугольника $A_1B_1C_1$;

3) расстояние от точки C до плоскости $A_1B_1C_1$;

4) радиус вписанного в пирамиду $A_1B_1C_1D$ шара.

646 (б. 12, 4). Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 4, угол между боковыми рёбрами пирамиды равен $\arccos\frac{7}{25}$. Точки A_1 и C_1 — середины рёбер AD и CD соответственно, CB_1 — высота в треугольнике BCD. Найти:

1) угол между прямыми AC и B_1C_1;

2) площадь треугольника $A_1B_1C_1$;

3) расстояние от точки A до плоскости $A_1B_1C_1$;

4) радиус вписанного в пирамиду $A_1B_1C_1D$ шара.

2006 год

647 (б. 1, 6). В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Сфера радиуса 3 с центром в плоскости AA_1D_1D касается плоскостей $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ и прямых AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Известно, что $A_1D_1 = 7$, $BC = 5$. Найти:

1) угол между прямыми AD и BB_1;

2) двугранный угол между гранями BB_1C_1C и CC_1D_1D;

3) объём призмы.

648 (б. 2, 6). В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Сфера радиуса 2 с центром в плоскости AA_1D_1D касается плоскостей $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ и прямых AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Известно, что $AD = 7$, $BC = 3$. Найти:

1) угол между прямыми AA_1 и B_1C_1;

2) двугранный угол между гранями AA_1B_1B и AA_1D_1D;

3) объём призмы.

649 (б. 3, 6). В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Сфера радиуса 3 с центром в плоскости AA_1D_1D касается плоскостей $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ и прямых AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Известно, что $AD = 8$, $B_1C_1 = 1$. Найти:

1) угол между прямыми BC и DD_1;

2) двугранный угол между гранями AA_1B_1B и BB_1C_1C;
3) объём призмы.

650 (б. 4, 6). В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Сфера радиуса 2 с центром в плоскости AA_1D_1D касается плоскостей $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ и прямых AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Известно, что $A_1D_1 = 6$, $B_1C_1 = 1$. Найти:
1) угол между прямыми CC_1 и AD;
2) двугранный угол между гранями CC_1D_1D и DD_1A_1A;
3) объём призмы.

651 (б. 5, 6). В треугольной пирамиде $ABCD$ сфера касается граней ACD и BCD в точках B_1 и A_1, являющихся основаниями высот пирамиды, и пересекает ребро AB в точках K и L. Известно, что $AB = \sqrt{10}$, $KL = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $BC = \sqrt{\frac{35}{2}}$, $AD = 5$. Найти расстояние между рёбрами AB и CD, радиус окружности, высекаемой на сфере плоскостью ABC, и объём пирамиды $ABCD$.

652 (б. 6, 6). В треугольной пирамиде $ABCD$ сфера касается граней ACD и BCD в точках B_1 и A_1, являющихся основаниями высот пирамиды, и пересекает ребро AB в точках K и L. Известно, что $AB = 4$, $KL = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $BC = 2\sqrt{6}$, $AD = 6$. Найти расстояние между рёбрами AB и CD, радиус окружности, высекаемой на сфере плоскостью ABC, и объём пирамиды $ABCD$.

653 (б. 7, 6). В треугольной пирамиде $ABCD$ сфера касается граней ACD и BCD в точках B_1 и A_1, являющихся основаниями высот пирамиды, и пересекает ребро AB в точках K и L. Известно, что $AB = \sqrt{14}$, $KL = \sqrt{7}$, $BC = \sqrt{\frac{63}{2}}$, $AD = \sqrt{42}$. Найти расстояние между рёбрами AB и CD, радиус окружности, высекаемой на сфере плоскостью ABC, и объём пирамиды $ABCD$.

654 (б. 8, 6). В треугольной пирамиде $ABCD$ сфера касается граней ACD и BCD в точках B_1 и A_1, являющихся основаниями высот пирамиды, и пересекает ребро AB в точках K и L. Известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $KL = 3\sqrt{\frac{6}{5}}$, $BC = 3\sqrt{\frac{11}{2}}$, $AD = 3\sqrt{7}$. Найти расстояние между рёбрами AB и CD, радиус окружности, высекаемой на сфере плоскостью ABC, и объём пирамиды $ABCD$.

655 (б. 9, 6). В пирамиде $SABC$ каждый из углов ASB и ASC равен $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, угол BSC прямой, ребро SB равно a. Центр сферы, вписанной в пирамиду $SABC$, лежит на высоте SD. Найти SA, SD и радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

656 (б. 10, 6). В пирамиде $SABC$ каждый из углов ASB и ASC равен $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, угол BSC прямой, ребро SB равно a. Центр сферы, вписанной в пирамиду $SABC$, лежит на высоте SD. Найти SA, SD и радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

657 (б. 11, 6). В пирамиде $SABC$ каждый из углов ASB и ASC равен $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$, угол BSC прямой, ребро SB равно a. Центр сферы, вписанной в пирамиду $SABC$, лежит на высоте SD. Найти SA, SD и радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

658 (б. 12, 6). В пирамиде $SABC$ каждый из углов ASB и ASC равен $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$, угол BSC прямой, ребро SC равно a. Центр сферы, вписанной в пирамиду $SABC$, лежит на высоте SD. Найти SA, SD и радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

659 (б. 13, 6). Внутри конуса с вершиной A и высотой 8 расположены сфера S_1 с центром O_1 радиуса 1 и сфера S_2 с центром O_2 радиуса $\frac{1}{4}$, причём $O_1O_2 = \frac{3}{2}$. Сфера S_1

касается плоскости основания конуса в его центре O. Обе сферы S_1 и S_2 касаются образующей конуса AB в точках A_1 и A_2 соответственно. Прямые O_1O_2 и AB пересекаются в точке L. Плоскость Π касается обеих сфер и пересекает отрезок A_1A_2 в его середине M. Найти длины отрезков A_1A_2 и O_2L, а также расстояния от точек L и A до плоскости Π.

660 (б. 14, 6). Внутри конуса с вершиной T и высотой 8 расположены сфера S_1 с центром O_1 радиуса 1 и сфера S_2 с центром O_2 радиуса $\frac{1}{4}$, причём $O_1O_2 = \frac{3}{2}$. Сфера S_1 касается плоскости основания конуса в его центре O. Обе сферы S_1 и S_2 касаются образующей конуса TA в точках K_1 и K_2 соответственно. Прямые O_1O_2 и TA пересекаются в точке L. Плоскость Π касается обеих сфер и пересекает отрезок K_1K_2 в его середине M. Найти длины отрезков AT и O_1L, а также расстояния от точек L и A до плоскости Π.

661 (б. 15, 6). Внутри конуса с вершиной A и высотой 8 расположены сфера S_1 с центром O_1 радиуса 1 и сфера S_2 с центром O_2 радиуса $\frac{1}{4}$, причём $O_1O_2 = \frac{3}{2}$. Сфера S_1 касается плоскости основания конуса в его центре O. Обе сферы S_1 и S_2 касаются образующей конуса AB в точках A_1 и A_2 соответственно. Прямые O_1O_2 и AB пересекаются в точке L. Плоскость Π касается обеих сфер и пересекает отрезок A_1A_2 в его середине M. Найти длины отрезков A_1A_2 и O_1L, а также расстояния от точек L и A до плоскости Π.

662 (б. 14, 6). Внутри конуса с вершиной T и высотой 8 расположены сфера S_1 с центром O_1 радиуса 1 и сфера S_2 с центром O_2 радиуса $\frac{1}{4}$, причём $O_1O_2 = \frac{3}{2}$. Сфера S_1 касается плоскости основания конуса в его центре O. Обе сферы S_1 и S_2 касаются образующей конуса TA в точках K_1 и K_2 соответственно. Прямые O_1O_2 и TA пересекаются в точке L. Плоскость Π касается обеих сфер и пересекает отрезок K_1K_2 в его середине M. Найти длины отрезков TK_2 и O_2L, а также расстояния от точек L и A до плоскости Π.

2007 год

663 (б. 1, 6). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ четыре числа — длины рёбер и диагонали AC_1 — образуют арифметическую прогрессию с положительной разностью d, причём $AA_1 < AB < BC$. Две внешне касающиеся друг друга сферы одинакового неизвестного радиуса R расположены так, что их центры лежат внутри параллелепипеда, причём первая сфера касается граней ABB_1A_1, ADD_1A_1, $ABCD$, а вторая — граней BCC_1B_1, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$. Найти: а) длины рёбер параллелепипеда, б) угол между прямыми CD_1 и AC_1, в) радиус R.

664 (б. 2, 6). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ четыре числа — длины рёбер и диагонали AC_1 — образуют арифметическую прогрессию с положительной разностью d, причём $AB < AA_1 < AD$. Две внешне касающиеся друг друга сферы одинакового неизвестного радиуса R расположены так, что их центры лежат внутри параллелепипеда, причём первая сфера касается граней ABB_1A_1, ADD_1A_1, $ABCD$, а вторая — граней BCC_1B_1, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$. Найти: а) длины рёбер параллелепипеда, б) угол между прямыми CD_1 и AC_1, в) радиус R.

665 (б. 3, 6). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ четыре числа — длины рёбер и диагонали AC_1 — образуют арифметическую прогрессию с положительной разностью d, причём $AD < AB < AA_1$. Две внешне касающиеся друг друга сферы одинакового неизвестного радиуса R расположены так, что их центры лежат внутри параллелепипеда, причём первая сфера касается граней ABB_1A_1, ADD_1A_1, $ABCD$, а вторая — граней BCC_1B_1, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$. Найти: а) длины рёбер параллелепипеда, б) угол между прямыми CD_1 и AC_1, в) радиус R.

666 (б. 4, 6). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ четыре числа — длины рёбер и диагонали AC_1 — образуют арифметическую прогрессию с положительной разностью d, причём $AA_1 < AD < AB$. Две внешне касающиеся друг друга сферы одинакового неизвестного радиуса R расположены так, что их центры лежат внутри параллелепипеда, причём первая сфера касается граней ABB_1A_1, ADD_1A_1, $ABCD$, а вторая – граней BCC_1B_1, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$. Найти: а) длины рёбер параллелепипеда, б) угол между прямыми CD_1 и AC_1, в) радиус R.

667 (б. 5, 6). Внутри прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены два шара ω_1 и ω_2, касающиеся друг друга внешним образом; кроме того, шар ω_1 касается граней $ABCD$, ABB_1A_1, ADD_1A_1, а шар ω_2 касается граней $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1, CDD_1C_1. Известно, что $AB = 6 - \sqrt{2}$, $A_1D_1 = 6 + \sqrt{2}$, $CC_1 = 6$. Найти расстояние между центрами шаров ω_1 и ω_2. Найти наибольший и наименьший суммарный объём шаров.

668 (б. 6, 6). Внутри прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены два шара ω_1 и ω_2, касающиеся друг друга внешним образом; кроме того, шар ω_1 касается граней $ABCD$, ABB_1A_1, BCC_1B_1, а шар ω_2 касается граней $A_1B_1C_1D_1$, ADD_1A_1, CDD_1C_1. Известно, что $A_1B_1 = 14 - \sqrt{3}$, $BC = 14$, $CC_1 = 14 + \sqrt{3}$. Найти расстояние между центрами шаров ω_1 и ω_2. Найти наибольший и наименьший суммарный объём шаров.

669 (б. 7, 6). Внутри прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены два шара ω_1 и ω_2, касающиеся друг друга внешним образом; кроме того, шар ω_1 касается граней $ABCD$, CDD_1C_1, BCC_1B_1, а шар ω_2 касается граней $A_1B_1C_1D_1$, ADD_1A_1, ABB_1A_1. Известно, что $C_1D_1 = 20 - \sqrt{11}$, $AD = 20$, $BB_1 = 20 + \sqrt{11}$. Найти расстояние между центрами шаров ω_1 и ω_2. Найти наибольший и наименьший суммарный объём шаров.

670 (б. 8, 6). Внутри прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены два шара ω_1 и ω_2, касающиеся друг друга внешним образом; кроме того, шар ω_1 касается граней $ABCD$, CDD_1C_1, ADD_1A_1, а шар ω_2 касается граней $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1, ABB_1A_1. Известно, что

$C_1D_1 = 22 - \sqrt{2}$, $BC = 22$, $AA_1 = 22 + \sqrt{2}$. Найти расстояние между центрами шаров ω_1 и ω_2. Найти наибольший и наименьший суммарный объём шаров.

671 (б. 9, 6). В пирамиде $ABCD$ грани ABC и ADC являются равнобедренными треугольниками с общим основанием AC. Сфера радиуса R с центром в точке O, лежащей на грани ABC, касается всех рёбер пирамиды $ABCD$. Найти длины отрезков, на которые точки касания сферы делят рёбра пирамиды, и объём пирамиды $ABCD$, если угол ABC равен 2α. Найти значение угла ABC, при котором объём пирамиды $ABCD$ будет наименьшим. Найти это наименьшее значение объёма пирамиды $ABCD$.

672 (б. 10, 6). В пирамиде $ABCD$ грани ABC и ADC являются равнобедренными треугольниками с общим основанием AC. Сфера радиуса R с центром в точке O, лежащей на грани ABC, касается всех рёбер пирамиды $ABCD$. Найти длины отрезков, на которые точки касания сферы делят рёбра пирамиды, и объём пирамиды $ABCD$, если угол CAB равен β. Найти значение угла CAB, при котором объём пирамиды $ABCD$ будет наименьшим. Найти это наименьшее значение объёма пирамиды $ABCD$.

673 (б. 11, 6). В пирамиде $ABCD$ грани ABC и ADC являются равнобедренными треугольниками с общим основанием AC. Сфера радиуса R с центром в точке O, лежащей на грани ABC, касается всех рёбер пирамиды $ABCD$. Найти длины отрезков, на которые точки касания сферы делят рёбра пирамиды, и объём пирамиды $ABCD$, если угол OBD равен α. Найти значение угла OBD, при котором объём пирамиды $ABCD$ будет наименьшим. Найти это наименьшее значение объёма пирамиды $ABCD$.

674 (б. 12, 6). В пирамиде $ABCD$ грани ABC и ADC являются равнобедренными треугольниками с общим основанием AC. Сфера радиуса R с центром в точке O, лежащей на грани ABC, касается всех рёбер пирамиды $ABCD$. Найти длины отрезков, на которые точки касания сферы делят рёбра пирамиды, и объём пирамиды $ABCD$, если угол OCD равен β. Найти значение угла OCD, при котором объём пирамиды $ABCD$ будет наименьшим. Найти это наименьшее значение объёма пирамиды $ABCD$.

675 (б. 13, 6). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ ребро основания $ABCD$ равно 1, а боковое ребро равно $\sqrt{\frac{3}{2}}$. На ребре SB выбрана точка K так, что $BK=3KS$. Сфера ω с центром на отрезке DK проходит через точки S и C. Найти отношение, в котором центр сферы ω делит отрезок DK, радиус сферы ω и длину отрезка, который ω отсекает от прямой CD.

676 (б. 14, 6). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ ребро основания $ABCD$ и высота равны 2. На ребре SA выбрана точка K так, что $SA = 4KS$. Сфера ω с центром на отрезке CK проходит через точки S и B. Найти отношение, в котором отношении центр сферы ω делит отрезок CK, радиус сферы ω и длину отрезка, который ω отсекает от прямой BC.

677 (б. 15, 6). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ ребро основания $ABCD$ равно 3, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. На ребре SC выбрана точка K так, что $CK = \frac{3}{4}SC$. Сфера ω с центром на отрезке AK проходит через точки S и D. Найти отношение, в котором центр сферы ω делит отрезок AK, радиус сферы ω и длину отрезка, который ω отсекает от прямой AD.

678 (б. 16, 6). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ ребро основания $ABCD$ равно 4, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg} 2$. На ребре SD выбрана точка K так, что $SK = \frac{1}{4}SD$. Сфера ω с центром на отрезке BK проходит через точки S и A. Найти отношение, в котором центр сферы ω делит отрезок BK, радиус сферы ω и длину отрезка, который ω отсекает от прямой AB.

2008 год

679 (б. 1, 6). На основании $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ расположена точка O. Сфера с центром в точке O касается прямых SA, SB, SC, SD в точках A, B, K, L соответственно. Известно, что $AB = KL = 2\sqrt{5}$, $AL = 2$, $BK = 6$, а отрезок SO составляет с плоскостью $ABCD$ угол $\arccos \frac{2}{3}$. Найти длины отрезков AK, OS и SD.

680 (б. 2, 6). На основании $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ расположена точка O. Сфера с центром в точке O касается прямых SA, SB, SC, SD в точках A, B, K, L соответственно. Известно, что $AB = KL = 5\sqrt{2}$, $AL = 6$, $BK = 8$, а отрезок SO составляет с плоскостью $ABCD$ угол $\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$. Найти длины отрезков AK, OS и SD.

681 (б. 3, 6). На основании $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ расположена точка O. Сфера с центром в точке O касается прямых SA, SB, SC, SD в точках A, B, K, L соответственно. Известно, что $AB = KL = 10\sqrt{2}$, $AL = 16$, $BK = 12$, а отрезок SO составляет с плоскостью $ABCD$ угол $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$. Найти длины отрезков AK, OS и SD.

682 (б. 4, 6). На основании $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ расположена точка O. Сфера с центром в точке O касается прямых SA, SB, SC, SD в точках A, B, K, L соответственно. Известно, что $AB = KL = 2\sqrt{13}$, $AL = 6\sqrt{2}$, $BK = 4\sqrt{2}$, а отрезок SO составляет с плоскостью $ABCD$ угол $\arccos \sqrt{\frac{2}{15}}$. Найти длины отрезков AK, OS и SD.

683 (б. 5, 6). В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера ω радиуса $\frac{15}{14}$ с центром O

касается рёбер AS, BS, AD, BC пирамиды $SABCD$ соответственно в точках K, L, M, N, пересекает ребро AB в точках P и Q и касается грани CDS. Известно, что прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает её в точке H, $\frac{AB}{PQ} = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $\frac{AS}{LS} = \frac{3}{2}$. Найти $\angle SAB$, $\angle SBH$, высоту пирамиды и её объём.

684 (б. 6, 6). В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера ω радиуса $\frac{77}{20}$ с центром O касается рёбер AS, BS, AD, BC пирамиды $SABCD$ соответственно в точках K, L, M, N, пересекает ребро AB в точках P и Q и касается грани CDS. Известно, что прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает её в точке H, $\frac{PQ}{AB} = \sqrt{\frac{23}{72}}$, $\frac{AK}{BS} = \frac{1}{3}$. Найти $\angle SAB$, $\angle BSH$, высоту пирамиды и её объём.

685 (б. 7, 6). В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера ω радиуса $\frac{28}{23}$ с центром O касается рёбер AS, BS, AD, BC пирамиды $SABCD$ соответственно в точках K, L, M, N, пересекает ребро AB в точках P и Q и касается грани CDS. Известно, что прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает её в точке H, $\frac{AB}{PQ} = \sqrt{\frac{33}{17}}$, $\frac{BL}{AS} = \frac{1}{4}$. Найти $\angle SBA$, $\angle SAH$, высоту пирамиды и её объём.

686 (б. 8, 6). В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера ω радиуса $\frac{15}{4}$ с центром O касается рёбер AS, BS, AD, BC пирамиды $SABCD$ соответственно в точках K, L, M, N, пересекает ребро AB в точках P и Q и касается грани CDS. Известно, что прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает её в точке H, $\frac{PQ}{AB} = \sqrt{\frac{31}{56}}$, $\frac{BS}{KS} = \frac{3}{2}$. Найти $\angle SBA$, $\angle ASH$, высоту пирамиды и её объём.

687 (б. 9, 6). В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB=1$, $BC=2$. Пусть N — середина SB, M — середина SC, причём $BN=MC=3MN$. Каким может быть минимальный радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$? Найти объём пирамиды $SABCD$, вписанной в эту сферу (минимального радиуса).

688 (б. 10, 6). В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB=3$, $SC=8$. Пусть N — середина SB, M — середина SC, причём $BN=MC=4MN$. Каким может быть минимальный радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$? Найти объём пирамиды $SABCD$, вписанной в эту сферу (минимального радиуса).

689 (б. 11, 6). В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB=3$, $BC=2$. Пусть N — середина SB, M — середина SC, причём $BN=MC=3MN$. Каким может быть минимальный радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$? Найти объём пирамиды $SABCD$, вписанной в эту сферу (минимального радиуса).

690 (б. 12, 6). В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB=1$, $SC=8$. Пусть N — середина SB, M — середина SC, причём $BN=MC=4MN$. Каким может быть минимальный радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$? Найти объём пирамиды $SABCD$, вписанной в эту сферу (минимального радиуса).

691 (б. 13, 6). Грани ABC и ABD пирамиды $ABCD$ ортогональны и являются равными равнобедренными треугольниками с общим основанием AB. Известно, что $AB=1$, $CD=2$. Найти угол между прямыми AC и BD, расстояние между прямыми AC и BD и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$.

692 (б. 14, 6). Грани ABC и ABD пирамиды $ABCD$ ортогональны и являются равными равнобедренными треугольниками с общим основанием AB. Известно, что $AB=2$, $CD=1$. Найти угол между прямыми AC и BD, расстояние между прямыми AC и BD и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$.

693 (б. 15, 6). Грани ABC и ABD пирамиды $ABCD$ ортогональны и являются равными равнобедренными треугольниками с общим основанием AB. Известно, что $AB=3$, $CD=2$. Найти угол между прямыми AC и BD, расстояние между прямыми AC и BD и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$.

694 (б. 16, 6). Грани ABC и ABD пирамиды $ABCD$ ортогональны и являются равными равнобедренными треугольниками с общим основанием AB. Известно, что $AB=2$, $CD=\frac{1}{2}$. Найти угол между прямыми AC и BD, расстояние между прямыми AC и BD и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$.

2009 год

695 (б. 1, 4). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Её основанием является трапеция $ABCD$, в которой $AB=BC=$ $=CD=2$, $AD=4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB}=\frac{B_1L}{LC}=\frac{C_1M}{MD}=3.$$

Сфера радиуса $R=2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM и объём призмы.

696 (б. 2, 7). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Её основанием является трапеция $ABCD$, в которой $AB=BC=$ $=CD=2$, $AD=4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB}=\frac{B_1L}{LC}=\frac{C_1M}{MD}=4.$$

Сфера радиуса $R=2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM и объём призмы.

697 (б. 3, 7). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Её основанием является трапеция $ABCD$, в которой $AB=BC=$ $=CD=2$, $AD=4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB}=\frac{B_1L}{LC}=\frac{C_1M}{MD}=\frac{5}{3}.$$

Сфера радиуса $R=2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM и объём призмы.

698 (б. 4, 7). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Её основанием является трапеция $ABCD$, в которой $AB=BC=$ $=CD=2$, $AD=4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB}=\frac{B_1L}{LC}=\frac{C_1M}{MD}=2.$$

Сфера радиуса $R=2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM и объём призмы.

699 (б. 5, 4). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Её основанием является трапеция $ABCD$, в которой $AB=BC=$ $=CD=2$, $AD=4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB}=\frac{B_1L}{LC}=\frac{C_1M}{MD}=7.$$

Сфера радиуса $R=2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM и объём призмы.

700 (б. 6, 4). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Её основанием является трапеция $ABCD$, в которой $AB=BC=$

$= CD = 2$, $AD = 4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB} = \frac{B_1L}{LC} = \frac{C_1M}{MD} = 5.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM и объём призмы.

701 (б. 7, 4). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Её основанием является трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB} = \frac{B_1L}{LC} = \frac{C_1M}{MD} = \frac{7}{3}.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM и объём призмы.

702 (б. 8, 4). Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Её основанием является трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB} = \frac{B_1L}{LC} = \frac{C_1M}{MD} = 9.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM и объём призмы.

703 (б. 9, 4). На ребре AB треугольной пирамиды $ABCD$ выбрана точка X такая, что $AX : XB = 2$. Точки K и L — проекции точки X на плоскости ACD и BCD соответственно. Известно, что $KC = 2$, $KD = 6$, $KA = 8$, $LC = 7$, $LB = 5$. Найдите длину отрезка LD, высоту пирамиды, опущенную из вершины A, и угол между ребром AB и плоскостью BCD.

704 (б. 10, 4). На ребре AB треугольной пирамиды $ABCD$ выбрана точка X такая, что $AX : XB = 4$. Точки K и L — проекции точки X на плоскости ACD и BCD соответственно. Известно, что $KC = 3$, $KD = 7$, $KA = 13$, $LC = 9$, $LB = \frac{7}{2}$. Найдите длину отрезка LD, высоту пирамиды, опущенную из вершины A, и угол между ребром AB и плоскостью BCD.

705 (б. 11, 4). На ребре AB треугольной пирамиды $ABCD$ выбрана точка X такая, что $AX : XB = 2$. Точки K и L — проекции точки X на плоскости ACD и BCD соответственно. Известно, что $KC = 2$, $KD = 7$, $KA = 11$, $LC = 6$, $LB = 6$. Найдите длину отрезка LD, высоту пирамиды, опущенную из вершины B, и угол между ребром AB и плоскостью ACD.

706 (б. 12, 4). На ребре AB треугольной пирамиды $ABCD$ выбрана точка X такая, что $AX : XB = 4$. Точки K и L — проекции точки X на плоскости ACD и BCD соответственно. Известно, что $KC = 3$, $KD = 9$, $KA = 12$, $LC = 7$, $LB = 2$. Найдите длину отрезка LD, высоту пирамиды, опущенную из вершины A, и угол между ребром AB и плоскостью BCD.

2010 год

707 (б. 1, 6). Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 8. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 15. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC, и радиус сферы.

708 (б. 2, 6). Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 5. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 12. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC, и радиус сферы.

709 (б. 3, 6). Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 16. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 30. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC, и радиус сферы.

710 (б. 4, 6). Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 10. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 24. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC, и радиус сферы.

711 (б. 5, 4). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $\sqrt{2}$, высота SO равна 2. Точка K лежит на высоте SO, причём $KS : KO = 1 : 3$. Через точку K проведена плоскость Π, перпендикулярная прямой SA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π, расстояние от точки D до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SD.

712 (б. 6, 4). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно $\sqrt{5}$, высота SO равна 2. Точка K лежит на высоте SO, причём $KS : SO = 1 : 4$. Через точку K проведена плоскость Π, перпендикулярная прямой SB. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π, расстояние от точки A до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SA.

713 (б. 7, 4). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $\sqrt{2}$, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg} 2$. Точка K лежит на высоте SO, причём $KO : SO = 3 : 4$. Через точку K проведена плоскость П, перпендикулярная прямой SC. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью П, расстояние от точки B до плоскости П и угол между плоскостью П и прямой SB.

714 (б. 8, 4). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно $\sqrt{5}$, угол между боковым ребром и ребром основания равен $\operatorname{arctg} 3$. Точка K лежит на высоте SO, причём $KS:SO = 1:4$. Через точку K проведена плоскость П, перпендикулярная прямой SD. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью П, расстояние от точки C до плоскости П и угол между плоскостью П и прямой SC.

715 (б. 9, 6). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания имеет длину 1,боковое ребро — длину $\frac{5}{2}$. Одно основание цилиндра лежит в плоскости SAB, другое — вписано в сечение пирамиды. Найти, в каком отношении это сечение делит боковые рёбра пирамиды, площадь сечения и площадь боковой поверхности цилиндра.

716 (б. 10, 6). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания имеет длину 2, боковое ребро — длину 5. Одно основание цилиндра лежит в плоскости SBC, другое — вписано в сечение пирамиды. Найти, в каком отношении это сечение делит боковые рёбра пирамиды, площадь сечения и площадь боковой поверхности цилиндра.

717 (б. 11, 6). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания имеет длину $\frac{1}{2}$, боковое ребро — длину $\frac{5}{4}$. Одно основание цилиндра лежит в плоскости SCD, другое — вписано в сечение пирамиды. Найти, в каком отношении это сечение делит боковые рёбра пирамиды, площадь сечения и площадь боковой поверхности цилиндра.

718 (б. 12, 6). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания имеет длину $\frac{1}{3}$, боковое ребро —

длину $\frac{5}{6}$. Одно основание цилиндра лежит в плоскости SAD, другое — вписано в сечение пирамиды. Найти, в каком отношении это сечение делит боковые рёбра пирамиды, площадь сечения и площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответы

1. $\frac{\pi}{3}$. **2.** $\arcsin\frac{3}{5}$. **3.** $2\arcsin\frac{1}{6}$ или $2\arcsin\frac{5}{6}$. **6.** $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

6′. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **7.** $\frac{\pi r^2(r+\sqrt{r^2+(d\pm r)^2})^3}{3(d\pm r)^2}$. **8.** $\frac{2m^2}{2m+1}$.

9. $\frac{16b^3h^3}{3(h^2-b^2)\sqrt{2b^2-h^2}}$. **10.** $\frac{(n+4)h^3}{6(k^2-1)}\operatorname{tg}\frac{4d}{n+4}$. **11.** $\frac{\sqrt{3(k^2-1)}}{\pi^3}$.

12. $\frac{q^2\sqrt{3}(m+\sqrt{3m(m+2n)})}{4m}$. **13.** $\frac{a\sqrt{4b^2-a^2\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{n}}}{2\left(a+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\sqrt{4b^2-a^2}\right)}$.

14. $nb^2\cos\frac{180^\circ(r+1)}{n}\frac{\sin\frac{360^\circ}{n}\operatorname{tg}\alpha}{48\sin^3\frac{180^\circ(r+1)}{n}}$.

15. $\frac{q}{16}(2+\sqrt{5})\sqrt{4b^2+3q^2}$.

16. $\sqrt{6}$. **17.** Сфера с диаметром AB.

18. Если O — центр шара, плоскость $\alpha\perp l$ и проходит через O, $\alpha\cap l=C$, то при $l\cap B=\{\varnothing\}$ искомое ГМТ — часть дуги окружности радиуса $\frac{OC}{2}$, при $l\cap B=\{M\}$ — окружность радиуса $\frac{R}{2}$ (R — радиус шара), при $l\cap B=\{[MN]\}$ — окружность радиуса $\frac{OC}{2}$.

19. Поверхность вращения дуги окружности из предыдущей задачи вокруг диаметра OC.

20. Сфера радиуса $\frac{R\sqrt{6}}{2}$, концентрическая данному шару.

21. $4nL^2\frac{\cos^2\alpha\sin^2\frac{\pi}{n}\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right)}{\left(1+2\operatorname{ctg}\alpha\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}$.

22. $\frac{2}{3}r^3\sin^2\alpha\sqrt{3\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha}$. **24.** $\frac{4\pi}{n}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$.

25. $\frac{8}{3}R^3\frac{\cos^4\frac{\psi}{2}}{\sin\alpha\cos\psi\sin^2\frac{\psi}{2}}$. **26.** $4S\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}}$.

27. $\frac{q^2(2-q)}{4}$, $0<q<2$. **28.** $a^2\frac{\sin^2 2\alpha\cos\alpha}{\sin^2 3\alpha}$. **29.** $\frac{2}{3}\pi R^2$ и $\frac{2}{9}\pi R^2$.

30. Если плоскость проходит через диагональ BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, то она должна делить ребро AA_1 пополам; $S_{\min}=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

31. $\frac{a^2h}{2}$.

32. $\dfrac{\frac{S}{2\pi} \pm a\sqrt{\frac{S}{2\pi} - R^2 - a^2}}{a \pm \sqrt{\frac{S}{2\pi} - R^2 - a^2}}$ (берутся только верхние или только нижние знаки одновременно).

33. $\frac{(a+b)^2}{24}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{a(a-2b)}$. **34.** 27.

35. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{z^2(3-z)}{4-z^2(3-z)}$, где $z = \frac{2(k+1) \pm \sqrt{k(k-2)}}{4k+1}$, $k > 2$.

36. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 3}}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 3} + \sqrt{3}\operatorname{tg}\beta}$. **37.** $abc\sin\alpha\sin\beta$. **38.** 9.

40. $\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\sin\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{cosec}\gamma}{1+\cos\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\gamma}$, $\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\sin\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{cosec}\beta}{1+\cos\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{ctg}\beta}$.

41. $\frac{R}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}$. **42.** $\frac{8}{3}\pi R^3\left(\frac{k^2-1}{k^3}\right)^2$. **44.** $\frac{\pi a^3}{24}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{\beta}{2}}{\sin^3\frac{\beta}{2}}$.

45. $\frac{1}{6}a^3$. **46.** $\dfrac{\sqrt[3]{8V\sin\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3-12\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$. **47.** 3. **48.** $\frac{R}{\sqrt{3}+1}$.

49. $\frac{R}{2}(\sqrt{2m+1} \pm \sqrt{2m-3})$, $m > \frac{3}{2}$. **50.** $\frac{1}{h}$.

53. $\dfrac{\frac{1}{2}a(H+h)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}} + \sqrt{H^2+\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}}}$.

54. $\frac{4n}{\pi}\dfrac{\operatorname{tg}2\varphi\cos^3\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)\cos^3\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)}{\cos2\varphi\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}$, где $\varphi = \frac{\pi}{2n}$.

55. $R \pm \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}}$, $R \geqslant \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$. **56.** $\left(1+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\right)^{3/2}$.

57. $\frac{6V}{h}\sin^2\varphi + \sqrt{3Vnh\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\cos2\varphi} + \frac{18V^2}{h^2}\operatorname{tg}\varphi\sin^2\varphi\sin2\varphi}$, где $\varphi = \frac{\pi}{2n}$.

58. 1) Правильные треугольники и шестиугольники, все углы которых равны 120°; 2) $\frac{3}{2}a\sqrt{2} - x\sqrt{6}$ при $x \geqslant \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (для правильных треугольников), $\frac{a\sqrt{2}}{2}+x\sqrt{6}$ и $\frac{a\sqrt{2}}{2}-x\sqrt{6}$ при $x<\frac{a\sqrt{3}}{6}$ (для шестиугольников).

59. $a\sqrt{2}$.

60. $\frac{S^{3/2}}{12n^{1/2}}\frac{\operatorname{ctg}2\varphi\left(\sin 2\varphi\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)\right)^{1/2}}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\right)^{3/2}}$, где $\varphi=\frac{\pi}{2n}$.

61. $S=a^2\sqrt{3}$, в $\frac{4}{3}$ раза. **62.** $\frac{1}{2}(k-1)\left(\frac{2}{k}-1\right)(k^2-5k+7)$.

63. $\frac{2(3+\sqrt{3})^3}{9\pi}$. **64.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{80}$.

67. $\frac{1}{3}\pi R^3\left[\frac{\cos^4\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(2+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]$.

69. $\frac{(1+\sqrt{(k\pm 1)^2+1})^3}{4(k\pm 1)^2}$ (знаки берутся одновременно верхние или одновременно нижние).

70. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **71.** $\frac{1}{1+2\operatorname{ctg}^2\alpha}\left(\frac{6v}{\pi}\right)^{1/3}$. **72.** $\arcsin\frac{\sqrt{ab}}{h}$.

73. $\frac{1}{2}\left(s_1+s_2+\frac{1}{2}\pi d^2\right)$. **74.** $\frac{d^3}{3\left(3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$.

75. $\frac{2h^3}{\sin 2\alpha(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}$. **81.** $a^3\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)$. **82.** $\frac{11S}{12}$.

85. Через середины двух непараллельных сечению ребер.

86. а) Луч, параллельный SE и проходящий через центр тяжести Q треугольника ASB; б) Сечение, проходящее через Q параллельно SG и SE.

88. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **90.** $\frac{4\pi}{3}a^2\frac{\sin^2\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$.

91. $V=\frac{1}{3}\sqrt{S_0(S^2-S_0^2)}\left[\frac{(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{S_3}\right]^{1/4}$, где $S=S_1+S_2+S_3$.

92. $\frac{R}{3}$. **95.** $\sqrt{3}$. **96.** $r_3\geqslant\frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$, где $r_1\geqslant r_2\geqslant r_3$.

97. Если C — проекция точки A на плоскость, то искомое ГМТ — окружность с диаметром BC.

98. $\frac{a\sqrt{34}}{8}$. **99.** $\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+2b+\sqrt{a^2-b^2}}$. **100.** $2R\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

102. $k=\left(\frac{r}{R}\right)^3=(5-2\sqrt{6})^3=385-78\sqrt{6}=\left(\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}\right)^3$.

103. $\frac{\pi}{3}$ или $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}$. **105.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{2}}{7}}$.

106. Если $AB \nparallel P$, а $D=(AB)\cap P$, то искомое ГМТ — окружность с центром D и радиусом $\sqrt{DA\cdot DB}$; если $(AB)\parallel P$, то искомое ГМТ — прямая, перпендикулярная проекции $[AB]$ на P, которая делит ее пополам и лежит в P.

108. $q=2$, $x=\frac{R}{2\sqrt{3}}$; $q\neq 2$, $x=R\frac{(q-1)-\sqrt{3q^2-6q+4}}{\sqrt{3}(q-2)}$.

110. $r=\frac{a}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\beta}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}$. **112.** $4R^2$.

113. $V=\frac{a^3}{12}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}$, $S=\frac{3a^2}{4}\sqrt{\frac{1}{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}-1}$.

114. $\frac{l}{2}\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$. **115.** $r=\frac{R}{2}$, $h=\frac{H}{2}$.

116. $\sqrt{\frac{2}{3}[a^2+b^2+\sqrt{(a^2+b^2)^2-3a^2b^2}]}$.

117. $\frac{3a^2h(h\sqrt{3}\cos\alpha-a\sin\alpha)}{(2h\sqrt{3}\cos\alpha+a\sin\alpha)^2}$. **118.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

119. $\frac{ah}{a+2h+\sqrt{2h^2+a^2}}$. **120.** $r\sqrt{6}+\sqrt{R^2-3r^2}$.

121. $\frac{18b^3h^3}{(h^2-b^2)\sqrt{4b^2-h^2}}$. **122.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **123.** $\frac{9}{\pi}$. **124.** $\frac{7}{2}$.

125. $\frac{b}{2}\frac{1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$. **126.** $\frac{1}{6}b^3\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$. **128.** $60°$.

129. $\frac{3a^2}{4\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}-1}}$. **130.** $\frac{5}{4}$. **131.** $\frac{11a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$. **132.** $\sqrt{\frac{S(\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha)}{3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}}$.

133. $\frac{8\pi R^2}{5\sqrt{5}}$ и $\frac{16\pi R^2}{5\sqrt{5}}$. **134.** $\frac{2}{25}$. **135.** $\frac{2\pi a^3\sin^2 2\alpha}{3}$.

136. $2\sin^4\alpha\cos^2\alpha$. **137.** $240\sqrt{2}-32$.

138. $\frac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta}{1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}}$.

139. $\sqrt{\frac{4b^2+4c^2-5a^2+4\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}}{3}}$.

140. $\frac{2ah}{\sqrt{4h^2+9a^2}}$. **141.** $\frac{a}{4}\left(2\operatorname{ctg}\alpha+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\alpha\right)$.

142. $2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$. **143.** $\frac{1}{6}b\sqrt{a^2+q^2}$. **144.** $\dfrac{d}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

145. $\frac{\pi}{3}$. **146.** $\dfrac{2b^3h^3}{3(h^2-b^2)\sqrt{2b^2-h^2}}$. **147.** $\dfrac{b^4}{2(b^2-1)}$.

148. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **149.** $\dfrac{h^3(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta)^{3/2}}{12\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

150. $\dfrac{1}{4\pi}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta\sin^3 2\beta$. **151.** $\dfrac{bh}{b+\sqrt{4h^2-3b^2}}$. **152.** $\dfrac{b}{2\sin 2\beta}$.

153. $\dfrac{b(2m+n)}{\sqrt{9b^2-12n^2}}$. **154.** $\dfrac{bh}{b+h}$. **155.** $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}(3+4\operatorname{ctg}^2\alpha)}$.

156. $\dfrac{\pi R^3\sqrt{7}}{3}$. **157.** $\frac{a}{h}(\sqrt{a^2+h^2}-a)$.

158. $\dfrac{R^2-r^2+4rR+2R\sqrt{4rR-r^2}}{2(R-r+\sqrt{4rR-r^2})}$. **159.** $\dfrac{2\pi R^2}{3r(R-r)}$.

160. $2R\sqrt{\cos\alpha}$. **161.** $\dfrac{a^2(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{18}$ и $\dfrac{a^2(13\sqrt{6}-17\sqrt{3})}{98}$.

162. $\dfrac{a(2l-a)}{2\sqrt{3l^2-a^2}}$. **163.** $\dfrac{8\sqrt{3}}{\pi}$. **164.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$. **165.** $\sqrt{\dfrac{4ab-a^2-b^2}{3}}$.

166. $\frac{R}{4}(\sqrt{21}-3)$. **167.** $\sin\alpha\sqrt{\dfrac{s}{3\sqrt{3}\cos\alpha}}$.

168. См. задачу 119.

169. $a=\dfrac{\sqrt{3R^2\pm\sqrt{9R^4-3S^2}}}{\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{S}{a}$. **170.** $\dfrac{a^2}{\sin\alpha}\left(1-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}}\right)$.

171. $2\arcsin\dfrac{1\pm\sqrt{1-\dfrac{2}{\sqrt[3]{a}}}}{2}$, $a\geqslant 8$.

172. $\dfrac{r}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(1+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\pm\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{3+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\right)$.

173. 5. **174.** $(2\pm\sqrt{3})r$. **175.** $a\dfrac{\sqrt{41}}{8}$. **176.** $\dfrac{4\pi}{27}a^2+\dfrac{2}{3\sqrt{3}}a^2$.

177. $\frac{1}{3}$. **178.** $2R\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$. **179.** $h\sqrt{\sqrt{\dfrac{n}{m}}-1}$.

180. $0<r\leqslant\dfrac{b\sqrt{2}}{6}$, $r=\dfrac{b\sqrt{2}}{4}$. **181.** $\dfrac{b}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}$. **182.** $\frac{3}{4}b$.

183. $\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}$. **184.** $\dfrac{\pi b^3}{9\sqrt{3}}$. **185.** $\dfrac{3\pi h^2}{2(2+\sqrt{5})^2}$. **186.** $a\sqrt{\dfrac{7}{8}}$.

187. $l\left(1+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$, $l\left(1-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$. **188.** $\frac{b}{8}\sqrt{15b^2+4l^2}$.

189. $\frac{1}{3}pR^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$. **190.** $\frac{2a}{3}$. **191.** $\frac{c^3(1+\sqrt{6}-\sqrt{3})}{8}$.

192. $\frac{2}{5}(8\sqrt{3}+\sqrt{37})r$. **193.** $\frac{\sqrt{6}\pm 1}{8}a$. **194.** $(5\sqrt{6}+\sqrt{22})R$.

195. $\frac{a}{2(1+\sqrt{6})}$. **196.** $\frac{19\sqrt{2}-6}{6}$. **197.** $\frac{3\sqrt{2}}{5}a^2$.

198. $\frac{\pi\sqrt{2}}{48}(53-7\sqrt{3})$. **199.** $\frac{3\sqrt{2}}{25}a^2$. **200.** $\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}r$. **201.** $\frac{13a}{6\sqrt{51}}$.

202. $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}a$. **203.** $\frac{1}{3}$. **204.** $\frac{a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3\left(3-\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)}}$.

205. $a\sqrt{\frac{2}{35}}$ или $a\frac{\sqrt{10}}{10}$. **206.** $\frac{\sqrt{a^4+64h^4}}{8h}$.

207. $\pm\frac{a}{2}+\frac{h}{a}\sqrt{2h^2+\frac{a^2}{2}}$. **208.** $\frac{3a}{14}$.

209. $\frac{3\sqrt{2}+1\pm\sqrt{10+6\sqrt{2}})R}{9}$.

210. $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{2}$ — радиусы первых двух шаров (2 решения); $\frac{25}{2(3+5\sqrt{2})}$ или $\frac{25}{2(11+5\sqrt{2})}$ — радиус третьего шара (соответственно).

211. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. **212.** $2\cos\alpha$. **213.** $r\sqrt{5}$. **214.** $\sqrt{S_2^2-\frac{1}{2}S_1^2}$.

215. $\frac{2\sqrt{11}}{49}b^2$. **216.** $\frac{2a}{15}\sqrt{16a^2+2h^2}$. **217.** $\frac{3b\sqrt{111}}{35}$.

218. $\frac{21\pm 3\sqrt{14}}{14}$. **219.** $\frac{3}{5}$. **220.** $2 \operatorname{arctg} \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{ac}$.

221. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}$. **222.** $\frac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}$. **223.** $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}$.

224. $\frac{\sqrt{3}}{12}(-b^2+2b\sqrt{b^2+3h^2})$. **225.** $1+\sqrt{\frac{7}{3}}$. **226.** $3\sqrt{3}$. **227.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

228. $\cos\varphi=-\frac{1}{18}$. **229.** $\cos\varphi=\frac{5\sqrt{3}}{18}$. **230.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

231. $\frac{49\sqrt{2}}{27\pi}$. **232.** $\frac{S_2}{h}$ при $S_2 < S_1$; $\frac{1}{h}\sqrt{\frac{4S_1^2-S_2^2}{3}}$ при $S_2 > S_1$.

233. $2(2+\sqrt{2})$. **234.** $\frac{11-\sqrt{105}}{4}$, $\frac{13-\sqrt{105}}{4}$, $\frac{\sqrt{105}}{2}$.

235. $\frac{S_2S_3\sqrt{3}}{\sqrt{4S_1^2-S_2^2}}$ при $S_1 < S_2$; $\frac{S_3\sqrt{4S_1^2-S_2^2}}{S_2\sqrt{3}}$ при $S_1 > S_2$.

236. $\frac{3\sqrt{6}}{8}a$. **237.** $\frac{a}{2}$. **238.** $\frac{a\sqrt{51}}{12}$. **239.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

240. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{15}}$ или $\operatorname{arctg} 2$.

241. $\frac{\pi}{2}-x$, $\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}$, где $x=\arccos(\sqrt{2}-1)$.

242. $\angle SAB=\angle SAC=90^\circ$, $\angle SBA=\angle SCA=45^\circ$ или $\angle SAB=$ $=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\angle SBA=135^\circ-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\angle SAC=90^\circ-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\angle SCA=$ $=45^\circ-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

243. $\operatorname{arcctg}(\cos\alpha)$, $\operatorname{arcctg}(\cos\alpha)$, $\operatorname{arcctg}(\cos\alpha)$, $\operatorname{arcctg}(\cos\alpha)$ или α, $45^\circ+\frac{\alpha}{2}$, 90°, $135^\circ-\frac{\alpha}{2}$.

244. На $\frac{2S}{\sqrt{3}}$. **245.** $7\sqrt{2}$. **246.** $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. **247.** $\frac{4}{3}a^2$. **248.** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

249. $\frac{8}{3}R^2\sqrt{6}$. **250.** $\frac{9}{16}$. **251.** $\frac{4}{3}a\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. **252.** 2. **253.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

254. $\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$. **255.** $\frac{35\sqrt{14}}{16}a^3$. **256.** $\frac{38}{\sqrt{5}}$. **257.** $3a^3$ или $2\sqrt{5}a^3$.

258. $\frac{57}{\sqrt{2}}$. **259.** $\frac{3\sqrt{6}}{40}$. **260.** $\frac{3\sqrt{17}b^2}{16}$. **261.** $\frac{2}{\sqrt{7}}a$. **262.** $\frac{b^2\sqrt{73}}{12\sqrt{3}}$.

263. $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. **264.** $\arccos\frac{9}{\sqrt{93}}=\operatorname{arctg}\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

265. $2:1$ и $(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+1)$. **266.** $\operatorname{arctg}\frac{6}{7}$.

267. $(\sqrt{6}-1):(\sqrt{6}+1)$ и $(\sqrt{6}+2):(\sqrt{6}-2)$. **268.** $2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

269. $\frac{a\sqrt{2}}{5\pm\sqrt{11}}$. **270.** $\frac{27\sqrt{3}}{16\pi}$. **271.** $\frac{5\sqrt{3}\pm 3}{24\sqrt{2}}a$. **272.** $(3\sqrt{2}-4):1$.

273. $1:7$. **274.** $112:131$. **275.** $13:41$. **276.** $\frac{8}{375}$. **277.** $24:343$.

278. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **279.** $8:125$. **280.** $1:1:\frac{2}{2\sqrt{3}+3}=1:1:\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}-2\right)$.

281. $1:\operatorname{tg}^2\alpha:1$. **282.** $4\sqrt{2}r$. **283.** $\frac{n-1}{n+1}:1:1$.

284. $\frac{5}{\sqrt{3}}$, $4\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{20}{3}\sqrt{\frac{2}{11}}$. **285.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **286.** $\frac{5\sqrt{6}}{2}$, $\frac{20}{17}\sqrt{51}$.

287. $\frac{4\sqrt{2}}{5}$. **288.** $25\sqrt{\frac{5}{3}}\pi$. **289.** $\frac{30\pi}{\sqrt{22}}$. **290.** $\frac{16\pi a^2}{3\sqrt{21}}$. **291.** $\frac{49}{\sqrt{3}}\pi$.

292. $\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\frac{a}{2\sqrt{6}}$. **293.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **294.** a, $\frac{a}{2\sqrt{5}}$. **295.** $\frac{a\sqrt{5}}{4}$.

296. $\frac{1}{12}\left(\frac{5n+3}{n+1}\right)^3$. **297.** $\frac{1}{12}\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^3$. **298.** $\frac{4(m+1)^2}{m^2+m+1}$.

299. $\frac{4\sqrt{2}}{675}a^3$. **300.** $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi)$.

301. $\arcsin\frac{2\sin\alpha\sin\varphi}{\sqrt{3}}$. **302.** $\arccos(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\varphi)$.

303. $\arcsin\frac{\sqrt{3}\sin\beta}{2\sin\alpha}$. **304.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$, $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **305.** $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

306. $\frac{1}{2}\left((-1)^n\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9}+\pi n\right)$, $n=0, 1$. **307.** $\arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}$.

308. $\arccos(\sqrt{5}-2)$. **309.** $\frac{(n+1)(m-1)}{(m+1)(n-1)}$. **310.** $\arccos(\sqrt{5}-2)$.

311. $\frac{(m+1)(n-1)}{(n+1)(m-1)}$. **312.** $\frac{3\sqrt{2}-2}{21}V$. **313.** $\frac{V}{14}$. **314.** $\frac{V}{2(1+\cos\alpha)}$.

315. $\frac{\sqrt{2}-1}{6}V$. **316.** $\frac{1}{3}$. **317.** $\frac{2}{5}$. **318.** $\frac{1}{4}$. **319.** $\frac{1}{3}$. **320.** $\frac{4+3\sqrt{6}}{19}$.

321. $\frac{6}{5}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$. **322.** $(3\sqrt{2}\pm\sqrt{3})$. **323.** $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$.

324. 1) $\frac{1}{2}a^3$, 2) $\frac{a}{\sqrt{6}}$. **325.** 1) 2, 2) $\sqrt{\frac{2}{15}}a$. **326.** 1) $\frac{\sqrt{6}}{8}a^3$, 2) $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

327. 1) a, 2) $\frac{4\sqrt{5}}{15}a$. **328.** 1) a, 2) $\frac{\sqrt{15}}{4}a$. **329.** 1) $\frac{\sqrt{5}}{3}a$, 2) $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

330. 1) $\frac{\sqrt{15}}{3}a$, 2) $\sqrt{\frac{5}{8}}a$. **331.** 1) $\frac{\sqrt{5}}{3}a$, 2) $\frac{a}{\sqrt{5}}$.

332. 1) $\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{4\sin\beta}a$, 2) $\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{4(\sin\alpha+\sin\beta)}a$. **333.** 1) a, 2) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$.

334. 1) $\frac{5\sqrt{3}}{9}h$, 2) $\frac{2}{5}h$. **335.** 1) $\frac{6}{\sqrt{23}}a$, 2) $\frac{6}{5\sqrt{23}}a$. **336.** $\frac{9\pi}{4\sqrt{2}}$.

337. $\frac{20\pi}{9\sqrt{3}}$. **338.** $\frac{125\pi}{18}$. **339.** $\frac{9\pi}{4\sqrt{2}}$. **340.** $\frac{\sqrt{29}}{3}a$. **341.** $\frac{\sqrt{23}}{6}a$.

342. $\frac{\sqrt{14}}{3}a$. **343.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}a$. **344.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}a^3$. **345.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$. **346.** $16\sqrt{3}a^3$.

347. $\frac{9\sqrt{3}}{4}a^3$. **348.** $3a$. **349.** $\arccos\left(-\frac{1}{71}\right)=2\operatorname{arctg}\frac{6}{\sqrt{35}}$.

350. $\frac{4R^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3(1+\sin^2\alpha)^{3/2}}$. **351.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

352. $\arcsin 2(\sqrt{2}-1)$. **353.** $\arcsin\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

354. $\arcsin(2\sqrt{3}-3)$. **355.** $\arcsin\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$. **356.** $2\sqrt{2}a$.

357. $\frac{4}{9}abc$. **358.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **359.** $\frac{1}{2}abc$. **360.** $\sqrt{\frac{51}{2}}$. **361.** $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

362. $\sqrt{57}$. **363.** $\sqrt{2}$. **364.** $3\sqrt{2}S$. **365.** $\frac{4a^2}{\sqrt{17}}$. **366.** $\sqrt{\frac{11}{3}}S$.

367. $\frac{8S}{\sqrt{3}}$. **368.** а) $\frac{9V}{125}$; б) $\frac{V}{12}$. **369.** а) $\frac{24V}{125}$; б) $\frac{16V}{81}$.

370. а) $\frac{3V}{32}$; б) $\frac{V}{9}$. **371.** а) $\frac{27V}{128}$ или $\frac{9(5\sqrt{3}-6)V}{128}$; б) $\frac{2V}{9}$.

372. $1:3$. **373.** $5:1$. **374.** $16:21$. **375.** $32:15$.

376. а) $\frac{a^2}{4}$; б) $\frac{7a^2}{32}$. **377.** а) $\frac{S}{8}$; б) $\frac{S}{8}$.

378. а) $\frac{a^2}{4}$; б) $\frac{7a^2}{32}$. **379.** а) $\frac{S}{8}$; б) $\frac{S}{10}$.

380. а) $0 \leqslant h \leqslant \frac{3}{2}$, $V = \frac{3\pi h}{16}$; $\frac{3}{2} \leqslant h \leqslant 3$, $V = \frac{\pi h(6-h)^2}{108}$; б) $\frac{8\pi}{27}$.

381. а) $0 \leqslant h \leqslant 3$, $V = \frac{3\pi}{16}h\left(7-\frac{h}{9}\right)^2$; $3 \leqslant h \leqslant 9$, $V = 3\pi h\left(2-\frac{h}{9}\right)^2$; б) 32π.

382. а) $0 \leqslant h \leqslant 6$, $V = \frac{\pi h}{4}\left(4-\frac{h}{3}\right)^2$; $6 \leqslant h \leqslant 9$, $V = \frac{\pi h}{9}(9-h)^2$; б) $\frac{64\pi}{9}$.

383. а) $0 \leqslant h \leqslant \frac{8}{3}$, $V = \frac{3\pi h}{16}\left(3-\frac{h}{2}\right)^2$; $\frac{8}{3} \leqslant h \leqslant 4$, $V = \frac{75\pi h}{16}\left(1-\frac{h}{4}\right)^2$; б) $\frac{3\pi}{2}$.

384. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **385.** $\arcsin\sqrt{\frac{3}{31}}$. **386.** $\frac{2a\sqrt{7}}{3}$. **387.** $\arcsin\sqrt{\frac{3}{31}}$.

388. $\frac{2R\sqrt{6}}{9}$. **389.** $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}$. **390.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. **391.** $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2}{17}}$.

392. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$. **393.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **394.** $2\sqrt{6}$. **395.** $6\sqrt{3}$. **396.** 30. **397.** $1:1$.

398. 50. **399.** $14:11$. **400.** $\frac{3\sqrt{3}}{256}a^3$. **401.** $\frac{3\sqrt{3}}{50}a^3$. **402.** $\frac{\sqrt{3}}{98}a^3$.

403. $\frac{9}{50}a^3$. **404.** $\sqrt{2}$. **405.** $\frac{5\sqrt{3}}{48}a^3$. **406.** $\sqrt{6}$. **407.** $\frac{29\sqrt{3}}{216}a^3$.

408. $\frac{R^3\sqrt{3}(1+2\cos\alpha)^2}{4(1-2\cos\alpha)\cos\alpha}$; а) $1:2$; б) $3:1$.

409. $\frac{8R^3(\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,\alpha)^2}{9(\mathrm{tg}\,\alpha-\sqrt{3})}$; а) $(2-\sqrt{3}):\sqrt{3}$; б) $1:7$.

410. $\frac{R^3\sqrt{3}(1+2\cos\alpha)^2}{6(1-2\cos\alpha)\cos\alpha}$; а) $1:2$; б) $3:22$.

411. $\dfrac{8R^3(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha+1)^2}{3\sqrt{3}(3\,\mathrm{tg}\,\alpha-1)}$; а) $1:1$; б) $2:1$.

412. $\dfrac{\sqrt{2}}{7}$; $3:1$, считая от A. **413.** 4; $3:13$, считая от A.

414. $\dfrac{2}{3}$; $1:3$, считая от D. **415.** 6; $2:7$, считая от D.

416. $\dfrac{3\sqrt{87}}{8\sqrt{2}}$; $a_{\min}=\dfrac{2}{3}(\sqrt{11}-\sqrt{2})$.

417. $\dfrac{20\sqrt{22}}{9\sqrt{3}}$ при $\angle SEF>90°$; $4\sqrt{6}$ при $\angle SEF<90°$;

$a_{\min}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(\sqrt{7}-1)$.

418. $\dfrac{\sqrt{11}}{12}$; $a_{\min}=\dfrac{2\sqrt{2}-2}{3}$.

419. $\dfrac{32}{\sqrt{3}}$ при $\angle SEF>90°$; 28 при $\angle SEF<90°$;

$a_{\min}=\dfrac{2}{3}(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

420. $\dfrac{\pi}{20}$. **421.** $\dfrac{16\pi}{45}$. **422.** $\dfrac{28\pi}{1215}$. **423.** $\dfrac{27\pi}{80}$. **424.** $\dfrac{7}{6}$. **425.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

426. $\dfrac{7\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})}$. **427.** $\dfrac{72}{73}$. **428.** 10. **429.** $\dfrac{121}{\sqrt{3}}$. **430.** 22.

431. $\dfrac{225}{\sqrt{3}}$. **432.** $45°$. **433.** $60°$. **434.** $30°$. **435.** $\arcsin\dfrac{3}{5}$.

436. $63\sqrt{6}\pi$. **437.** $10\sqrt{3}\pi$. **438.** $\dfrac{37\sqrt{42}}{27}\pi$. **439.** $\dfrac{\pi}{2}$. **440.** 5.

441. 6. **442.** $\dfrac{9}{\sqrt{5}}$. **443.** $\dfrac{144}{\sqrt{239}}$. **444.** $\dfrac{45\sqrt{3}}{1024}m^3$. **445.** $\dfrac{8d}{9}$.

446. $\dfrac{16\sqrt{5}}{81}b^3$. **447.** $\dfrac{14l}{3}$. **448.** $\dfrac{16}{11}\left(\arccos\dfrac{19}{30}+\dfrac{7\sqrt{11}}{135}\right)$.

449. $\dfrac{1}{4}\left(\arccos\dfrac{35}{37}+\dfrac{12}{37}-\dfrac{2}{27}\right)$. **450.** $\dfrac{9}{11}\left(\arccos\dfrac{19}{30}+\dfrac{7\sqrt{11}}{135}\right)$.

451. $\arccos\dfrac{35}{37}+\dfrac{12}{37}-\dfrac{2}{27}$. **452.** $\dfrac{63}{4}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. **453.** $\dfrac{200}{3}\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

454. $\dfrac{96}{5\sqrt{13}}$. **455.** $\dfrac{405\sqrt{2}}{4}$. **456.** $S=45$, $d=\dfrac{\sqrt{165}}{5}$.

457. $AB=3\sqrt{26}$, $MN=15$, $d=6\sqrt{\dfrac{7}{13}}$. **458.** $S=150$, $d=3\sqrt{\dfrac{11}{5}}$.

459. $AB=10\sqrt{13}$, $MN=30$, $d=10\sqrt{\dfrac{14}{13}}$. **460.** $193:40$.

461. $13:2$. **462.** $617:5$. **463.** $13:2$. **464.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$. **465.** $\dfrac{16\sqrt{6}}{81}$.

466. $\frac{\sqrt{6}}{10}$. **467.** $\frac{11\sqrt{3}}{90}$. **468.** $\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{3}}$. **469.** $\frac{7}{3}\sqrt{\frac{21}{2}}$. **470.** $\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{3}}$.

471. $\frac{14}{3}\sqrt{\frac{14}{3}\sqrt{10}}$. **472.** $\frac{125\pi}{256}$. **473.** $\frac{343\sqrt{13}}{18}\pi$. **474.** $\frac{125\pi}{4}$.

475. $\frac{\sqrt{7}\pi}{9}$. **476.** $\frac{2}{3}$. **477.** $\frac{5}{18}$. **478.** $\frac{2}{3\sqrt[4]{3}}$. **479.** $20\sqrt{2}$. **480.** 2.

481. $\frac{8}{39}$. **482.** 8. **483.** $\frac{48}{73}$. **484.** $8\sqrt{2}$. **485.** $R=\frac{2}{5}$, $d=\frac{\sqrt{66}}{10}$.

486. $\frac{5}{3}$. **487.** $R=3$, $d=\sqrt{35}$. **488.** $\frac{12}{5}$ и $\frac{3}{5}$. **489.** $\frac{7}{8}$ и $\frac{1}{8}$.

490. $\frac{3}{7}$ и $\frac{13}{35}$. **491.** $\frac{7}{3}$ и $\frac{5}{3}$. **492.** $\sqrt{3}$. **493.** $\sqrt{3}-1$. **494.** $\frac{3}{4}$.

495. $2\sqrt{3}-2$. **496.** $\frac{40}{3}$. **497.** 12. **498.** $\frac{27}{20}$. **499.** 31.

500. $\arcsin\frac{1}{9}=\arccos\frac{4\sqrt{5}}{9}$. **501.** $\frac{3}{8}$, $\frac{54}{49}$. **502.** $\frac{23\sqrt{10}}{2}$, $\frac{69\sqrt{10}}{2}$.

503. $\frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, $8\sqrt{\frac{5}{3}}$. **504.** $51\sqrt{5}$, $102\sqrt{5}$. **505.** $\frac{\sqrt{21}}{4}$. **506.** $\frac{25\sqrt{3}}{16}$.

507. $\frac{21\sqrt{3}}{100}$. **508.** $\frac{15\sqrt{3}}{8}$. **509.** $\frac{5\sqrt{6}}{36}$. **510.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. **511.** $\frac{16}{75\sqrt{3}}$.

512. $\frac{1}{9}$. **513.** $\frac{3}{4\sqrt{2}}$. **514.** $V=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **515.** $V=\frac{12}{5}$, $R=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

516. $V=18\sqrt{3}$, $R=\sqrt{7}$. **517.** $V=\frac{9\sqrt{6}}{5}$, $R=\frac{\sqrt{7}}{2}$. **518.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

519. 70π. **520.** $\frac{12\pi}{5\sqrt{5}}$. **521.** 9π. **522.** $\frac{441\pi}{8}$. **523.** $98\pi\sqrt{6}$.

524. $\frac{441\pi}{64}$. **525.** $\frac{49\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$. **526.** 168π.

527. $1:1:1$, $V_1=V_3=8$, $V_2=32$, $h=\frac{12}{5}$.

528. $1:1:1$, $V_1=V_3=\frac{1}{2\sqrt{6}}$, $V_2=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $h=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

529. $1:1:1$, $V_1=V_3=1$, $V_2=4$, $h=\frac{6}{5}$.

530. $1:1:1$, $V_1=V_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $V_2=\frac{4}{\sqrt{3}}$, $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

531. $\frac{9\pi\sqrt{14}}{20}$. **532.** $\frac{15\sqrt{7}}{8}\pi$. **533.** $\frac{\pi\sqrt{7}}{9}$. **534.** $\frac{24\pi}{5\sqrt{5}}$. **535.** $\frac{3}{8}$.

536. 2100. **537.** $\frac{3}{4}$. **538.** $\frac{132}{25}$. **539.** $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$, $\arccos\frac{3}{\sqrt{17}}$, $4\sqrt{3}$.

540. 8, $\frac{\pi}{3}$, $3\sqrt{13}$. **541.** $\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{7}}$, $\sqrt{10}$.

542. $5\sqrt{6}$, $\arccos\frac{1}{5}$, 12. **543.** 1) $3\sqrt{\frac{13}{2}}$, 2) $\frac{9}{\sqrt{11}}$, 3) $\frac{78}{\sqrt{197}}$.

544. 1) $6\sqrt{\frac{13}{17}}$, 2) $\frac{16}{\sqrt{77}}$, 3) $\frac{36}{\sqrt{93}}$. **545.** 1) $6\sqrt{\frac{17}{13}}$, 2) $\frac{18}{\sqrt{53}}$, 3) $\frac{66}{\sqrt{173}}$.

546. 1) $2\sqrt{5}$, 2) $\frac{16}{\sqrt{101}}$, 3) $\frac{28}{\sqrt{77}}$. **547.** $\frac{a}{2\sqrt{7}}$, $\frac{2a(2\sqrt{21}-9)}{3}$.

548. $\frac{3a}{4}$, $\frac{a(\sqrt{55}-\sqrt{33})}{16}$. **549.** $\frac{a}{4}$, $\frac{a\sqrt{13}(8\sqrt{3}-9)}{222}$.

550. $\frac{5a}{8}$, $\frac{a\sqrt{33}(2-\sqrt{3})}{16}$. **551.** $\frac{3(17+10\sqrt{3})r}{44}$. **552.** $\frac{9r}{4}$.

553. $\frac{(13+5\sqrt{7})r}{8}$. **554.** $\frac{(17+7\sqrt{7})r}{12}$. **555.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$, $\frac{a(\sqrt{3}\pm 1)}{4}$.

556. $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. **557.** $\frac{3a^2}{16}$, $\frac{a(3\pm\sqrt{3})}{8}$.

558. $a^2\sqrt{2}$, $\frac{a\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$. **559.** h, $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{2\pi}{3}$.

560. a, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$. **561.** h, $\frac{\pi}{3}$, $\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

562. $a\sqrt{3}$, $\arccos\frac{1}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **563.** $\frac{39}{4}$, $\frac{\pi}{6}$. **564.** $\frac{13}{12}$, $\frac{\pi}{6}$.

565. $\frac{117}{2}$, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **566.** $\frac{13\sqrt{2}}{4}$, $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

567. $\frac{\sqrt{30}}{4}$, $\frac{\pi\sqrt{30}}{28}$. **568.** $\frac{12\sqrt{111}}{37}$, $\frac{48\sqrt{15}}{65}$. **569.** $\frac{\sqrt{30}}{4}$, $\frac{\pi\sqrt{30}}{28}$.

570. $\frac{12\sqrt{111}}{37}$, $\frac{48\sqrt{15}}{65}$. **571.** $\arccos\frac{7}{2\sqrt{19}}$, $\frac{a\sqrt{6}}{9}$, $a\sqrt{\frac{11}{6}}$.

572. $\arccos\frac{5}{6}$, $\frac{a}{\sqrt{22}}$, $\frac{a}{8}\sqrt{\frac{451}{2}}$. **573.** $\arccos\frac{5}{2\sqrt{19}}$, $\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{51}}$, $\frac{a\sqrt{19}}{4\sqrt{2}}$.

574. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{a}{\sqrt{6}}$, $\frac{a}{8}\sqrt{\frac{209}{6}}$. **575.** 1) $\frac{77}{36}$, 2) $\frac{40\sqrt{2}}{33}$, 3) $\arccos\frac{7}{11}$.

576. 1) $\frac{16\sqrt{3}}{81}$, 2) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$, 3) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

577. 1) $\frac{77}{36}$, 2) $\frac{4\sqrt{2}}{33}$, 3) $\arccos\frac{7}{11}$.

578. 1) $\frac{16\sqrt{3}}{81}$, 2) $\frac{8\sqrt{6}}{9}$, 3) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **579.** 1) $\frac{84\sqrt{39}}{55}$, 2) $\frac{1632\sqrt{3}}{275}$.

580. 1) $\frac{3\sqrt{11}}{28}$, 2) $\frac{20\sqrt{3}}{21}$. **581.** 1) $\frac{21\sqrt{39}}{880}$, 2) $\frac{102\sqrt{3}}{275}$.

582. 1) $\frac{6\sqrt{11}}{7}$, 2) $\frac{80\sqrt{3}}{21}$. **583.** 1) $\frac{49\sqrt{65}}{576}$, 2) $\frac{13}{2\sqrt{10}}$.

584. 1) $\frac{25\sqrt{23}}{99}$, 2) $\frac{7}{8}$. **585.** 1) $\frac{289\sqrt{65}}{729}$, 2) $\frac{34}{3\sqrt{10}}$.

586. 1) $\frac{676\sqrt{23}}{891}$, 2) $\frac{25}{12}$.

587. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P \in BC$, $BP = \frac{1}{3}BC$.

588. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P \in BC$, $PB = \frac{2}{5}BC$.

589. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P \in BC$, $BP = \frac{BC}{4}$.

590. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P \in BC$, $BP = \frac{BC}{9}$.

591. 1) $\arccos\frac{11}{32}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{301}}$; 3) 2.

592. 1) $\arccos\frac{47}{121}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{259}}$; 3) $\frac{8}{3}$.

593. 1) $\arccos\frac{11}{32}$; 2) $\frac{72}{\sqrt{301}}$; 3) 4.

594. 1) $\arccos\frac{47}{121}$; 2) $\frac{72}{\sqrt{259}}$; 3) $\frac{16}{3}$.

595. $R \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)r$, $\dfrac{R\left(R + r - \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}}\right)}{r + \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}} - R}$.

596. $R \geqslant r\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\dfrac{R\left(R - r - \sqrt{R^2 - 2Rr - \frac{r^2}{3}}\right)}{r - \sqrt{R^2 - 2Rr - \frac{r^2}{3}} + R}$.

597. $R \geqslant r\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)$, $\dfrac{R\left(R + r + \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}}\right)}{\sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}} + R - r}$.

598. $R \geqslant r\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\dfrac{R\left(R - r + \sqrt{R^2 - 2Rr - \frac{r^2}{3}}\right)}{r + R + \sqrt{R^2 - 2Rr - \frac{r^2}{3}}}$.

599. 1) $\frac{14}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}$; 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$; 3) $\arcsin\frac{3}{5}$.

600. 1) $\frac{25}{27}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{15}$; 3) $\arcsin\frac{12}{5\sqrt{17}}$.

601. 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\arcsin\frac{12}{5\sqrt{10}}$.

602. 1) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

603. 1) $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{26}{99}$; 3) $\frac{22\sqrt{14}}{35\sqrt{15}}$.

604. 1) $\frac{5}{7}$ и $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{38}{305}$; 3) $\frac{107\sqrt{34}}{119\sqrt{35}}$.

605. 1) $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{26}{99}$; 3) $\frac{22\sqrt{14}}{35\sqrt{15}}$.

606. 1) $\frac{5}{7}$ и $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{38}{305}$; 3) $\frac{107\sqrt{34}}{119\sqrt{35}}$.

607. 1) $\frac{56}{3}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $\frac{8}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

608. 1) $\frac{28\sqrt{2}}{8}$; 2) 4; 3) $\frac{4}{3}(4-\sqrt{2})$.

609. 1) $\frac{2}{3}$; 2) 3; 3) $\frac{4}{3}(\sqrt{5}-2)$.

610. 1) 2; 2) $\frac{18}{\sqrt{5}}$; 3) $4(\sqrt{5}-2)$.

611. 1) 8; 2) $\arccos\frac{3}{5}$; 3) $\frac{24}{13}$.

612. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\arccos\frac{23}{27}$; 3) $\frac{8}{5\sqrt{2}}$.

613. 1) 8; 2) $\arccos\frac{3}{5}$; 3) $\frac{24}{13}$.

614. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\arccos\frac{23}{27}$; 3) $\frac{8}{5\sqrt{2}}$.

615. $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $R = \sqrt{337/2}$.

616. $V = \frac{110\sqrt{2}}{3}$, $R = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{129}{2}}$.

617. $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, $R = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{33}{2}}$.

618. $V = 112\sqrt{2/3}$, $R = 11\sqrt{3/2}$.

619. а) $\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}$; б) $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

620. а) $\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}$; б) $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

621. а) $\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}$; б) $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

622. а) $\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}$; б) $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

623. $\arcsin\frac{24}{25}$, 25, $\frac{320}{3}$. **624.** $\pi-\arcsin\frac{24}{25}$, 15, 36.

625. $\arcsin\frac{24}{25}$, 50, 400. **626.** $\pi-\arcsin\frac{24}{25}$, 10, 32.

627. 7, 24, $\sqrt{\frac{7}{2}}$. **628.** 7, 32, $\frac{\sqrt{35}}{2}$. **629.** 11, 42, $\sqrt{\frac{88}{7}}$.

630. 11, 36, $\sqrt{\frac{22}{3}}$. **631.** а) $\frac{7\sqrt{17}}{24}$; б) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

632. а) $\frac{7\sqrt{17}}{24}$; б) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

633. а) $\frac{7\sqrt{17}}{24}$; б) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

634. а) $\frac{7\sqrt{17}}{24}$; б) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

635. $V=\frac{10\sqrt{11}}{9}$, $\alpha=2\arcsin\sqrt{\frac{11}{27}}$, $R=\sqrt{10}$.

636. $V=\frac{7\sqrt{7}}{18}$, $\alpha=2\arcsin\sqrt{\frac{45}{73}}$, $R=\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

637. $V=\frac{256\sqrt{2}}{243}$, $\alpha=2\arcsin\sqrt{\frac{13}{45}}$, $R=\frac{\sqrt{130}}{3}$.

638. $V=1$, $\alpha=2\arcsin\sqrt{\frac{13}{22}}$, $R=\frac{\sqrt{65}}{4}$.

639. $R=2\sqrt{\frac{6}{5}}$, $BC=9$, $CD=\frac{24}{5}$, $\varphi=2\arcsin\sqrt{\frac{77}{87}}$.

640. $R=3\sqrt{\frac{5}{2}}$, $BC=16$, $CD=\frac{72}{7}$, $\varphi=2\arcsin\sqrt{\frac{272}{290}}$.

641. $R=4\sqrt{\frac{21}{5}}$, $BC=18$, $CD=\frac{48}{5}$, $\varphi=2\arcsin\sqrt{\frac{589}{609}}$.

642. $R=4\sqrt{\frac{10}{3}}$, $BC=17$, $CD=\frac{90}{7}$, $\varphi=2\arcsin\sqrt{\frac{123}{138}}$.

643. 1) $\arccos\frac{3}{5}$; 2) 3; 3) $\frac{21\sqrt{39}}{100}$, 4) $\frac{7\sqrt{39}}{104}$.

644. 1) $\arccos\frac{3}{5}$; 2) 3/4; 3) $\frac{21\sqrt{39}}{200}$, 4) $\frac{7\sqrt{39}}{208}$.

645. 1) $\arccos\frac{3}{5}$; 2) 3; 3) $\frac{21\sqrt{39}}{100}$, 4) $\frac{7\sqrt{39}}{104}$.

646. 1) $\arccos\frac{3}{5}$; 2) 4/3; 3) $\frac{7\sqrt{39}}{50}$, 4) $\frac{7\sqrt{39}}{156}$.

647. 1) $\arcsin\frac{6}{7}$; 2) $\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{6}$; 3) $216\sqrt{6}/7$.

648. 1) $\arcsin\frac{4}{7}$; 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{2}}$; 3) $\frac{80\sqrt{10}}{7}$.

649. 1) $\arcsin\frac{3}{4}$; 2) $\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}}$; 3) $\frac{243\sqrt{7}}{8}$.

650. 1) $\arcsin\frac{2}{3}$; 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{5}}$; 3) $\frac{14\sqrt{35}}{3}$.

651. $\frac{5}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{25}{2\sqrt{2}}$. **652.** 4, $2\sqrt{2/5}$, 16.

653. $\frac{7}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{35}}{4}$, $\frac{49}{2\sqrt{2}}$. **654.** $\frac{9}{\sqrt{2}}$, $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}$, $\frac{81}{2\sqrt{2}}$.

655. $SA = \frac{a\sqrt{5}}{3}$, $SD = a\sqrt{\frac{3}{7}}$, $R = \frac{2\sqrt{3}}{7+\sqrt{7}}$.

656. $SA = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, $SD = a\sqrt{\frac{2}{5}}$, $R = \frac{a\sqrt{2}}{5+\sqrt{5}}$.

657. $SA = \frac{a\sqrt{17}}{3}$, $SD = a\sqrt{\frac{5}{13}}$, $R = \frac{a\sqrt{15}}{13+\sqrt{39}}$.

658. $SA = \frac{a\sqrt{26}}{6}$, $SD = a\sqrt{\frac{3}{8}}$, $R = \frac{a}{\sqrt{24}}$.

659. $A_1A_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $O_2L = \frac{1}{2}$, $\rho(L, \Pi) = \frac{2}{3}$, $\rho(A, \Pi) = \frac{58}{15}$.

660. $AT = 14/\sqrt{3}$, $O_1L = 2$, $\rho(L, \Pi) = 2/3$, $\rho(A, \Pi) = 10/9$.

661. $A_1A_2 = 4\sqrt{3}$, $O_1L = 2$, $\rho(L, \Pi) = 2/3$, $\rho(A, \Pi) = 58/15$.

662. $TK_2 = 13\sqrt{3}/4$, $O_2L = 1/2$, $\rho(L, \Pi) = 2/3$, $\rho(A, \Pi) = 10/9$.

663. а) $AA_1 = d\sqrt{2}$, $AB = d(\sqrt{2}+1)$, $BC = d(2+\sqrt{2})$;

б) $\arccos\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{79+52\sqrt{2}}}$; в) $R = d\left(\frac{3+3\sqrt{2}-\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{4}\right)$.

664. а) $AB = d\sqrt{2}$, $AA_1 = d(\sqrt{2}+1)$, $AD = d(2+\sqrt{2})$;

б) $\arccos\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{79+52\sqrt{2}}}$; в) $R = d\left(\frac{3+3\sqrt{2}-\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{4}\right)$.

665. а) $AD = d\sqrt{2}$, $AA_1 = d(\sqrt{2}+2)$, $AB = d(\sqrt{2}+1)$;

б) $\arccos\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{171+120\sqrt{2}}}$; в) $R = d\left(\frac{3+3\sqrt{2}-\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{4}\right)$.

666. а) $AD = d(\sqrt{2}+1)$, $AA_1 = d\sqrt{2}$, $AB = d(\sqrt{2}+2)$;

б) $\arccos\frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{34+23\sqrt{2}}}$; в) $R = d\left(\frac{3+3\sqrt{2}-\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{4}\right)$.

667. $d = 4$, $v_{\min} = \frac{64\pi}{3}$, $v_{\max} = \left(\frac{136}{3} - 16\sqrt{2}\right)\pi$.

668. $d = 9$, $v_{\max} = (495 - 90\sqrt{3})\pi$, $v_{\min} = 243\pi$.

669. $d = 13$, $v_{\max} = \left(\frac{4537}{3} - 182\sqrt{11}\right)\pi$, $v_{\min} = \frac{2197}{3}\pi$.

670. $d=14,\ v_{\max}=\left(\frac{5516}{3}-224\sqrt{2}\right)\pi,\ v_{\min}=\frac{2744}{3}\pi.$

671. $a=R\operatorname{ctg}\alpha,\ b=\frac{R\cos\alpha}{1-\sin\alpha},\ c=\frac{R\cos\alpha}{2-\sin\alpha},$

$$v=\frac{2R^3}{3}\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(2-\sin\alpha)\sin\alpha};\ \frac{\pi}{3},\ v_{\min}=2R^3.$$

672. $a=R\operatorname{tg}\beta,\ b=R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},\ c=\frac{R\sin\beta}{2-\cos\beta},$

$$v=\frac{2R^3}{3}\cdot\frac{(1+\cos\beta)^2}{(2-\cos\beta)\cos\beta};\ \frac{\pi}{3},\ v_{\min}=2R^3.$$

673. $a=R\operatorname{ctg}\alpha,\ b=\frac{R\cos\alpha}{1-\sin\alpha},\ c=\frac{R\cos\alpha}{2-\sin\alpha},$

$$v=\frac{2R^3}{3}\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(2-\sin\alpha)\sin\alpha};\ \frac{\pi}{6},\ v_{\min}=2R^3.$$

674. $a=R\operatorname{tg}2\beta,\ b=R\operatorname{ctg}\beta,\ c=\frac{R\sin 2\beta}{2-\cos 2\beta},$

$$v=\frac{2R^3}{3}\cdot\frac{(1+\cos 2\beta)^2}{(2-\cos 2\beta)\cos 2\beta};\ \frac{\pi}{6},\ v_{\min}=2R^3.$$

675. $\frac{KO}{DO}=2,\ R=\frac{\sqrt{211}}{12\sqrt{2}},\ l=\frac{19}{12}.$

676. $\frac{KO}{CO}=2,\ R=\frac{\sqrt{211}}{6\sqrt{2}},\ l=\frac{19}{6}.$

677. $\frac{KO}{AO}=2,\ R=\frac{\sqrt{211}}{4\sqrt{2}},\ l=\frac{19}{4}.$

678. $\frac{KO}{BO}=2,\ R=\frac{\sqrt{211}}{3\sqrt{2}},\ l=\frac{19}{3}.$

679. $AK=4\sqrt{2},\ OS=7,\ SD=\frac{(35)^{3/2}}{27}.$

680. $AK=7\sqrt{2},\ OS=11\sqrt{\frac{5}{2}},\ SD=\frac{1375\sqrt{11}}{233}.$

681. $AK=14\sqrt{2},\ OS=\frac{45}{\sqrt{2}},\ SD=\frac{6750}{169}.$

682. $AK=10,\ OS=14\sqrt{2},\ SD=\frac{91^{3/2}}{38}.$

683. $\angle SAB=\arccos\frac{4}{9},\ \angle SBH=\arccos\frac{5}{9},\ h=2,\ V=\frac{64}{21}.$

684. $\angle SAB=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{7},\ \angle BSH=\arcsin\frac{11}{21},\ h=8,\ V=\frac{576\sqrt{2}}{5}.$

685. $\angle SBA=\arccos\frac{\sqrt{33}}{16},\ \angle SAH=\arccos\frac{7}{16},\ h=3,\ V=\frac{22\sqrt{33}}{23}.$

686. $\angle SBA=\arccos\frac{2\sqrt{14}}{15},\ \angle ASH=\arcsin\frac{3}{5},\ h=6,\ V=28\sqrt{14}.$

687. $R_{\min} = \frac{18}{\sqrt{35}}$, $V = \frac{35}{51}\sqrt{\frac{1121}{35}}$.

688. $R_{\min} = \frac{32}{\sqrt{63}}$, $V = \frac{63}{31}\sqrt{\frac{3277}{63}}$.

689. $R_{\min} = \frac{18}{\sqrt{35}}$, $V = \frac{35}{17}\sqrt{\frac{841}{35}}$.

690. $R_{\min} = \frac{32}{\sqrt{63}}$, $V = \frac{21}{31}\sqrt{\frac{3781}{63}}$.

691. $\arccos\frac{1}{9}$; $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{65}}{8}$. **692.** $\arccos\frac{2}{3}$; $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

693. $\arccos\frac{9}{17}$; $\frac{6}{\sqrt{13}}$; $\frac{\sqrt{145}}{8}$. **694.** $\arccos\frac{8}{9}$; $\frac{2}{\sqrt{17}}$; $\frac{\sqrt{65}}{4}$.

695. $\frac{\sqrt{13}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6. **696.** $\frac{2\sqrt{21}}{5}$; $\frac{4}{5}$; $3\sqrt{3}$.

697. $\frac{2\sqrt{13}}{3}$; $\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\frac{6}{\sqrt{5}}$. **698.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$; $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

699. $\frac{\sqrt{57}}{4}$; $\frac{\sqrt{7}}{4}$; $18\sqrt{\frac{3}{7}}$. **700.** $\frac{\sqrt{31}}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$; $12\sqrt{\frac{3}{5}}$.

701. $\frac{\sqrt{79}}{5}$; $\frac{\sqrt{21}}{5}$; $\frac{12}{\sqrt{7}}$. **702.** $\frac{\sqrt{91}}{5}$; $\frac{3}{5}$; $8\sqrt{3}$.

703. 9; $3\sqrt{3}$; $\arcsin\sqrt{\frac{3}{28}}$. **704.** 11; $5\sqrt{3}$; $\arcsin\sqrt{\frac{12}{61}}$.

705. 9; $\frac{3}{2}\sqrt{35}$; $\arcsin\sqrt{\frac{35}{156}}$. **706.** 11; $10\sqrt{2}$; $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

707. 6; $\frac{18}{5}$; $\frac{4\sqrt{39}}{5}$. **708.** $\frac{15}{4}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

709. 12; $\frac{36}{5}$; $\frac{8\sqrt{39}}{5}$. **710.** $\frac{15}{2}$; 5; $\frac{5\sqrt{7}}{2}$.

711. $\frac{1}{3\sqrt{5}}$; $\frac{3}{\sqrt{5}}$; $\arcsin\frac{4}{5}$. **712.** $\frac{1}{3\sqrt{5}}$; $\frac{3}{\sqrt{5}}$; $\arcsin\frac{4}{5}$.

713. $\frac{1}{3\sqrt{5}}$; $\frac{3}{\sqrt{5}}$; $\arcsin\frac{4}{5}$. **714.** $\frac{1}{3\sqrt{5}}$; $\frac{3}{\sqrt{5}}$; $\arcsin\frac{4}{5}$.

715. $2:1$, считая от вершины S; $\frac{5}{3\sqrt{6}}$; $\frac{\pi\sqrt{23}}{9}$.

716. $2:1$, считая от вершины S; $\frac{20}{3\sqrt{6}}$; $\frac{4\pi\sqrt{23}}{9}$.

717. $2:1$, считая от вершины S; $\frac{5}{12\sqrt{6}}$; $\frac{\pi\sqrt{23}}{36}$.

718. $2:1$, считая от вершины S; $\frac{5}{27\sqrt{6}}$; $\frac{\pi\sqrt{23}}{81}$.

Задачник рекомендуется использовать как дополнение к учебнику А. Ю. Калинина, Д. А. Терешина «Геометрия. 10–11 классы». В нём собраны задачи из вступительных экзаменов по математике на физико-технический факультет МГУ (1947—1951) и в МФТИ (1952—2010).

Книга предназначена для школьников старших классов, обучающихся по программе профильного уровня по математике, абитуриентов технических вузов и преподавателей.

biblio.mccme.ru

ISBN 978-5-94057-582-5

9 785940 575825 >